TRABAJOS DE
INVESTIGACION OPERATIVA
Vol. 2. Núm. 1, 1987, pp. 21 a 30

MODELOS MULTIESTADO DE REEMPLAZAMIENTO CON REPARACION IMPERFECTA

Alfredo García Güemes
Escuela Universitaria de E.E.
Burgos

RESUMEN

Gran parte de los autores que han escrito sobre políticas estocásticas de reemplazamiento, han estado frecuentemente manteniendo dos supuestos en los modelos por ellos presentados:

a) El sistema sólo tiene dos estados posibles, uno de funcionamiento y otro de avería.
b) Tras la avería, el sistema es reparado o reemplazado, quedando «tan bien como nuevo».

En este artículo, se obtienen unas funciones de coste, para sistemas en los cuales no puedan mantenerse estos supuestos. A través de estas funciones de coste, es posible obtener un valor del tiempo T^*, tras el cual se debe efectuar un reemplazamiento preventivo. Asimismo, se demuestra que ese valor de T, existe.

Las funciones de coste obtenidas son dos: La esperanza matemática del coste medio a largo plazo y la esperanza matemática del valor actual del coste total a largo plazo.

Palabras clave: fiabilidad; proceso de renovación; reparación mínima; reparación imperfecta; tanto de avería.

Clasificación A.M.S.: 90B25.

ABSTRACT

Most of the authors who have written on «sthocastics politics of replacement», have often kept on maintaining two assumptions on the models they presented:

a) The system has only two possible states, working as new and failure.
b) After the failure the system is replaced, becoming «as good as new».

In this article, we obtain some cost functions, for those systems on which cannot be maintained these assumptions. It is possible to obtain a time value T^*, through these cost functions, after which you must bring out a preventive replacement. In this way, it is proved that the value T exists.

The abtained cost functions are two: The expected average long run cost per unit time and the total expected discounted cost.

Key woords: reliability; renewal processes; minimal repair; imperfect repair; failure rate.

A.M.S. classification: 90B25.

INTRODUCCION

Los modelos de reparación mínima, son aquellos en los que tras la reparación del sistema, éste queda «tan viejo como un instante antes de la avería»; este tipo de modelo presentado por Barlow R. E. and Proschan F. (1965, pág. 96-98), ha sido posteriormente perfeccionado por unos modelos más generales, denominados de reparación imperfecta, en los que se supone que el sistema queda tras la reparación «tan bien como nuevo» con probabilidad p y la reparación es mínima con probabilidad $1-p$; ver Brown M. and Proschan F. (1980).

Más recientemente, ya aparecen artículos en los que se presentan modelos con dos estados de avería y reparación imperfecta; Aven T. (1980) y Fontenot R. A. and Proschan F. (1983).

En este artículo, consideraremos un sistema con $M+1$ estados. El estado M, es el estado de funcionamiento y los estados $(0,1, ..., M-1)$, son los distintos estados o tipos de averías, ordenadas de más a menos graves.

Cuando se produce la avería, el sistema es reparado considerando despreciable el tiempo empleado en la reparación. Esta reparación efectuada desde el estado j, $0 \leqslant j \leqslant M-1$, resultará perfecta con probabilidad p_j, y mínima con probabilidad $1-p_j$.

Sean:

$\{Y(t),\ t \geqslant 0\}$, un proceso estocástico no creciente y continuo por la derecha, que representa el estado del sistema, cuando no se ha producido ninguna avería.

$R = inf\{t;\ Y(t) < M\}$, longitud de vida del sistema.

d, primer estado de avería alcanzado.

$Q_j(t) = P(R \leqslant t,\ d = j)$, $0 \leqslant j < M$. Esta función da la probabilidad de que el primer estado averiado sea el j y el tiempo de funcionamiento haya sido menor o igual a t.

$F(t) = P(R \leqslant t)$, es la función de distribución de tiempo hasta la avería.

$\bar{F}(t) = 1 - F(t)$, función de fiabilidad del sistema.

$P_j = P(d = j)$, es la probabilidad de que el primer estado de avería sea el j.

$F_j(t) = P(R \leqslant t/d = j)$, función que da la probabilidad condicional de que el sistema pase a un estado de avería en un tiempo menor o igual a t, dado que el primer estado de avería es el j.

Supongamos:

a) La esperanza matemática del tiempo hasta la avería es finito.
b) Todos los estados de avería son alcanzables.
c) Las funciones utilizadas son derivables, representándose sus derivadas con las correspondientes letras minúsculas.

Resultan obvias, las siguientes relaciones:

1) $\sum_{i=0}^{M=1} P_j = 1.$

2) $P_j = Q_j(\infty).$

3) $F(t) = \sum_{i=0}^{M-1} Q_j(t).$

4) $F_j(t) = \dfrac{Q_j(t)}{P_j}.$

En general, será posible estimar las funciones $F_j(t)$ y las probabilidades P_j, a través de las cuales se pueden obtener unas estimaciones de las funciones $Q_j(t)$, decisivas en la construcción de estos modelos.

El tanto de avería de un sistema se define por:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{F(t+\Delta t) - F(t)}{\Delta t} \cdot \frac{1}{\bar{F}(t)} = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)}$$

Paralelamente, definiremos tanto de avería al estado j:

$$v_j(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{Q_j(t+\Delta t) - Q_j(t)}{\Delta t} \cdot \frac{1}{\bar{F}(t)} = \frac{q_j(t)}{\bar{F}(t)}$$

donde $Q_j(t+\Delta t) - Q_j(t)$ es la probabilidad de que el sistema pase al estado j, en el intervalo $(t, t+\Delta t)$.

Sea $v_{pj}(t)$, la función de intensidad condicional de reparación perfecta desde el estado j.

Lema 1.

$$v_{pj}(t) = p_j v_j(t)$$

Demostración.—(generalización del lema 2.1 de Brown M. and Proschan F. [1980]).

Dado que no ha ocurrido ninguna avería en $(0,t)$, el sistema tiene un tanto de avería al estado j, de $v_j(t)$. Después de ocurrida la avería, la reparación perfecta se producirá con probabilidad p_j, con lo que se obtiene el resultado deseado.

Sean:

$F_{pj}(t)$, la función que da la probabilidad de que el tiempo hasta la reparación perfecta sea menor que t, y que dicha reparación se produzca desde el estado j.

R_{pn}, tiempo transcurrido hasta la reparación perfecta, suponiendo que se comienza con un sistema nuevo y no se produce ningún reemplazamiento preventivo, en el n-ésimo ciclo.

c, coste operativo por unidad de tiempo.

r_j, coste neto de reparación desde el estado j.

r, coste neto de un reemplazamiento preventivo.

$\mathscr{C}_n(T) = \min(R_{pn}, T)$, duración del n-ésimo ciclo.

Se tiene que:

$$F_{pj}(t) = P_j \left\{ 1 - \left[\exp\left\{ - \sum_{i=0}^{M-1} p_j \int_0^t v_j(x)dx \right\} \right] \right\}$$

(ver, por ejemplo, Mann N. R., Schafer R. E. and Singpurwalla N. D. [1974, pág. 17]).

ESPERANZA MATEMATICA DEL COSTE MEDIO A LARGO PLAZO

En este primer modelo, la política de reemplazamiento será: «Reemplazar el sistema, cuando halla transcurrido un tiempo T, a partir del último reemplazamiento programado o de la última reparación perfecta, según sea lo último que halla ocurrido, de forma que se minimice la esperanza matemática del coste medio a largo plazo».

Dado que $\{\mathscr{T}_n(T)\}_{n=1}^{n=\infty}$, genera un proceso de renovación, se puede escribir: ver Ross, S. M. (1970, pág. 52).

$$\bar{C}(T)=\frac{EC(T)}{E\mathscr{T}(T)}$$

donde:

$\bar{C}(T)$, es la esperanza matemática del coste medio a largo plazo.

$EC(T)$, es la esperanza matemática del coste total de un ciclo cualesquiera.

$E\mathscr{T}(T)$, es la esperanza matemática de la duración de un ciclo cualesquiera.

Sean:

$F_p(t)=\sum_{j=0}^{M-1} F_{pj}(t)$, esto es, la función de distribución del tiempo hasta la reparación perfecta.

$H(t)$, la función de distribución de $\mathscr{T}(T)$.

Se tiene que:

$$H(t)=\begin{cases}F_p(t) & \text{para } t<T\\ 1 & \text{para } t\geqslant T\end{cases}$$

entonces, la esperanza de la longitud de un ciclo será:

$$E\mathscr{T}(T)=\int_0^{\infty} t\ dH(t)$$

integrando por partes se tiene:

$$\int_0^\infty t\, dH(t) = T - \int_0^T F_p(t)\, dt =$$

$$= T - \int_0^T \left\{ 1 - \sum_{j=0}^{M-1} P_j \left[\exp\left\{ - \sum_{j=0}^{M-1} p_j \int_0^t v_j(x)\, dx \right\} \right] \right\} dt =$$

$$= \int_0^T \sum_{j=0}^{M-1} P_j \left[\exp\left\{ - \sum_{j=0}^{M-1} p_j \int_0^t v_j(x)\, dx \right\} \right] dt$$

Designando por $EN_j(T)$, al número esperado de veces que el sistema se encuentra en el estado j, en un ciclo, se tiene:

$$EN_j(T) = \int_0^\infty \int_0^t v_j(s)\, ds\, dH(t)$$

integrando por partes:

$$\int_0^\infty \int_0^t v_j(s)\, ds\, dH(t) = \int_0^T v_j(s)\, ds -$$

$$\int_0^T v_j(t) \left\{ 1 - \sum_{j=0}^{M-1} P_j \left[\exp\left\{ - \sum_{j=0}^{M-1} p_j \int_0^t v_j(x)\, dx \right\} \right] \right\} dt =$$

$$= \int_0^T v_j(t) \sum_{j=0}^{M-1} P_j \left[\exp\left\{ - \sum_{j=0}^{M-1} p_j \int_0^t v_j(x)\, dx \right\} \right] dt$$

Dado que la probabilidad de que se produzca un reemplazamiento preventivo en T es $\bar{F}_p(T)$, definitivamente se puede escribir:

$$\bar{C}(T) = c + \frac{\sum_{j=0}^{M-1} r_j \int_0^T v_j(t) \sum_{j=0}^{M-1} P_j \left[\exp\left\{ - \sum_{j=0}^{M-1} p_j \int_0^t v_j(x)\, dx \right\} \right] dt + r\, \bar{F}_p(T)}{\int_0^T \sum_{j=0}^{M-1} P_j \left[\exp\left\{ - \sum_{j=0}^{M-1} p_j \int_0^t v_j(x)\, dx \right\} \right] dt}$$

De forma inmediata se observa que $\bar{C}(0) = \infty$; resultado natural si tenemos en cuenta que $\bar{C}(0)$, es la esperanza matemática del coste de un sistema que se reemplaza de modo continuo sin llegar a funcionar.

Por otra parte, dado que $F_p(t) \leqslant F(t)$, se tiene que $\bar{F}_p(t) \geqslant \bar{F}(t)$, o lo que es lo mismo $\frac{\bar{F}_p(t)}{\bar{F}(t)} \geqslant 1$; ahora bien, dado que todos los P_j, así como

p, son positivos, este cociente se mantendrá finito para todo t. Sea K una cota superior. Entonces:

$$\frac{\sum_{j=0}^{M-1} r_j \int_0^T v_j(t)\bar{F}_p(t)\,dt}{\int_0^T \bar{F}(t)\,dt} < \frac{K\sum_{j=0}^{M-1} r_j \int_0^T q_j(t)\,dt}{\int_0^T \bar{F}_p(t)\,dt}$$

y cuando T tiende a infinito, $\int_0^T q_j(t)\ dt = P_j$, quedando el segundo miembro de la desigualdad anterior:

$$\frac{K\sum_{j=o}^{M-1} r_j\ P_j}{\int_0^T \bar{F}_p(t)\ dt}$$

expresión que evidentemente es finita, lo cual implica que:

$$\bar{C}(\infty) \text{ existe}$$

En definitiva lo que se ha demostrado, es que la función propuesta tiene al menos un mínimo, esto es, existe al menos un valor T^*, que minimiza la esperanza matemática del coste medio a largo plazo.

ESPERANZA MATEMATICA DEL VALOR ACTUAL DEL COSTE TOTAL A LARGO PLAZO

Consideremos la misma política de reemplazamiento del apartado anterior, variando el criterio de valoración, que en este caso será, la esperanza matemática del valor actual del coste total a largo plazo, siendo $\mathscr{J}>0$, el tanto instantáneo de capitalización.

Sean:

$C_{\mathscr{J}}(T)$, la esperanza matemática del valor actual del coste total a largo plazo.

$V_{\mathscr{J}n}(T)$, el coste total del *n-ésimo ciclo, actualizado al principio del mismo.*

El resto de la notación, será la ya utilizada anteriormente, haciendo por comodidad:

$$\mathscr{C}_n(T)=\mathscr{C}_n \quad \text{y} \quad \mathscr{C}(T)=\mathscr{C}$$

Se tiene que:

$$C_{\mathscr{I}}(T)=E\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \exp\left[-\mathscr{I}(\mathscr{C}_1+\mathscr{C}_2+\cdots+\mathscr{C}_{n-1})\right] V_{\mathscr{I}\mathrm{n}}(T)\right\}$$

Ahora bien, dado que $\{\mathscr{C}_n\}_{n=1}^{n=\infty}$, genera un proceso de renovación, que el coste del n-ésimo ciclo es independiente de la amplitud de los ciclos anteriores y que la esperanza del coste es la misma para todos los ciclos, se tiene:

$$C_{\mathscr{I}}(T)^{\infty}\sum^{n=1} \{E[\exp(-\mathscr{I}\mathscr{C})]\}^{n-1}\, EV_{\mathscr{I}}(T)=\frac{EV_{\mathscr{I}}(T)}{1-E[\exp(-\mathscr{I}\mathscr{C})]}$$

Lema 2.

$$1-E[\exp(-\mathscr{I}\mathscr{C})]=\mathscr{I}\int_0^T [\exp(-\mathscr{I}t)]\ \bar{F}_p(t)\ dt$$

DEMOSTRACIÓN:

Siendo $H(t)$, como en el apartado anterior, la función de distribución de $\mathscr{C}$, se tiene:

$$E[\exp(-\mathscr{I}\mathscr{C})]=\int_0^{\infty} [\exp(-\mathscr{I}t)]\ dH(t)=\mathscr{I}\int^{\infty}{}_0 [\exp(-\mathscr{I}t)]\ H(t)\ dt=$$

$$=\mathscr{I}\int_0^T [\exp(-\mathscr{I}t)\ F_p(t)\ dt+\mathscr{I}\int_T^{\infty} [\exp(-\mathscr{I}t)]\ dt=$$

$$=[\exp(-\mathscr{I}T)]+\mathscr{I}\int_0^T [\exp(-\mathscr{I}t)]\ F_p(t)\ dt=$$

$$=1-\mathscr{I}\int_0^T [\exp(-\mathscr{I}t)]\ \bar{F}_p(t)\ dt.\ c.q.d.$$

El coste total de un ciclo, se compone de tres sumandos: la parte correspondiente al coste operativo, los costes derivados de las posibles reparaciones o reemplazamientos no programados, y el coste del posible reemplazamiento programado.

Sea:

$$I[Y(t)=M]=\begin{cases}1 & \text{si } Y(t)=\mathrm{M}\\ 0 & \text{si } Y(t)<M\end{cases}$$

Entonces, la esperanza matemática del coste operativo de un ciclo actualizado al principio del mismo será:

$$[\exp(-\mathscr{I}T)]\, r\ \bar{F}_p(T)$$

En definitiva, se tiene que la función a minimizar será:

$$C(T)=\frac{c}{\mathscr{I}}+\frac{\sum_{j=0}^{M-1} r_j \int_0^T [\exp(-\mathscr{I}t)]\ v_j(t)\ \bar{F}_p(t)\ dt+r[\exp(-\mathscr{I}T)]\ \bar{F}_p(T)}{\mathscr{I}\int_0^T [\exp(-\mathscr{I}t)]\,\bar{F}_p(t)\ dt}$$

Inmediatamente se observa que:

$$C(0)=\infty$$

Por otra parte, teniendo en cuenta que las siguientes transformadas de Laplace:

a) $\mathscr{L}[v_j(t)\ \bar{F}_p(t), \mathscr{I}]$, existe

ya que:

$$v_j(t)\ \bar{F}_p(t)\leqslant q_j(t)\ K;\ \forall t$$

b) $\mathscr{L}[\bar{F}_p(t), \mathscr{I}]$ existe

se tiene por tanto que:

$$C(\infty) \text{ existe}$$

Se ha probado, que al igual que la función esperanza matemática del coste medio a largo plazo, ésta, también tiene al menos un valor T^*, que la minimiza.

UN EJEMPLO SENCILLO

Consideremos un sistema, con cuatro estados (0, 1, 2, 3), donde el estado 3 es el estado de funcionamiento y los otros tres, tres tipos distintos de avería.

Se sabe que el tiempo hasta la avería, es independiente del tipo de la misma y por tanto $F_j(t)=F(t)$ y se ha estimado que esta es la siguiente distribución de Weibull con tanto de avería creciente:

$$F(t)=1-e^{-0,2t^2}$$

asimismo, se han estimado los siguientes parámetros:

$P_0=1/2$; $P_1=1/4$; $P_2=1/4$.
$p_0=0,1$; $p_1=0,2$; $p_2=0,2$.
$c=4$; $r_0=20$; $r_1=18$; $r_2=15$; $r=25$.
$\mathscr{J}=0,1$.

A través de unos sencillos programas de ordenador, se obtienen los valores mínimos de las funciones $\bar{C}(T)$ y $C_{\mathscr{J}}(T)$, en los puntos:

$$\bar{C}(T)=21,48 \quad \text{para } T^*=3,10$$
$$C_{\mathscr{J}}(T)=202,27 \quad \text{para } T^*=3,30$$

REFERENCIAS

AVEN, T. (1981): *Optimal replacement under a minimal repair strategy—A general failure model,* University of Oslo.

BARLOW, R. E., y PROSCHAN, F. (1965): *Mathematical theory of reliability,* John Wiley and Sons, Inc. N. Y.

BROWN, M., y PROSCHAN, F. (1980): *Imperfect repair,* The Florida State University. Statistics Report M546.

MANN, N. R.; SCHAFER, R. E., y SINGPURWALLA, N. D. (1974): *Methods for statistical analysis of reliability and life data,* John Wiley and Sons, Inc. N. Y.

ROSS, S. M. (1970): *Applied probability models with optimization applications,* Holden-Day, Inc. San Francisco.