Trabajos de Estadística y
de Investigación Operativa
Vol. 35. Núm. 2, 1984, pp. 196 a 214

TEORÍA AXIOMÁTICA DE LAS MEDIDAS DE INQUIETUD

Secundino López García
Pedro Gil Álvarez
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad de Oviedo

Resumen

Se introduce el concepto general de medida de inquietud (o medida de incertidumbre cualitativo-cuantitativa) sobre una clase de esquemas dobles de probabilidades y utilidades; y se estudian algunas de sus propiedades: invariancia, componibilidad, etc. Finaliza el trabajo con la caracterización de una clase particular de medidas.

Summary

We introduce the general concept of unquietness measure (or quantitative-qualitative measure of uncertainty) over a class of double schemas of probabilities and utilities. Later, we will refer to several properties of these measures: invariance, componibility, etc. Finally, we establish a characterization of a kind of measures.

Palabras clave. Medida de inquietud, función de inquietud, medidas restringibles, medidas componibles, medidas invariantes y medidas idempotentes.

(*) Recibido. Marzo. 1982

Key words. Unquietness measure, unquietness function, restrictable measures, composable measures, invariant measures and idempotent measures.

1. INTRODUCCIÓN

Ha transcurrido bastante tiempo desde que A. M. YAGLOM e I. M. YAGLOM (13) señalaron que la medida de la incertidumbre propuesta por C. E. SHANNON (11) no porporcionaba resultados satisfactorios cuando los sucesos de un sistema aleatorizado tienen diferente utilidad. Así, tomando un ejemplo citado por P. A. GIL (7), es generalmente admitido que nadie siente la misma «incertidumbre» frente a un viaje por una carretera en la que la probabilidad de accidente es 0,28, que frente al mismo viaje por una carretera en la que dicha probabilidad es 0,72. Y, sin embargo, la entropía es la misma en ambos casos. Ello se debe a que en tales situaciones se producen dos sensaciones distintas; por una parte la que denominamos incertidumbre ante el resultado, que depende exclusivamente del sistema probabilístico; y por otro lado la que denominaremos inquietud, que depende de las probabilidades de los sucesos y de los sucesos en sí, a través de su utilidad. Nos encontramos, por tanto, ante una de las posibles concepciones de la teoría mixta de la información introducida por J. ACZEL y Z. DAROCZY (1).

Es este contexto se han desarrollado diversos trabajos: M. BELIS Y S. GUIASU (2), P. A. GIL (6), G. LONGO (9), M. A. GIL (5), B. D. SHARMA, J. MITTER y M. MOHAN (12), B. BOUCHON (3), entre otros.

Nuestro objetivo es dar una teoría general axiomática de las medidas de inquietud, de forma en cierto modo paralela a la teoría axiomática de las medidas de información establecida en trabajos de B. FORTE (4), J. KAMPE DE FERIET (8) y J. LOSFELD (10), entre otros.

Supondremos, como condición previa, que el observador tiene capacidad suficiente para asociar a cada suceso que pueda presentarse en cualquier experiencia un número real que refleje la satisfacción (o insatisfacción) que le produce la aparición de ese suceso. A esta valoración real se le denomina en lo sucesivo «utilidad». Una situación de indiferencia ante el resultado se traduce en un conjunto de utilidades iguales para éstos y en este caso no existe inquietud, independientemente del valor asignado a las utilidades. Es obvio, así mismo, que la inquietud aparece sólo en experimentos de resultado incierto, puesto que aunque existan preferencias entre los resultados, dicha sensación desaparece si el resultado es conocido de antemano.

Siguiendo con la concepción que de las medidas de información tiene J. LOSFELD (10). entenderemos, fundamentalmente, las medidas de inquietud como funciones reales monótonas respecto a un preorden establecido sobre una clase de experiencias.

Sea A una experiencia cualquiera cuyo conjunto de resultados es $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Sea p_i la probabilidad de aparición del resultado a_i, y sea u_i su utilidad. Abreviadamente, representaremos el experimento A por medio del campo triple:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n \\ u_1 & u_2 & \ldots & u_n \end{pmatrix} \quad \text{donde} \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Sea $\mathfrak{A}$ una clase de experiencias y sea $\mathfrak{U}$ la clase de los campos triples asociados a las experiencias de $\mathfrak{A}$.

Si se tiene en cuenta que la inquietud es sustancialmente subjetiva pues depende de las utilidades, que son evaluadas por el observador, no parece que haya otra posibilidad razonable más que considerar sobre $\mathfrak{U}$ el preorden dado por la preferencia personal. En un ámbito de mayor generalidad, incluso puede establecerse este preorden de prefencia sin necesidad de recurrir a la valoración de la utilidad de los resultados que es una operación no siempre sencilla si las consecuencias de los experimentos tiene una estructura compleja o cualitativa. Sin embargo, no nos ocupamos de este caso ya que careceríamos de un mínimo aparato matemático que nos condujera a resultados interesantes.

En definitiva, lo que se pretende es, al igual que ocurre con las medidas de información, comparar situaciones dispares a través de una aplicación real que respeta una preordenación establecida a priori entre experiencias inequívocamente comparables.

2. UN ORDEN PARCIAL RAZONABLE SOBRE $\mathfrak{U}$

Dedicaremos este apartado a la definición de una relación binaria de orden parcial sobre $\mathcal{U}$ que parece natural admitir. Hacemos previamente unas consideraciones que justifican su introdución.

La inquietud, según se ha indicado, surge como consecuencia de la incertidumbre y de la dispersión que presenten las utilidades. El orden parcial que a continuación se define es una forma particular de comparar, a priori, las experiencias de acuerdo con la dispersión citada. Para ello se considera, en primer lugar, un «valor típico» de cada experiencia —al que llamaremos *origen*— obtenido en función de las probabilidades y las utilidades. Después se define una medida del «distanciamiento» existente entre la utilidad de cada resultado y el origen, obteniéndose un nuevo campo denominado de utilidades relativas o «autoinquietudes».

Definición 2.1. Diremos que una función real μ definida sobre $\mathcal{U}$ es una función de *origen*, si cumple:

$$\min{}^*(u_1, u_2, \ldots, u_n) < \mu(U) < \max{}^*(u_1, u_2, \ldots, u_n) \tag{1}$$

para todo campo U de $\mathcal{U}$, donde $\min^*(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ y $\text{máx}^*(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ son, respectivamente, los valores mínimo y máximo del subconjunto de $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ formado por las utilidades cuyo valor p_i asociado es distinto de cero.

Se dice que una función de origen es *simétrica* si se cumple:

$$\mu\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n \\ u_1 & u_2 & \ldots & u_n \end{pmatrix} = \mu\begin{pmatrix} a_{r(1)} & a_{r(2)} & \ldots & a_{r(n)} \\ p_{r(1)} & p_{r(2)} & \ldots & p_{r(n)} \\ u_{r(1)} & u_{r(2)} & \ldots & u_{r(n)} \end{pmatrix} \tag{2}$$

donde r es una permutación cualquiera sobre el conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$, si ambos campos pertenecen a $\mathcal{U}$.

Se dice que una función de origen es *expansible* si se verifica:

$$\mu\begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \ldots & a_{j_1}^1 & a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_{j_2}^2 & \ldots & a_1^n & a_2^n & \ldots & a_{j_n}^n \\ p_1^1 & p_2^1 & \ldots & p_{j_1}^1 & p_1^2 & p_2^2 & \ldots & p_{j_2}^2 & \ldots & p_1^n & p_2^n & \ldots & p_{j_n}^n \\ u_1 & u_1 & \ldots & u_1 & u_2 & u_2 & \ldots & u_2 & \ldots & u_n & u_n & \ldots & u_n \end{bmatrix} =$$

$$= \mu\begin{bmatrix} a_1'^1 & a_2'^1 & \ldots & a_{k_1}'^1 & a_1'^2 & a_2'^2 & \ldots & a_{k_2}'^2 & \ldots & a_1'^n & a_2'^n & \ldots & a_{k_2}'^n \\ p_1'^1 & p_2'^1 & \ldots & p_{k_1}'^1 & p_1'^2 & p_2'^2 & \ldots & p_{k_2}'^2 & \ldots & p_1'^n & p_2'^n & \ldots & p_{k_n}'^n \\ u_1 & u_1 & \ldots & u_1 & u_2 & u_2 & \ldots & u_2 & \ldots & u_n & u_n & \ldots & u_n \end{bmatrix} \tag{3}$$

cuando ambos campos pertenecen a $\mathcal{U}$ y se cumple:

$$P_s'^r = \sum_{i \in B_r'^s} p_i^s \quad \text{donde} \quad B_1'^s, B_2'^s, \ldots, B_{k_s}'^s,$$

forman una partición del conjunto $\{1, 2, \ldots, j_s\}$ y donde $s = 1, 2, \ldots, n$.

Se dice que una función de origen es *expansible respecto a las probabilidades* si cumple:

$$\mu \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n \\ u_1 & u_2 & \ldots & u_n \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n & a_{n+1} \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n & 0 \\ u_1 & u_2 & \ldots & u_n & u_{n+1} \end{pmatrix} \tag{4}$$

siendo ambos campos pertenecientes a $\mathcal{U}$.

2.2 Definición. Sea D_λ, $\lambda \in \bar{\mathbb{R}}$, una función real con dominio en $\bar{\mathbb{R}}$. Diremos que D_λ es una función de AUTOINQUIETUD (O UTILIDAD RELATIVA) respecto de λ, si satisface:

a) $D_\lambda(\lambda) = 0 \quad \forall \lambda \in \bar{\mathbb{R}}$ (5)

b) Si $\lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \lambda$, entonces $|D_\lambda(\lambda_1)| \geqslant |D_\lambda(\lambda_2)|$
Si $\lambda_1' > \lambda_2' \geqslant \lambda$, entonces $|D_\lambda(\lambda_1')| \geqslant |D_\lambda(\lambda_2')|$ (6)

cualesquiera que sean λ_1, λ_2, λ_1', $\lambda_2' \in \bar{\mathbb{R}}$.

Sea

$$U = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n \\ u_1 & u_2 & \ldots & u_n \end{pmatrix}$$

un campo de $\mathcal{U}$. Sea Υ. Sea $\lambda = \mu(U)$. Si D_λ es una función de autoinquietud respecto de λ, al valor $v_i = D_\lambda(u_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, se le denomina autoinquietud correspondiente a a_i respecto de D_λ y μ.

Designaremos por $\mathcal{V}_{(\mu, D_\lambda)}$ a la clase de campos triples de autoinquietudes que se generan a partir de $\mathcal{U}$ por medio de μ y de D_λ. Es decir:

$V = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n \\ v_1 & v_2 & \ldots & v_n \end{pmatrix}$ pertenece a $\mathcal{V}_{(\mu, D_\lambda)}$ si existe en $\mathcal{U}$ un campo

$$U = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{bmatrix} \quad \text{tal que } \mu(U) = \lambda \text{ y } v_i = D_\lambda(u_i).$$

Fijada la función origen μ, sea Λ el conjunto de los orígenes asociados a los campos de $\mathcal{U}$. Sea λ un elemento cualquiera de Λ y sea D_λ una función de autoinquietud respecto de λ. Sean U_1 y U_2 dos campos de $\mathcal{U}$. Diremos que $U_1 \leqslant_{(\mu, D_\lambda)} U_2$ si y sólo si se cumple una de las dos condiciones siguientes:

a) $D_{\lambda_1}(u_i) \leqslant D_{\lambda_2}(u_i')$, $i = 1, 2, \dots, n$, donde $\lambda_1 = \mu(U_1)$, $\lambda_2 = \mu(U_2)$ y U_1 y U_2 de la forma:

$$U_1 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad U_2 = \begin{bmatrix} a_1' & a_2' & \dots & a_n' \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ u_1' & u_2' & \dots & u_n' \end{bmatrix}$$

ó bien

b) $\max\limits_i u_i \leqslant \min\limits_j u_j'$, $\quad i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, m;$

cuando:

$$U_1 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad U_2 = \begin{bmatrix} a_1' & a_2' & \dots & a_m' \\ p_1' & p_2' & \dots & p_m' \\ u_1' & u_2' & \dots & u_m' \end{bmatrix}$$

3. PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES DE ORIGEN Y DE AUTOINQUIETUD

3.1 Definición. Sea μ una función de origen sobre $\mathcal{U}$. Diremos que μ es *homogénea* si:

$$\mu(U_1) = \beta \cdot \mu(U_2) \qquad \forall \beta \in \mathbb{R}, \quad \beta \neq 0,$$

cuando U_1 y U_2 son dos campos de $\mathcal{U}$ de la forma:

$$U_1 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{bmatrix} \qquad U_2 = \begin{bmatrix} a_1' & a_2' & \dots & a_n' \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ \beta u_1 & \beta u_2 & \dots & \beta u_n \end{bmatrix}$$

3.2 Definición. Sea μ una función de origen sobre $\mathcal{U}$. Diremos que μ es *traslativa* si:

$$\mu(U_1) = \mu(U_2) + \alpha \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

cuando U_1 y U_2 son dos campos de $\mathcal{U}$ de la forma:

$$U_1 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{bmatrix} \qquad U_2 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ u_1 + \alpha & u_2 + \alpha & \dots & u_n + \alpha \end{bmatrix}$$

3.3 Definición. Sea D_λ, $\lambda \in \mathbb{R}$, una función de autoinquietud. Diremos que es *invariante frente a homotecias*, si:

$$D_\lambda(\mathrm{u}) = D_{\lambda \cdot \beta}(u \cdot \beta) \qquad \forall \beta \in \mathbb{R}, \quad \beta \neq 0$$

3.4 Definición. Sea D_λ, $\lambda \in \bar{\mathbb{R}}$, una función de autoinquietud. Diremos que es invariante frente a traslaciones si:

$$D_\lambda(\mathrm{u}) = D_{\lambda + \alpha}(u + \alpha) \qquad \forall \alpha \in \bar{\mathbb{R}}$$

3.5 Proposición. *Es condición necesaria y suficiente para que D_λ, $\lambda \in \mathbb{R}$, sea invariante frente a homotecias que se cumpla:*

$$D_\lambda(u) = f(u/\lambda) \qquad \text{si } \lambda \neq 0 \quad y$$
$$D_\lambda(\mathrm{u}) = c \qquad \text{si } \lambda = 0; \ (c = \textit{constante}),$$

donde f es una función real que satisface las condiciones:
$f(1) = 0$; $|f(x)|$ *es creciente para $x \geqslant 1$ y decreciente para $x < 1$.*

La demostración es inmediata a partir de la cadena de igualdades:

$$D_\lambda(u) = D_{\lambda/\lambda}(u/\lambda) = D_1(u/\lambda) = f(u/\lambda)$$

3.6 Proposición. *Es condición necesaria y suficiente para que D_λ, $\lambda \in \mathbb{R}$, sea invariante frente a traslaciones que se verifique:*

$$D_\lambda(u) = g(u - \lambda)$$

donde g es una función real que satisface las condiciones: $g(0) = 0$; $|g(x)|$ *creciente para $x \geqslant 0$* y $g(x)$ *decreciente para $x < 0$.*

La proposición se comprueba fácilmente si se tiene en cuenta que:

$$D_\lambda(u) = D_{\lambda - \lambda}(u - \lambda) = D_0(u - \lambda) = g(u - \lambda)$$

4. AXIOMATIZACIÓN DE LAS MEDIDAS DE INQUIETUD

Sea $\mathcal{U}$ una clase de campos y $\leqslant$ un preorden sobre $\mathcal{U}$. Llamaremos MEDIDA DE INQUIETUD sobre $(\mathcal{U}, <)$ a toda función real L que satisfaga las condiciones siguientes:

a)
$$\begin{aligned} U &\xrightarrow{L} \bar{\mathbb{R}}^{+} \\ U &\longrightarrow L(U) \end{aligned} \tag{7}$$

b) L es monótona creciente respecto a $\leqslant$. (8)

c) Si U es un campo de $\mathcal{U}$ de la forma

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ u & u & \dots & u \end{bmatrix}$$

entonces se cumple: $L(U) = 0$ (9)

d) Si U es un campo de $\mathcal{U}$ de la forma:

$$U = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_i & \dots & a_n \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ u_1 & u_2 & \dots & u_i & \dots & u_n \end{bmatrix}$$

se verifica:

$$L(U) = 0 \tag{10}$$

e) L satisface la misma condición de simetría que las funciones de origen. 2.1.(2). (11)

f) L satisface la misma condición de expansibilidad respecto a las utilidades que las funciones de origen. 2.1.(3). (12)

g) Asímismo, L también debe satisfacer la misma condición de expansibilidad respecto a las probabilidades que las funciones de origen. 2.1.(3). (13)

Nota. Después de la axiomatización que se ha establecido, se observa que la inquietud depende sólo del campo doble de probabilidades y utilidades, por lo que, en lo sucesivo, omitiremos en los campos la fila que corresponde a los resultados de la experiencia, siempre que ello no provoque alguna confusión.

5. ALGUNOS EJEMPLOS DE FUNCIONES DE ORIGEN, DE AUTOINQUIETUD Y DE MEDIDAS DE INQUIETUD

5.1 Ejemplo. Dado un campo U cualquiera perteneciente a $\mathcal{U}$:

$$U = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{bmatrix}$$

la función $\mu(U) = \sum_{i=1}^{n} p_i u_i$ define una función de origen que verifica las propiedades 2.1.(2), 2.1.(3) y 2.1.(4).

5.2 Ejemplo. Las funciones $\mu(U) = \text{máx}_i^* u_i$ y $\mu'(\text{U}) = \text{mín}_i^* u_i$, donde máx* y mín* son las funciones definidas en 2.1.(1), también son de origen y verifican así mismo las propiedades 2.1.(2), 2.1.(3) y 2.1.(4)

5.3 Ejemplo. Así mismo, las funciones media aritmética y media geométrica del conjunto de utilidades cuya probabilidad es no nula, definen funciones de origen que satisfacen 2.1.(2), 2.1.(3) y 2.1.(4). La mediana de este conjunto de utilidades define otra función de origen que, sin embargo, no cumple la condición 2.1.(3).

5.4 Ejemplo. La función $D_\lambda(u_i) = \log(u_i/\lambda)$, donde $\lambda = \sum_{i=1}^{n} p_i u_i$, define una función de autoinquietud que, según 3.5., es invariante frente a homotecias.

5.5 Ejemplo. La función $D_\lambda(u_i) = (u_i - \lambda)^2$, es una función de autoinquietud invariante, por 3.6., frente a traslaciones.

5.6 Ejemplo. Propuesto en ([5]).
La función

$$L(U) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log \frac{u_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i u_i}$$

define una medida de inquietud respecto al preorden establecido en el apartado 2.

5.7 Ejemplo. Propuesto en ([5]).
La función

$$L(U) = \sum_{i=1}^{n} p_i \left(u_i - \sum_{i=1}^{n} p_i u_i \right)^2$$

define otra medida de inquietud respecto al mismo preorden.

6. PROPIEDADES DE LAS MEDIDAS DE INQUIETUD

6.1 Propiedad. Sea L una medida de inquietud sobre $(\mathcal{U}, \leqslant)$ y sean μ y D_λ funciones de origen y autoinquietud, respectivamente. Sea $\mathcal{V}_{(\mu, D_\lambda)}$ la clase de campos de autoinquietud asociada a $\mathcal{U}$ por medio de μ y D_λ.

Diremos que L es RESTRINGIBLE a $\mathcal{V}_{(\mu, D_\lambda)}$ si existe una aplicación M de $\mathcal{V}_{(\mu, D_\lambda)}$ en $\bar{\mathbb{R}}^+$, tal que $L = M \circ h$, siendo h la aplicación determinada por μ y por D_λ que asocia a cada elemento de U su correspondiente en $\mathcal{V}_{(\mu, D_\lambda)}$, según se ha explicado.

6.2 Propiedad. Diremos que la medida L definida sobre $(\mathcal{U}, <)$ es invariante frente a traslaciones, si verifica:

$$L \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{bmatrix} = L \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ u_1 + \alpha & u_2 + \alpha & \dots & u_n + \alpha \end{bmatrix} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

si ambos campos pertenecen a $\mathcal{U}$.

6.3. Propiedad. Diremos que la medida L definida sobre $(\mathcal{U}, \leqslant)$ es invariante frente a homotecias, si:

$$L \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{bmatrix} = L \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ \beta u_1 & \beta u_2 & \dots & \beta u_n \end{bmatrix} \quad \forall \beta \in \bar{\mathbb{R}}, \beta \neq 0$$

sin ambos campos pertenecen a $\mathcal{U}$.

6.4. Proposición. *Si la función μ es traslativa, D_λ es invariante frente a traslaciones y L es restringible, entonces L es invariante frente a traslaciones.*

Inmediato.

6.5. Proposición. *Si la función μ es homogénea, D_λ es invariante* *frente a homotecias y L es restringible, entonces L es invariante frente a homotecias.*

Inmediato.

6.6. Propiedad. Sea L una medida de inquietud sobre $(\mathcal{U}, \leqslant)$, restringible respecto a las funciones μ y D_λ. Sea M su función asociada. Diremos que M es idempotente, si:

$$M \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ v & v & \dots & v \end{pmatrix} = v$$

para todos los campos de $\mathcal{V}_{(\mu, D_\lambda)}$ de este tipo, cualquiera que sea n.

6.7. Proposición. *Sea L una medida de inquietud sobre* $(\mathcal{U}, \leqslant)$. *Sea* $\sim$ *la relación de equivalencia sobre* $\mathcal{U}$ *definida del siguiente modo:*

Dados U_1 *y* U_2 *pertenecientes a* $\mathcal{U}$, **diremos que son equivalentes, y escribiremos** $\mathcal{U}_1 \sim U_2$, *si y sólo si se verifica* $L(U_1) = L(U_2)$.

Sea $\mathcal{U}/\sim$ *el espacio cociente. Representaremos por* $\tilde{U}_i$ *a las clases de* $\mathcal{U}/\sim$. *Sean, por otra parte,* μ *y* D_λ *funciones de origen y de autoinquietud, respectivamente, fijadas de antemano.*

Es condición necesaria y suficiente para que L sea restringible a $\mathcal{V}_{(\mu, D_\lambda)}$ *que la aplicación suprayectiva h determinada por* μ *y por* D_λ *verifique:*

$h(\tilde{u}_i) \neq h(\tilde{u}_j)$ *cualesquiera que sean los representantes* $\tilde{u}_i$ *y* $\tilde{u}_j$ *de dos clases distintas* $\tilde{U}_i$ *y* $\tilde{U}_j$ *de* $\mathcal{U}/\sim$.

En efecto:

Si se cumple la condición de la hipótesis, la función M definida para todo V de $\mathcal{V}_{(\mu, D_\lambda)}$ por:

$M(V) = L(U)$, donde U es un elemento de $\mathcal{U}$ para el que cumple $h(U) = V$, verifica $L = M \circ h$. Luego L es restringible.

Recíprocamente:

Supongamos, razonando por el absurdo, que existan dos representantes de clases distintas para los que se cumple: $h(\tilde{u}_i) = h(\tilde{u}_j)$; entonces se cumpliría $M[h(\tilde{u}_i)] = M[h(\tilde{u}_j)]$. Es decir, que $L(\tilde{u}_i) = L(\tilde{u}_j)$; y, por tanto, $\tilde{u}_i$ y $\tilde{u}_j$ pertenecerían a la misma clase, lo cual contradice la hipótesis.

7. COMPONIBILIDAD DE LAS MEDIDAS DE INQUIETUD RESTRINGIBLES

Sea $\mathcal{V}$ una clase cualquiera de campos de autoinquietud. Definimos sobre $\mathcal{V}$ una operación de composición del siguiente modo:

Sean $r, s \in [0, 1] | r + s = 1$ y sean V_1 y V_2 dos elementos cualesquiera de $\mathcal{V}$, cuyos conjuntos de resultados son disjuntos, es decir:

$$V_1 = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{bmatrix} \qquad V_2 = \begin{bmatrix} p'_1 & p'_2 & \dots & p'_m \\ v'_1 & v'_2 & \dots & v'_m \end{bmatrix}$$

Llamaremos *r-s*-mixtura de V_1 y V_2, y lo representamos por $V_1 \underset{(r,s)}{*} V_2$, al esquema:

$$\begin{bmatrix} \frac{r}{r+s}p_1 & \frac{r}{r+s}p_2 & \dots & \frac{r}{r+s}p_n & \frac{s}{r+s}p'_1 & \frac{s}{r+s}p'_2 & \dots & \frac{s}{r+s}p'_m \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n & v'_1 & v'_2 & \dots & v'_m \end{bmatrix}$$

Con el fin de facilitar la nomenclatura, convenimos en representar por $V_1 \cap V_2 = \phi$ el hecho de que estas dos experiencias posean conjuntos de resultados que son disjuntos. Diremos que V' es una subexperiencia de V,

con
$$V = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ v & v_2 & \dots & v_n \end{pmatrix}$$

y escribiremos $V' \subset V$, si existe un subconjunto $\{i_1, i_2, \dots, i_m\}$ del conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$, para el que se cumple:

$$V' = \begin{bmatrix} \frac{p_{i_1}}{p} & \frac{p_{i_2}}{p} & \dots & \frac{p_{i_m}}{p} \\ v_{i_1} & v_{i_2} & \dots & v_{i_m} \end{bmatrix} \quad \text{donde} \quad p = \sum_{j=1}^{m} p_{i_j}$$

7.1. Definición. Sea L una medida de inquietud sobre $(\mathcal{U}, \leqslant)$ restringible a $\mathcal{V}_{(\mu, D_\lambda)}$. Sea M su función asociada. Diremos que M es componible, si verifica:

$$M(V_1 \underset{(r,s)}{*} V_2) = \psi(r, s, M(V_1), M(V_2))$$

donde ψ es una función real no negativa con dominio en el conjunto

$$\epsilon = \{(x, y, t, z) | x, y \in [0, 1], x + y \leqslant 1, t = M(V_1), z = M(V_2),$$
$$V_1 \cap V_2 = \phi, V_1, V_2 \in \mathcal{V}_{(\mu, D_N)}\}$$

En este caso diremos que L es componible.

7.2. Definición. Puesto que la inquietud está contenida en el valor relativo de las utilidades, dedicaremos especial atención a las funciones definidas sobre los esquemas de utilidades relativas. Con este fin definimos las FUNCIONES DE INQUIETUD, para las que obtendremos resultados interesantes.

Sea $\mathcal{W}$ la clase de campos:

$$\left\{\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{pmatrix} \text{ donde } p_i \in [0, 1], \sum_{i=1}^{n} p_i = 1, v_i \in \bar{\mathbb{R}}, \right.$$
$$\left. \forall i = 1, 2, \dots, n, \quad \text{y} \quad \forall n = 1, 2, \dots \right\}$$

Diremos que N es una *función de inquietud*, si verifica las condiciones:

a)
$$\mathcal{W} \xrightarrow{N} \bar{\mathbb{R}}^{+} \tag{14}$$

b)

$$N\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = 0$$

cualesquiera que sean los valores $p_1, p_2, \dots, p_n$. (18)

c)

$$N\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ v_1 & v_2 & \dots & v_{i-1} & 0 & v_{i+1} & \dots & v_n \end{pmatrix} = 0$$

cualesquiera que sean los números $v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n$. (16)

***d*)**
$$N\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{pmatrix} = N\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_n & 0 \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n & v_{n+1} \end{pmatrix}$$

cualesquiera que sean $v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1}$. (17)

e)

$$N\begin{pmatrix} p_1^1 & p_1^2 & \dots & p_1^{j_1} & p_2^1 & p_2^2 & \dots & p_2^{j_2} & \dots & p_n^1 & p_n^2 & \dots & p_n^{j_n} \\ v_1 & v_1 & \dots & v_1 & v_2 & v_2 & \dots & v_2 & \dots & v_n & v_n & \dots & v_n \end{pmatrix} =$$
$$= N\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{pmatrix} \text{ donde } p_i = \sum_{k=1}^{j_i} p_i^k, \text{ cualesquiera que}$$

sean los valores que intervienen en los campos. (18)

f)

$$N\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{pmatrix} = N\begin{pmatrix} p_{r(1)} & p_{r(2)} & \dots & p_{r(n)} \\ v_{r(1)} & v_{r(2)} & \dots & v_{r(n)} \end{pmatrix}$$

donde r es una permutación cualquiera sobre el conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ y cualesquiera que sean los valores que intervienen en los campos. (19)

Si sobre $\mathcal{W}$ se define una ley de composición de mixtura de la misma forma que antes, y en 7.1 se reemplaza $\mathcal{V}_{(\lambda, D_\lambda)}$ por $\mathcal{W}$, obtenemos la condición de componibilidad para las funciones de inquietud. Así mismo, diremos que una función de inquietud es idempotente si verifica una propiedad análoga a la citada en 6.6.

7.3. Proposición. *Si N es una función de inquietud componible, entonces la restricción de N a los campos con n alternativas es una función* ψ_n *que depende de las variables* $p_1, p_2, \dots, p_n, N\binom{1}{v_1}, N\binom{1}{v_2}, \dots, N\binom{1}{v_n}$. *Es decir:*

$$N\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{pmatrix} = \psi_n\left(p_1, p_2, \dots, p_n, N\begin{pmatrix} 1 \\ v_1 \end{pmatrix}, N\begin{pmatrix} 1 \\ v_2 \end{pmatrix}, N\begin{pmatrix} 1 \\ v_n \end{pmatrix}\right)$$

En efecto:

Razonando por inducción, consideremos $n = 2$.

Sea $\begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix}$ un elemento de $\mathcal{W}$. Podemos escribir:

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ v_1 \end{pmatrix} (p_1 \overset{*}{,} p_2) \begin{pmatrix} 1 \\ v_2 \end{pmatrix} \text{ y, por tanto,}$$

$$N\begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} = \psi\left(p_1, p_2, N\begin{pmatrix} 1 \\ v_1 \end{pmatrix}, N\begin{pmatrix} 1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right) = \psi_2\left(p_1, p_2, N\begin{pmatrix} 1 \\ v_1 \end{pmatrix}, N\begin{pmatrix} 1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right).$$

Supongamos cierto el teorema para campos con $n - 1$ alternativas. Consideremos, entonces, un campo con n alternativas:

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{pmatrix}$$

Podemos escribir:

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ v_1 \end{pmatrix} (p_1, 1^* - p_1) \begin{bmatrix} \frac{p_2}{1-p_1} & \frac{p_3}{1-p_1} & \dots & \frac{p_n}{1-p_1} \\ v_1 & v_2 & \dots & v_3 \end{bmatrix}$$

y, por tanto:

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{pmatrix} = \psi \{ p_1, 1 - p_1, N\begin{pmatrix} 1 \\ v_1 \end{pmatrix}, \psi_{n-1}\Bigg(\frac{p_2}{1-p_1}, \frac{p_3}{1-p_1}, \dots$$

$$\dots, \frac{p_n}{1-p_1}, N\begin{pmatrix} 1 \\ v_2 \end{pmatrix}, N\begin{pmatrix} 1 \\ v_3 \end{pmatrix}, \dots, N\begin{pmatrix} 1 \\ v_n \end{pmatrix}\Bigg)\} =$$

$$= \psi_n\left(p_1, p_2, \dots, p_n, N\begin{pmatrix} 1 \\ v_1 \end{pmatrix}, N\begin{pmatrix} 1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \dots, N\begin{pmatrix} 1 \\ v_n \end{pmatrix}\right) \quad (20)$$

7.4. Corolario. Si además de las condiciones impuestas en 7.3, N es idempotente:

$$N\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{pmatrix} = \psi_n[p_1, p_2, \dots, p_n; v_1, v_2, \dots, v_n] \quad (21)$$

7.5. Proposición. *Sea N una función de inquietud que cumple las dos propiedades siguientes:*

a) existe una función ψ_n continua respecto a todas sus variables, tal que

$$N\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{pmatrix} = \psi_n[p_1, p_2, \dots, p_n; v_1, v_2, \dots, v_n]$$

cualquiera que sea el campo de $\mathcal{W}$ y cualquiera que sea el valor $n = 1, 2, \dots$

b) verifica la condición de aditividad

$$N\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{pmatrix} + N\begin{pmatrix} p_1 p_2 & \dots & p_n \\ v_1' v_2' & \dots & v_n' \end{pmatrix} =$$

$$N\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ v_1 + v_1' & v_2 + v_2' & \dots & v_n + v_n' \end{pmatrix}$$

cualesquiera que sean los campos

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \ldots & p_n \\ v_1 & v_2 & \ldots & v_n \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \ldots & p_n \\ v_1' & v_2' & \ldots & v_n' \end{pmatrix} \text{ de } \mathcal{W},$$

entonces se cumple:

$$N\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \ldots & p_n \\ v_1 & v_2 & \ldots & v_n \end{pmatrix} = \psi_n(p_1, p_2, \ldots, p_n; v_1, v_2, \ldots, v_n) =$$
$$= c(p_1 v_1 + p_2 v_2 + \ldots + p_n v_n)$$

donde c es una constante.

En efecto:

Consideremos los campos de $\mathcal{W}$

$$\begin{pmatrix} p_1 & \ldots & p_{i-1} & p_i & p_{i+1} & \ldots & p_n \\ 0 & \ldots & 0 & v_i & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} p_1 & \ldots & p_{i-1} & p_i & p_{i+1} & \ldots & p_n \\ 0 & \ldots & 0 & z_i & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

entonces

$$\psi_n(p_1, \ldots, p_{i-1}, p_i, p_{i+1}, \ldots, p_n; 0, \ldots, 0, v_i + z_i, 0, \ldots, 0) = \psi_n(p_1, \ldots \ldots, p_{i-1}, p_i, p_{i+1}, \ldots, p_n; 0, \ldots, 0, v_i, 0, \ldots, 0) + \psi_n(p_1, \ldots, p_{i-1}, p_i, p_{i+1}, \ldots, p_n; 0, \ldots, 0, z_i, 0, \ldots, 0)$$

o, lo que es lo mismo, en virtud de (18)

$$\psi_2(p_i, 1 - p_i; v_i + z_i, 0) = \psi_2(p_i, 1 - p_i; v_i, 0) + \psi_2(p_i, 1 - p_i; z_i, 0)$$

Sea $\alpha(p_i, x) = \psi_2(p_i, 1 - p_i; x, 0)$. De la igualdad anterior se sigue que la función α es aditiva respecto a la segunda variable. Puesto que ψ_2 es continua, α también lo es y, por tanto, es homogénea respecto a dicha variable. Es decir

$$\psi_2(p_i, 1 - p_i; x, 0) = \alpha(p_i, x) = x\alpha(p_i, 1) = x\alpha'(p_i).$$

donde $\alpha'(p_i) = \psi_2(p_i, 1 - p_i; 1, 0)$.

Por otro lado

$$\psi_n(p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n; v_1, v_2, 0, \ldots, 0) = \psi_n(p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n; v_1, 0, 0, \ldots, 0) + \psi_n(p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n; 0, v_2, 0, \ldots, 0).$$

Por inducción, podemos escribir, cualquiera que sea n

$\psi_n(p_1, p_2, \ldots, p_n; v_1, v_2, \ldots, v_n) = \psi_n(p_1, p_2, \ldots, p_n; v_1, 0, \ldots, 0) +$
$+ \psi_n(p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n; 0, v_2, 0, \ldots, 0) + \ldots + \psi_n(p_1, \ldots, p_{n-1}, p_n;$
$0, \ldots, 0, v_n) = \psi_2(p_1, 1 - p_1; v_1, 0) + \psi_2(p_2, 1 - p_2; v_2, 0) + \ldots + \psi_2(p_n,$
$1 - p_n; v_n, 0) = \alpha'(p_1)\, v_1 + \alpha'(p_2)\, v_2 + \ldots + \alpha'(p_n)\, v_n.$

Se comprueba, por otra parte, que α' es aditiva. En efecto:

Consideremos un campo cualquiera de $\mathcal{W}$ de la forma

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \ldots & p_n \\ v_1 & v_2 & \ldots & v_n \end{pmatrix},$$

se cumple, en virtud de (18) que

$$\psi_n(p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n; v, v, v_3, \ldots, v_n) =$$
$$\psi_{n-1}(p_1 + p_2, p_3, \ldots, p_n; v, v_3, \ldots, v_n)$$

y por tanto

$\alpha'(p_1)\, v + \alpha'(p_2)\, v + \alpha'(p_3)\, v_3 + \ldots + \alpha'(p_n)\, v_n =$
$\alpha'(p_1 + p_2)\, v + \alpha'(p_3)\, v_3 + \ldots + \alpha'(p_n)\, v_n$, luego
$\alpha'(p_1 + p_2) = \alpha'(p_1) + \alpha'(p_2).$

Además, ya que $\alpha'(p) = \psi_2(p, 1 - p; 1, 0)$ se sigue que α' es continua y, en consecuencia, homogénea; es decir, $\alpha'(p) = p\alpha'(1) = pc$.

Se concluye, pues, que

$$\begin{aligned}\psi_n(p_1, p_2, \ldots, p_n; v_1, v_2, \ldots, v_n) &= cp_1v_1 + cp_2v_2 + \ldots + cp_nv_n = \\ &= c(p_1v_1 + p_2v_2 + \ldots + p_nv_n).\end{aligned}$$

7.6. Corolario. Si además de las condiciones impuestas en 7.5, N es idempotente:

$$\psi_n(p_1, p_2, \ldots, p_n; v_1, v_2, \ldots, v_n) = p_1v_1 + p_2v_2 + \ldots + p_nv_n$$

7.7. Proposición. *Es condición necesaria y suficiente para que una función de inquietud N sea idempotente que $N\binom{1}{v} = v$, para todo $v \in \bar{\mathbb{R}}$.*

La proposición se sigue de la igualdad (18).

7.8. Proposición. *Consideremos un espacio de inquietud* $(\mathfrak{U}, \leqslant)$ *y dos funciones μ y D_λ, de origen y autoinquietud, respectivamente, defi-*

nidas sobre él.

Sea h la transformación determinada por estas funciones. Si N es una función de inquietud, tal que L = N o h es monótona respecto a ⩽, entonces L es una medida de inquietud sobre $(\mathfrak{U}, \leqslant)$.

Se comprueba fácilmente a partir de las condiciones (14), (15), (16), (17), (18) y (19).

7.9. Ejemplos. Teniendo en cuenta que, a salvo de la condición de monotonía las medidas restringibles, cuando la aplicación h es biyectiva, tienen asociada una función que difiere exclusivamente de las funciones de inquietud en el dominio de definición, los ejemplos son prácticamente los mismos, si se amplía el dominio de definición. Así, los ejemplos 5.6 y 5.7 proporcionan medidas restringibles y la extensión de su función asociada es una función de inquietud. Dichas medidas son invariantes frente a homotecias la primera, y frente a traslaciones la segunda. Ambas son componibles con la misma ley:

$$\psi(r, s, x, y) = rx + sy$$

REFERENCIAS

ACZEL, J., and DAROCZY, Z. (1978). «A mixed theory of information I: Symmetric, recursive and measurable entropies of randomized systems of events» Rev. Fr. Automat. Inform. Rech. Oper. Inform. Téor. 12, 149-155.

BELIS, M., and GUIASU, S. (1968). «A quantitative-qualitative measure of information in cybernetic systems». IEEE Trans. Information Theory 14, 593-594.

BOUCHON, B. (1976). «Useful information and questionnaires». Inform. Contr. 16, 36-51.

FORTE, B. (1969). «Measures of information: The general axiomatic theory». Rev. Inf. Rech. Oper. *3*, R. 2, 63-90.

GIL, M. A. (1982). «On two unquietness measures for the finite experiences». Aceptado para su publicación en las Actas de la 2.ª Conferencia Mundial de Matemáticas al servicio del hombre, Canarias, España.

GIL, P. A. (1975). «Medidas de incertidumbre e información en problemas de decisión estadística». Tesis doctoral, Revista Real Academia Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid, LXIX, 3.º.

GIL P. A. (1981). «Teoría matemática de la información». ICE, Madrid.

KAMPE DE FERIET, J. (1973). La «Théorie genealisée de l'information et la mesure subjective de l'information». Les théories de l'information, Springer, 1-35.

LONGO, G. (1972). «A quantitative-cualitative measure of information» Springer-Verlag, New York.

LOSFELD, J. (1973). «Information generalisée et relation d'ordre» Les théories de l'information, Springer, 49-62.

SHANNON, C. E. (1948). «A mathematical theory of communication». Bell System Tech. J. 27.

SHARMA, B. D. MITTER, J. AND MOHAN, M. (1978). «On measures of 'useful' information». Inform. Contr. 39, 323-336.

YAGLOM, A. M., AND YAGLOM, I. M. (1969). «Probabilité et information». Dunod.