

Evolución de la topología en España en la segunda mitad del siglo XX

por

Manuel Castellet

RESUMEN. En este trabajo se describe la evolución de la topología en España, desde los escauceos de los años cincuenta y sesenta del siglo XX, pasando por el nacimiento de los primeros grupos de investigación, hasta su consolidación como una disciplina fuertemente arraigada en la mayoría de universidades españolas en la última década del siglo.

EL NACIMIENTO DE LA TOPOLOGÍA

Para centrar los orígenes de la topología en España, me ha parecido conveniente dedicar una breve, y posiblemente incompleta, introducción al nacimiento de la topología y a su implantación como ciencia propia, independiente del análisis y de la geometría, con especial énfasis en aquellos actores de mediados del siglo XX que abrieron el camino para los primeros contactos sistemáticos de matemáticos españoles con la topología.

La topología nace probablemente en 1736 cuando Leonhard Euler (1707–1783) reconoce un aspecto particular en un problema que, en principio, no se distingue en nada de sus homólogos de la geometría elemental: el problema de los puentes de Königsberg. Cito textualmente del trabajo presentado por Euler [30] en la Academia de St. Petersburg el 26 de agosto de 1736: «Además de esta parte de la geometría que trata de las magnitudes y que desde siempre ha sido cultivada con mucho celo, existe otra, completamente desconocida hasta nuestros días, de la cual habló Leibniz por primera vez y que llamó *Geometrie der Lage*. Según él, esta parte de la geometría se ocupa de determinar sólo la posición y de buscar las propiedades que resultan de esta posición; en este trabajo no hay que considerar las magnitudes por sí mismas ni calcularlas, pero aún no está muy bien establecido qué problemas de este tipo pertenecen a la *Geometrie der Lage* ni qué método hay que utilizar para resolverlos; es por eso que, cuando recientemente se me presentó un problema que parecía ligado a la geometría ordinaria pero cuya solución no dependía ni de la determinación de magnitudes ni del cálculo de cantidades, no he dudado en relacionarlo con la *Geometrie der Lage*, y con mayor motivo al entrar únicamente consideraciones de posición en la solución, mientras que el cálculo no interviene para nada».

Al problema de los puentes de Königsberg le siguió, cronológicamente, el teorema de Euler de los poliedros, con un largo recorrido que va desde el enunciado (incorrecto) y la demostración (incorrecta) de Euler [31] en 1750 hasta el enunciado

riguroso generalizado a espacios de dimensión arbitraria y la demostración correcta del también suizo Ludwig Schläfli (1814–1895) en 1850 [67].

El nombre *topología* no aparece hasta 1847 en la obra *Vorstudien zur Topologie* de Johann Benedikt Listing (1808–1882) [41]. Dice Listing: «Por topología entendemos, pues, el estudio de los aspectos cualitativos de las formas espaciales o de las leyes de conexión, de la posición mutua y del orden de los puntos, rectas, superficies y cuerpos, así como de sus partes y uniones, haciendo abstracción de sus relaciones de medida y magnitud.»

Pocos años más tarde, en 1851, Bernhard Riemann (1826–1866), en su tesis doctoral *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse* [61], introduce dos ideas esenciales para la topología: el concepto de orden de conexión de una superficie, a partir de las «secciones transversales», que le permite clasificar las superficies; y las superficies de Riemann asociadas a las funciones multiformes, idea que adquiere toda su brillantez en la teoría de las funciones abelianas.

Las aportaciones de Enrico Betti (1823–1892), August Ferdinand Möbius (1790–1868), Camille Jordan (1838–1922) o Felix Klein (1849–1925), entre otros, fueron el cultivo para un inicio esplendoroso de la topología como ciencia con contenido propio, en dos amplias líneas, de la mano de Cantor y de Poincaré.

La importancia en topología de los trabajos de Georg Cantor (1845–1918), [18, 19, 20], radica en el estudio de los conjuntos de puntos de la recta, primero, y del espacio euclídeo, después, y en el estudio de la cardinalidad, a finales del siglo XIX. Se iniciaba así la topología conjuntista, que había de enriquecerse con las aportaciones posteriores de David Hilbert (1862–1943), quien introdujo el concepto de entorno en el espacio euclídeo, así como de Felix Hausdorff (1863–1942), de Maurice Fréchet (1878–1973) o de Paul Alexandroff (1896–1982), para citar sólo los más significativos.

La trascendental aportación de Henri Poincaré (1854–1912) a la topología se inicia con su *Analysis situs* [53] en 1895 y continúa hasta 1904 en los distintos «Complementos», [54, 55, 56, 57], Poincaré introduce los conceptos de variedad, de homología, de números de Betti, define con rigor los poliedros y los utiliza para crear una estructura combinatoria, establece el teorema de dualidad, el de Euler para la homología, analiza los coeficientes de torsión, desarrolla el concepto de grupo fundamental... y formula diversas conjeturas; la más famosa de ellas ha mantenido en vilo durante 100 años a la comunidad matemática.

ESPLENDOR EN EUROPA, IRRUPCIÓN EN AMÉRICA

Los trabajos del holandés Luitzen Brouwer (1881–1967) sobre la invariancia de la dimensión [13] y del norteamericano James W. Alexander (1888–1971) sobre la invariancia de los números de Betti [3], así como los de ambos sobre el teorema de Jordan, marcan el desarrollo de la topología algebraica hasta 1925.

La demostración dada por Alexander se basa en un artículo suyo y de Oswald Weber (1880–1960) [6] en el que introducen las estructuras simpliciales, que representa la primera aportación significativa de matemáticos de Estados Unidos a la

topología. De hecho, en su demostración de los teoremas de dualidad y de la curva de Jordan [4], Alexander introduce el uso de coeficientes en $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Paralelamente, Brouwer introduce en 1912 los conceptos de grado de una aplicación entre esferas y de aproximación simplicial [14], que de tanta utilidad serían durante toda la primera mitad del siglo. Con estas técnicas demuestra el teorema de la invariancia de la dimensión y da la primera demostración completa del teorema de la curva de Jordan [15], que él mismo generaliza a dimensiones superiores; una demostración que, según Hopf, «no es precisamente de carácter muy general, pero difícilmente igualable en elegancia». Fue Brouwer también quien trató por primera vez las singularidades de campos vectoriales continuos sobre una variedad y los «problemas de punto fijo», dando el conocido teorema para las esferas de dimensión par. Posteriormente, en 1925, Heinz Hopf (1894–1970) demostró [37] que en ciertas condiciones muy amplias la suma de los índices de las singularidades coincide con la característica de Euler, resultado del cual ya había dado una demostración parcial Salomon Lefschetz (1884–1972) en 1923.

Independientemente, las ideas y resultados generados en el campo de la topología conjuntista enriquecen y al mismo tiempo se benefician de los avances en el análisis matemático y la teoría de funciones. En España será Manuel Valdivia quien, años más tarde, iniciará a sus discípulos en el uso de la técnicas topológicas para afrontar problemas emergidos del análisis.

LA IRRUPCIÓN DE LA TOPOLOGÍA ALGEBRAICA

La obra algebraica de Emmy Noether (1882–1935) en Göttingen influyó decisivamente en la algebrización de la topología. Bajo sus ideas, Alexandroff y Hopf exponen en su libro *Topologie I* [7], de 1935, la teoría de la homología para complejos simpliciales. Independientemente, Alexander y Lefschetz introducían el uso de coeficientes en $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ y \mathbb{Q} , respectivamente.

En este mismo año, 1935, se producen dos eventos que deberían marcar el desarrollo futuro de la topología. El más destacado es la celebración en Moscú del primer congreso internacional sobre topología, en el que por un lado Alexander [5] y Alexei Kolmogorov (1903–1987) introducían el estudio de la cohomología de un espacio, dándole la estructura de un anillo graduado que generalizaba el anillo de intersección de variedades; y, por otro, Hopf presentaba la tesis de su discípulo Eduard Stiefel (1909–1978) [70], en la que se definían las clases características usando las nociones esenciales de fibrados, resultados a los que también había llegado Hassler Whitney (1907–1989) independientemente [74], bajo un aspecto más diferenciable, con la introducción del producto cup de cohomología.

Pero en octubre de aquel mismo año se celebró en Ginebra el segundo congreso internacional sobre topología, con la brillante conferencia de Élie Cartan (1869–1951) sobre la topología de los grupos de Lie [21], y Witold Hurewicz (1904–1956) publicaba sus trabajos sobre los grupos de homotopía [39]. También de 1935 data el libro *Lehrbuch der Topologie* [68], de Herbert Seifert (1907–1996) y William Threlfall (1888–1949), libro de referencia durante varias décadas. Precisamente, 20 años más

tarde fue el propio Seifert quien inició a Antonio Plans en el estudio de la teoría de nudos.

Todas estas ideas van tomando cuerpo en los años previos a la Segunda Guerra mundial y hasta 1945, cuando todos los nuevos conceptos pueden considerarse ya plenamente consolidados.

Los trabajos de Stiefel, estudiando en qué variedades puede existir un número determinado de campos direccionales continuos linealmente independientes, y de Whitney [75], determinando en qué casos sobre una variedad de Riemann existen n campos diferenciales ortonormales en cada punto, incluyen el inicio de la teoría de fibrados con fibra esférica. John H. C. Whitehead (1904–1960) [73] inicia su clasificación, que culmina Norman E. Steenrod (1910–1971) mediante las clases de homotopía de aplicaciones del espacio base en las grassmannianas [69]. El propio Steenrod avanza en el estudio del anillo de cohomología, introduciendo posteriormente las operaciones de cohomología.

Las ideas expuestas por Élie Cartan en Ginebra en el estudio de la topología de los grupos de Lie son desarrolladas por Lev S. Pontrjagin (1908–1988) [58] y por Charles Ehresmann (1905–1979) [29], demostrando que el anillo de cohomología de un grupo de Lie es isomorfo al de un producto de esferas de dimensiones impares y determinando su polinomio de Poincaré. Con Charles Ehresmann trabajó en París 20 años más tarde José Luis Viviente.

Es a partir de estos resultados que Hopf [38] inicia en 1939 el estudio de lo que ahora conocemos como H -espacios, demostrando que para esta clase de espacios, que contiene la de los grupos de Lie, sigue siendo válido el resultado anterior. Es precisamente en el entorno de Hopf donde se avanza significativamente en trabajos que interrelacionan los fibrados, la cohomología, las clases características, los grupos de homotopía y los H -espacios. La aportación inicial de Beno Eckmann (1917–) [28] y su continuada labor marcan buena parte del desarrollo de estas teorías. En 1955 Eckmann introdujo a Josep Teixidor en el estudio de la topología algebraica y en 1973 dirigió la tesis de Manuel Castellet.

LOS PRIMEROS ESCARCEOS EN ESPAÑA

A pesar de que la topología se había iniciado en Europa en el siglo XVIII y se había consolidado en todo el mundo científicamente desarrollado a finales del siglo XIX y primera mitad del XX, y de que en los años veinte y treinta Julio Rey Pastor y Antonio Flores de Lemus habían publicado algunos artículos de carácter topológico (que no tuvieron ninguna incidencia en el desarrollo posterior de la topología en España), hubo que esperar a la década de los cincuenta para que se dictasen los primeros cursos de doctorado en España, de la mano de Francisco Botella en Madrid y, posteriormente, de Antonio Plans en Zaragoza y de Josep Teixidor en Barcelona, quienes progresivamente incorporan la topología como asignatura optativa en los planes de estudio.

En el año 1950, Francisco Botella (1915–1987) asume la organización de la enseñanza e investigación de la topología en la Universidad de Madrid, impartiendo

cursos monográficos de doctorado sobre teoría del continuo, espacios fibrados o cohomología con coeficientes en un haz. Bajo su dirección se doctoran Joaquín Arregui (1959) [10], Enrique Outerelo (1966) [51] y José María Montesinos (1971) [48], este último enlazando con la topología de baja dimensión y teoría de nudos iniciada por Antonio Plans.

Antonio Plans (1922–1998), que trabajó durante unos meses en Alemania bajo la dirección de Seifert, quien le dirigió la tesis doctoral, publicó en 1953 un resultado sobre la homología de los espacios recubridores cíclicos de nudos [52], posiblemente el primero en España en esta disciplina. Tras algunos artículos de investigación en temas variados de geometría y topología, se centró posteriormente en el estudio de los espacios de Hilbert y de Banach, línea en la que se doctorarían, entre otros, años más tarde, Elena Martín (1977) [45] y María Jesús Chasco (1985) [25].

Durante la primavera-verano del año 1955, Josep Teixidor (1920–1989), que ya había realizado estudios en Italia y Alemania, se desplaza a Zúrich para seguir un curso de Beno Eckmann en la Eidgenössische Technische Hochschule y entra en contacto por primera vez con la topología algebraica, estudios que él introduce al año siguiente en la Universidad de Barcelona en un curso de doctorado sobre teoría de homotopía, siguiendo las ideas de Hopf y del propio Eckmann, que aquel mismo año realizó una estancia en Barcelona. Posteriormente, durante el curso 1964–65 imparte el primer curso de licenciatura de Topología algebraica siguiendo el famoso libro de P. Hilton y S. Wylie *Homology Theory*, recién publicado. De Teixidor, que nunca trabajó en topología, debía emanar 10 años más tarde, con la estancia de Manuel Castellet en Zúrich, donde preparó su tesis doctoral [23], lo que se convertiría en el Grupo de Topología Algebraica de Barcelona.

José Luis Viviente (1926–), becario del CNRS en París a partir de 1959, trabajó con Henri Cartan en la École Normale Supérieure y con Charles Ehresmann en el Institut Henri Poincaré, iniciando su formación en topología algebraica. A partir de 1965 impulsa estos estudios en la Universidad de Zaragoza, facilitando el contacto de sus alumnos de doctorado con destacados investigadores extranjeros. Con él se doctorarían María Teresa Lozano (1974) [42], Eladio Domínguez (1974) [27] y Luis Javier Hernández (1980) [36], entre una larga lista de futuros topólogos.

A finales de la década de los sesenta, de la mano de Enrique Vidal Abascal (1908–1994), René Deheuvels, de la Universidad de París VII, impartió en la Universidad de Santiago de Compostela una serie de mini-cursos de doctorado sobre contenidos topológicos modernos, con el punto de mira hacia la geometría diferencial.

UN PERÍODO CRUCIAL, 1975–1990, EN INVESTIGACIÓN

Como consecuencia de estos primeros escarceos en el campo de la topología en España, las universidades Autónoma de Barcelona, Complutense de Madrid, Santiago de Compostela y Zaragoza lideraron el desarrollo de las distintas líneas de investigación, que se fueron consolidando durante las décadas de los setenta y ochenta. A este período me limitaré (con alguna incursión a fechas más cercanas), para poder disponer de la suficiente perspectiva histórica.

En los inicios de la escuela de Madrid destaca la figura de José María Montesinos, trabajando en variedades de dimensión 3, estudiando en particular sus estructuras geométricas, y teoría de nudos, en particular los recubrimientos de nudos racionales. Él es, además, quien, influenciado por Ralph H. Fox durante una estancia en el Institute for Advanced Study de Princeton, inicia a José Manuel Rodríguez Sanjurjo en el estudio de la teoría de la forma en su tesis doctoral (1979) [63]. De Rodríguez Sanjurjo, tras sus estancias en Gran Bretaña, emana buena parte de la investigación actual en la Universidad Complutense de Madrid en teoría de la forma y dinámica compleja, con sus discípulos Manuel Alonso (doctorado en 1985 [8]) y Francisco Romero (doctorado en 1990 [65] con Enrique Outerelo).

Montesinos se interesa también, tras una estancia en Cambridge, por el estudio geométrico de las superficies de Riemann, tema en el que introduce a Emilio Bujalance (que se doctoraría en 1980 [16] bajo la dirección de Joaquín Arregui). De ahí arranca otra nueva línea, que estudia actualmente las propiedades topológicas y conformes de las superficies de Riemann, con un importante componente de geometría algebraica y análisis complejo, con Antonio Costa (doctorado en 1984 [26]) y Milagros Izquierdo, entre otros. Independientemente, Juan Tarrés (que se doctora [71] con Joaquín Arregui en 1979) inicia un grupo que trabaja en distintos aspectos de la teoría de la dimensión.

En la Universitat de València José Luis Blasco utiliza por primera vez en la década de los setenta técnicas topológicas para afrontar problemas de análisis en la escuela creada por Manuel Valdivia. Con él se doctoran Salvador Hernández (1983) [35] y Manuel Sanchis (1990) [66], que consolidan con los años un grupo de investigación en la Universitat Jaume I en el estudio de espacios de funciones y grupos topológicos, con el que colaboran Elena Martín, en Madrid, y María Jesús Chasco, en Pamplona. Paralelamente, Manuel López Pellicer inicia en la Universitat Politècnica de València el estudio de problemas de topología no simétrica y de álgebra topológica, dirigiendo las tesis doctorales de Salvador Romaguera (1981) [64] y Valentí Gregori (1985) [34], núcleo central de un grupo de investigación en esta área.

En 1976, María Teresa Lozano realiza una estancia postdoctoral en la Universidad de Wisconsin, durante la cual centra su interés en la topología de dimensión baja, lo que propicia una larga colaboración científica con Montesinos (de 1979 a 1986 en la Universidad de Zaragoza). Bajo la dirección de ambos presenta la tesis doctoral Milagros Izquierdo (1990) [40] y se inicia Enrique Artal, que realiza su tesis doctoral [11] en 1991 en la Universidad de Ginebra dirigido por Claude Weber, especializándose en el estudio de la topología de variedades algebraicas y singularidades, con un fuerte componente de geometría algebraica.

En este mismo año, 1976, se incorpora a la Universitat Autònoma de Barcelona Manuel Castellet, que en 1973 se había doctorado [23] por la Universidad de Barcelona en temas de topología algebraica trabajados en la ETH de Zürich bajo la dirección de Beno Eckmann. Con él se doctoran Jaume Aguadé (1979) [1] y José Luis Navarro (1979) [50], éste alumno de Viviente en Zaragoza.

Aguadé, que trabaja esencialmente en teoría de homotopía y técnicas cohomológicas en grupos, y Castellet dirigen respectivamente las tesis doctorales de Carles Broto (1988) [12] y de Carles Casacuberta (1988) [22]. Es este el núcleo inicial del

Grupo de Topología Algebraica de Barcelona, que durante 20 años organizó cada cuatro el congreso *Barcelona Conference on Algebraic Topology*, uno de los de más prestigio en esta disciplina. Poco a poco las líneas de investigación se diversifican: espacios clasificadores de grupos, espacios de lazos finitos, localización de grupos y espacios, localización en categorías de modelos, grupos p -compactos, grupos p -locales finitos, homotopía estable, categorías de orden superior, etc.

Mención especial merece aquí la iniciativa de este grupo en impulsar el intercambio de información y la colaboración entre los distintos grupos de investigación españoles. Así, Jaume Aguadé inicia en 1993 la organización de los Encuentros de Topología, que se vienen celebrando cada año desde entonces, y en el año 2004 Manuel Castellet, primer coordinador de la Red Española de Topología, dirige la publicación del *Libro blanco de la topología en España* [24], que refleja el avance de esta disciplina en España en el período 1995–2003.

Joan Porti (doctorado en 1994 [59] en la Universidad de Toulouse con Michel Boileau), inicia en Barcelona la investigación en topología geométrica, en un punto de encuentro entre la topología de baja dimensión, la algebraica y la geometría hiperbólica. Sus trabajos se han centrado en la conjetura de geometrización de William Thurston, con el estudio de estructuras geométricas en topología tridimensional y de las variedades hiperbólicas.

José Luis Rodríguez, procedente de la Universidad de Zaragoza y actualmente en la de Almería, se doctora [62] con Casacuberta (1997) y Antonio Viruel, procedente de la Universidad de Málaga, lo hace con Broto (1996) [72]. Viruel entronca con un grupo que a inicios de la década de los noventa se está consolidando en Málaga. Su origen radica en las tesis doctorales de Francisco Gómez Ruiz (1978) [33] y de Aniceto Murillo (1989) [49], ambas dirigidas por Stephen Halperin en Toronto, que han derivado hacia la investigación en homotopía racional.

La escuela iniciada por José Luis Viviente abre dos líneas de interés con las tesis doctorales de Eladio Domínguez y de Luis Javier Hernández Paricio. Por un lado, Domínguez, tras una estancia en la Universidad de Warwick trabajando con Sandro Buoncristiano, se inicia en la teoría de bordismo geométrico y durante su estancia en la Universidad de Sevilla entra en contacto con Rafael Ayala y Antonio Quintero en el estudio del cobordismo de variedades homológicas. Esta colaboración entronca con la incipiente de Domínguez y Hernández, iniciándose una línea de investigación en teoría de homotopía propia, a la que se incorporan Luis Español, José Ignacio Extremiana y María Teresa Rivas de la Universidad de La Rioja.

Independientemente, pero con importantes conexiones futuras con los últimamente mencionados, Antonio Martínez Cegarra [46], arrancando esencialmente del álgebra homológica, y posteriormente Manuel Bullejos [17], con un componente más topológico, crean en la Universidad de Granada un grupo en teoría de categorías.

La Universidad de Santiago de Compostela no es ajena a la implantación de la topología en España, si bien, por los antecedentes más inmediatos en esta universidad, la geometría y el análisis de variedades juegan un papel importante. Los trabajos de Xosé M. Masa (doctorado en 1973 [47] tras estudiar en Estrasburgo con Max Karoubi) en cohomología y clases características de foliaciones, le llevaron al estudio de variedades foliadas con técnicas algebraico-topológicas, a las que se han incorpo-

rado, entre otros, con temas que abarcan variedades foliadas, sistemas dinámicos y homotopía racional, Enrique Macías [44], Antonio Gómez Tato [32], Fernando Alcalde [2], Jesús Álvarez [9] y Marta Macho Stadler [43], que, doctorada en 1996 en la Universidad Claude Bernard de Lyon con Gilbert Hector, inicia un nuevo grupo de investigación en la Universidad del País Vasco, paralelo al ya creado por María Ángeles de Prada en topología borrosa a partir de 1975 [60].

EL IMPULSO DE LA DÉCADA DE LOS 90

La década de los 90 representa la implantación de la topología en la mayoría de universidades de España. Dos factores contribuyen esencialmente a ello: a) tres actividades de carácter comunitario, como son las series de congresos *Barcelona Conference on Algebraic Topology* e *Iberoamerican Conference on Topology and its Applications*, los *Encuentros de Topología* y la serie de *Cursos Avanzados* del Centre de Recerca Matemàtica, y b) a nivel individual, el fuerte incremento de tesis doctorales en topología, que llegan a sumar ochenta entre los años 1995 y 2003.

LAS SERIES DE CONGRESOS

A partir de un primer congreso celebrado en la Universitat Autònoma de Barcelona en 1982, pionero en las universidades españolas, el grupo de topología algebraica de esta universidad, con el apoyo e infraestructura del recién creado Centre de Recerca Matemàtica, inicia en el año 1986 esta serie de cinco congresos internacionales —en Barcelona (1986), Sant Feliu de Guíxols (1990 y 1994), Bellaterra (1998) y Barcelona (2002)—, que permite establecer un íntimo contacto de los topólogos españoles, especialmente los algebraicos, con la comunidad internacional y dar visibilidad al enorme progreso de la topología en España. Las actas de las ediciones de 1986 y de 1990 fueron publicadas en la serie *Lecture Notes in Mathematics*, de Springer Verlag, y las de 1994 y 1998 en *Progress in Mathematics*, de Birkhäuser Verlag.

En 1995, topólogos de la Universitat Jaume I y de la Universitat Politècnica de València inician la serie de congresos *Iberoamerican Conference on Topology and its Applications*, de la cual se han celebrado siete ediciones, bianualmente y alternativamente en España y en otros países: Benicàssim (1995), Morella (1997), Gandia (1999), Coimbra (2001), Lorca (2003), Puebla (2005) y Valencia (2008). Las actas de esos eventos han sido publicadas generalmente en la revista *Topology and its Applications*.

Si bien estas series de congresos, por su periodicidad, su magnitud y los destacados resultados de investigación recogidos en sus actas, merecen especial atención, hay que mencionar también otros importantes congresos celebrados en distintos lugares de España, principalmente organizados por la Universidad de Málaga: *Mini-Conference on Algebraic Topology* (1993) y *ATM03 Algebraic Topology in Malaga* (2003), por la Universidad Nacional de Educación a Distancia: *Congress on Computational Conformal Geometry and Riemann Surfaces* (1996), *Conference on Riemann Surfaces* (1998) y *Conformal Geometry, Discrete Groups and Surfaces* (2003), por

la Universitat Autònoma de Barcelona: *First Euro-Mediterranean Topology Meeting* (2000), por el Centre de Recerca Matemàtica: *Barcelona 2001 EuroPhD Topology Conference* (2001), y por la Universitat Jaume I: *22nd. Summer Conference on Topology and its Applications* (2007), amén de las sesiones especiales del *First AMS-RSME Meeting* (2003) y de los congresos satélite del *ICM 2006*.

ENCUENTROS DE TOPOLOGÍA

A partir de una iniciativa de Jaume Aguadé, se organiza en la Universitat Autònoma de Barcelona el primer *Encuentro de Topología*, con la finalidad de establecer un mayor contacto entre los diversos grupos de investigadores de esta disciplina en España. Esta actividad se ha consolidado como un punto de encuentro anual de los investigadores, con énfasis cada año en distintos campos de la topología, en función del grupo organizador. La sede del *Encuentro* ha sido itinerante y la organización ha recaído en los investigadores locales: Bellaterra (1993), Ávila (1994), Fuengirola (1995), Logroño (1996), Santiago de Compostela (1997), Palma de Mallorca (1999), El Escorial (2000), Pamplona (2001), Jaca (2002), Bilbao (2003), Barcelona (2004), Puerto de la Cruz (2005), Castro Urdiales (2006), Granada (2007) y Castelló de la Plana (2008).

Esta actividad fue el núcleo central para la creación de la *Red Española de Topología* (RET) en el año 2003, que en 2004 elaboró el *Libro blanco de la topología en España*. La RET, patrocinada por el Ministerio de Educación y Ciencia, se rige por un comité científico y ha sido coordinada sucesivamente por Manuel Castellet (UAB), Marta Macho-Stadler (UPV-EHU), Aniceto Murillo (UMA) y Francisco Romero (UCM).

LOS CURSOS AVANZADOS DEL CRM

El Centre de Recerca Matemàtica inició en el año 1995 su serie de *Cursos Avanzados*, el primero de ellos sobre *Elliptic Cohomology*. Desde entonces el CRM ha organizado, o ha participado en la organización de, siete de estos cursos en áreas de la topología, ofrecidos a la comunidad matemática internacional y orientados principalmente a estudiantes de doctorado en una fase avanzada y a jóvenes investigadores. Las temáticas tratadas han sido: *Elliptic Cohomology* (1995), *Homotopy Theory: Localization and Periodicity* (1996), *Classifying Spaces and Cohomology of Groups* (1998), *Proper Group Actions* (2001), *Geometric 3-Manifolds* (2002), *String Topology and Hochschild Cohomology: Applications to Mathematical Physics* (2003), éste en la Universidad de Almería, y *Simplicial Methods in Higher Categories* (2008).

Paralelamente, la Universidad de Málaga ha organizado los cursos *Rational Homotopy Theory* (1996) y *Localization and Operads: Learning About* (2000), y otras universidades han organizado cursos avanzados ofrecidos a una comunidad más reducida o de una menor extensión temporal.

La serie *Advanced Courses in Mathematics CRM Barcelona*, publicada por Birkhäuser Verlag, recoge en tres de sus volúmenes el contenido de los cursos de los años 1998, 2001 y 2003.

EL PROGRESO INDIVIDUAL Y DE LOS GRUPOS DE INVESTIGACIÓN

Puesto que nuestro objetivo no es el estudio exhaustivo del desarrollo de la topología en España, me ceñiré a analizar el progreso llevado a cabo a partir de la década de los 90, sin mencionar nombres propios de investigadores (recogidos ya en el *Libro blanco de la topología en España*).

El número total de investigadores españoles en topología, activos actualmente en investigación o participantes en actividades, puede cifrarse en unos 200, teniendo en cuenta las diferentes interacciones de la topología con el álgebra, la geometría algebraica, la geometría diferencial y los sistemas dinámicos, principalmente. La frontera es muy difícil de establecer, pero en la investigación de todos ellos hay un componente esencial de topología, bien en los objetivos propios del tema de investigación, bien en las técnicas utilizadas.

El *Libro blanco de la topología en España* [24], del año 2004, establece cinco grandes áreas de la topología en las que trabajan grupos de investigación españoles. Son:

- **Topología general** (UCM, UJI, UN, UPN, UPV, UPV-EHU): dualidad de grupos topológicos, grupos nucleares, dimensión topológica, topología no simétrica y álgebra topológica, topología borrosa.
- **Topología algebraica** (UAB, UB, UCM, ULR, UMA, US, USC): métodos cohomológicos en teoría de grupos, estructura local de grupos y espacios clasificadores, localización en teoría de homotopía, teoría de la forma, dinámica topológica, categorías de modelos, categoría *LS* de los grupos de Lie, álgebra homológica y homotópica, modelos algebraicos de tipos de homotopía, homotopía propia.
- **Topología de baja dimensión** (UAB, UAM, UC3M, UCM, UPC, UZ): homotopía de variedades simplécticas, estructuras geométricas de 3-variedades, curvas de caracteres de nudos, superficies de Riemann compactas, superficies de Belyi, acciones de grupos en complejos de dimensión baja.
- **Invariantes, laminaciones y foliaciones** (UAB, UPV-EHU, USC): análisis global, geometría, cohomología, categoría *LS* de foliaciones, foliaciones riemannianas singulares, laminaciones definidas por grafos y mosaicos.
- **Singularidades** (UB, UV, UZ): topología de variedades algebraicas, motivos mixtos, invariantes de aplicaciones, geometría genérica.

Entre paréntesis he indicado las universidades más activas en cada uno de esos campos. Remito al lector interesado a los excelentes artículos de Manuel Sanchis y Mikhail Tkatchenko, de Aniceto Murillo, de Joan Porti, de Fernando Alcalde y Marta Macho Stadler, y de Juan José Nuño, respectivamente [24].

INCISO EN LA POLÍTICA CIENTÍFICA ESPAÑOLA

En este apartado voy a insinuar brevemente una cuestión que no forma parte de la «historia de las ideas» que han estimulado el desarrollo de la topología, como es

el objeto de todo el artículo, sino más bien de la «historia política» de la topología en España.

La pregunta es fácil, pero la respuesta ya no lo es tanto: ¿Por qué existe en el ordenamiento español un área de conocimiento en la que uno de los sujetos es la topología? ¿Por qué el fenómeno no se da de manera análoga con disciplinas tales como la teoría de números, la geometría algebraica o las ecuaciones diferenciales, por citar unos ejemplos? O bien, ¿por qué en la primera mitad de la década de los setenta aparecen plazas de profesor agregado y de profesor adjunto de «álgebra y topología», primero, y de «topología», simplemente, más tarde?

Posiblemente, el primero de los hechos mencionados es consecuencia del segundo: una cierta masa crítica de catedráticos, agregados y adjuntos pudo presionar para que la topología fuera explícitamente mencionada en las áreas de conocimiento. Ahora bien, los motivos que justificaron la creación de tantas plazas de profesorado (hecho que, sin duda, influyó en el desarrollo de la topología en España), ¿fueron realmente científicos o más bien políticos, o simplemente llevados por una corriente que entonces «estaba de moda»?

EN DESCARGO DEL AUTOR

La objetividad que debe imperar en un artículo como el presente, objetividad que he intentado respetar escrupulosamente, podría verse salpicada puntualmente por aspectos o interpretaciones subjetivas derivadas de mi propia formación o del contexto de mi entorno científico más inmediato. Si así fuere, presento mis excusas a aquellos que no se sientan bien representados.

La limitación en el espacio (longitud del artículo) y en el tiempo (período que refleje esencialmente los inicios del desarrollo de la topología en España) han condicionado buena parte del contenido, pues, como ya he mencionado anteriormente, he preferido limitarme a un período del cual ya dispongamos de una cierta perspectiva histórica, con justificadas incursiones a épocas más recientes.

REFERENCIAS

- [1] J. AGUADÉ, *Fibracions d'esferes per esferes mod p*, tesis doctoral, UAB (1979).
- [2] F. ALCALDE, *Integración simpléctica de las variedades de Poisson Riemannianas*, tesis doctoral, USC (1990).
- [3] J. W. ALEXANDER, *A proof of the invariance of certain constants in Analysis situs*, Trans. Amer. Math. Soc. **16** (1915), 148–154.
- [4] J. W. ALEXANDER, *A proof and extension of the Jordan-Brouwer separation theorem*, Trans. Amer. Math. Soc. **23** (1922), 333–349.
- [5] J. W. ALEXANDER, *On the chains of a complex and their duals*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **21** (1935), 509–511.
- [6] J. W. ALEXANDER Y O. VEULEN, *Manifolds on n dimensions*, Ann. of Math. **14** (1913), 163–178.

- [7] P. ALEXANDROFF Y H. HOPF, *Topologie I*, Grundlehren der Math. Wissenschaften **45**, Springer Verlag, Berlin, 1935.
- [8] M. ALONSO MORÓN, *Teoría de la forma en el sentido de Fox*, tesis doctoral, UCM (1985).
- [9] J. ÁLVAREZ, *Sucesión espectral asociada a foliaciones Riemannianas*, tesis doctoral, USC (1987).
- [10] J. ARREGUI, *Homotopía y homología en los campos mecánicos*, tesis doctoral, UCM (1959).
- [11] E. ARTAL, *Monodromie complexe des singularités superisolées*, tesis doctoral, U. Genève (1991).
- [12] C. BROTO, *Caràcters lineals i fibracions esfèriques*, tesis doctoral, UAB (1988).
- [13] L. E. J. BROUWER, *Beweis der Invarianz der Dimensionzahl*, Math. Ann. **70** (1911), 161–165.
- [14] L. E. J. BROUWER, *Ueber Abbildungen von Mannigfaltigkeiten*, Math. Ann. **71** (1912), 97–115.
- [15] L. E. J. BROUWER, *Beweis des Jordanschen Satzes für den n -dimensionalen Raum*, Math. Ann. **71** (1912), 314–319 y 320–327.
- [16] E. BUJALANCE, *Sobre los subgrupos normales cristalográficos no euclídeos*, tesis doctoral, UCM (1979).
- [17] M. BULLEJOS, *Cohomología no abeliana (la sucesión exacta larga)*, tesis doctoral, UGR (1985).
- [18] G. CANTOR, *Notiz zu dem Aufsatz:...*, J. Reine Angew. Math. **73** (1871), 294–296.
- [19] G. CANTOR, *Gesammelte Abhandlungen*, Springer Verlag, Berlin, 1932.
- [20] G. CANTOR Y R. DEDEKIND, *Briefwechsel*, Act. Sci. Ind. **518**, Hermann, Paris, 1937.
- [21] E. CARTAN, *La topologie des groupes de Lie*, Act. Sci. Ind. **358**, Hermann, Paris, 1936.
- [22] C. CASACUBERTA, *Espais topològics amb accions P -locals*, tesis doctoral, UAB (1988).
- [23] M. CASTELLET, *Grupos finitos con cohomología periódica y espacios que admiten recubrimientos esféricos*, tesis doctoral, UB (1973).
- [24] M. CASTELLET, L. J. HERNÁNDEZ Y J. PORTI (EDITORES), *Libro blanco de la topología en España*, Red Española de Topología, Barcelona, 2004.
- [25] M. J. CHASCO, *Sucesiones en la geometría afín de un espacio de Banach*, tesis doctoral, UZ (1985).
- [26] A. COSTA, *Representación de 3-variedades mediante cubiertas*, tesis doctoral, UCM (1984).
- [27] E. DOMÍNGUEZ, *Sobre una interpretación geométrica de la co-homología*, tesis doctoral, UZ (1974).
- [28] B. ECKMANN, *Ueber die Homotopiegruppen von Gruppenräumen*, Comment. Math. Helv. **14** (1942), 234–256.

- [29] CH. EHRESMANN, *Sur la topologie des groupes simples clos*, C. R. Acad. Sci. Paris **200**, **201** (1935) y **208** (1939).
- [30] L. EULER, *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*, Comment. Acad. Sci. Petrop. **8** (1736), 128–140.
- [31] L. EULER, *Demonstratio nonnularum insignium proprietatum. . .*, Novi Comment. Acad. Sci. Petrop. **4** (1752), 140–160.
- [32] A. GÓMEZ-TATO, *Modelos minimales para la cohomología torcida*, tesis doctoral, USC (1986).
- [33] F. GÓMEZ RUIZ, *Cohomology Theory for Networks and a Residue Formula for Characteristic Classes*, tesis doctoral, U. Toronto (1978).
- [34] V. GREGORI, *Sobre estructuras topológicas no simétricas*, tesis doctoral, UV (1985).
- [35] S. HERNÁNDEZ, *Álgebras de funciones reales continuas*, tesis doctoral, UV (1983).
- [36] L. J. HERNÁNDEZ PARICIO, *Un ejemplo de teoría de homotopía en los grupos abelianos*, tesis doctoral, UZ (1980).
- [37] H. HOPF, *Abbildungen geschlossener Mannigfaltigkeiten auf Kugeln in n -Dimensionen*, Jahresbericht DMV **34** (1926), 130–133.
- [38] H. HOPF, *Ein topologischer Beitrag zur reellen Algebra*, Comment. Math. Helv. **13** (1940), 219–239.
- [39] W. HUREWICZ, *Beiträge zur Topologie der Deformationen, I–IV*, Proc. Akad. Amsterdam **38** (1935), 112–119, 521–528, y **39** (1936), 117–126, 215–224.
- [40] M. IZQUIERDO, *Estudio de subgrupos de grupos de calidoscopios no euclídeos que son grupos de superficies*, tesis doctoral, UZ (1990).
- [41] J. B. LISTING, *Vorstudien zur Topologie*, Göttinger Studien, Göttingen, 1847.
- [42] M. T. LOZANO, *Una sucesión espectral de teoría K* , tesis doctoral, UZ (1974).
- [43] M. MACHO STADLER, *Conjectura de Baum-Connes y foliaciones casi sin holonomía*, tesis doctoral, USC (1996).
- [44] E. MACÍAS, *Discrete, Continuous and Smooth Cohomologies of a Foliated Manifold*, tesis doctoral, USC (1983).
- [45] E. MARTÍN PEINADOR, *La sumabilidad absoluta en los operadores lineales acotados del espacio de Hilbert*, tesis doctoral, UZ (1977).
- [46] A. MARTÍNEZ CEGARRA, *Cohomología Varietal*, tesis doctoral, UGR (1980).
- [47] X. MASA, *Sucesión espectral de cohomología asociada a foliaciones. Aplicaciones*, tesis doctoral, USC (1973).
- [48] J. M. MONTESINOS, *Sobre la conjetura de Poincaré y los recubridores ramificados sobre un nudo*, tesis doctoral, UCM (1971).
- [49] A. MURILLO, *Espacios con aplicación evaluación no trivial*, tesis doctoral, UMA (1989).
- [50] J. L. NAVARRO, *Existencia y clasificación de co- H -estructuras*, tesis doctoral, UZ (1979).

- [51] E. OUTERELO, *Varietades topológicas generalizadas*, tesis doctoral, UCM (1967).
- [52] A. PLANS, *Contribuciones al estudio de los grupos de homología de los recubridores cíclicos ramificados correspondientes a un nudo*, Revista Acad. Ci. Madrid **47** (1953).
- [53] H. POINCARÉ, *Analysis situs*, J. École Polytech. **1** (1895), 1–121.
- [54] H. POINCARÉ, *Complément à l'Analysis situs*, Rend. Circ. Mat. Palermo **13** (1899), 285–333.
- [55] H. POINCARÉ, *Sur les nombres de Betti*, C. R. Acad. Sci. Paris **128** (1899), 629–630.
- [56] H. POINCARÉ, *Second complément à l'Analysis situs*, Proc. London Math. Soc. **32** (1900), 277–308.
- [57] H. POINCARÉ, *Cinquième complément à l'Analysis situs*, Rend. Circ. Mat. Palermo **18** (1904), 45–110.
- [58] L. PONTRJAGIN, *The general topological theorem of duality for closed sets*, Ann. of Math. **35** (1934), 904–914.
- [59] J. PORTI, *Torsion de Reidemeister pour les variétés hyperboliques*, tesis doctoral, U. Toulouse (1994).
- [60] M. A. DE PRADA, *Estructuras foliadas y casi foliadas. Prolongación al fibrado tangente*, tesis doctoral, USC (1973).
- [61] B. RIEMANN, *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse*, Inaugural Dissertation, Göttingen, 1851.
- [62] J. L. RODRÍGUEZ, *On Homotopy Colimits of Spaces with a Single Homology or Homotopy Group*, tesis doctoral, UAB (1997).
- [63] J. M. RODRÍGUEZ SANJURJO, *Sobre el tipo fundamental de homotopía*, tesis doctoral, UCM (1978).
- [64] S. ROMAGUERA, *On Pairwise Normality and Quasi-metrizability of Bitopological Spaces*, tesis doctoral, UV (1981).
- [65] F. ROMERO RUIZ DEL PORTAL, *Teoría del grado topológico generalizado y aplicaciones*, tesis doctoral, UCM (1990).
- [66] M. SANCHIS, *Producto de espacios funcionalmente generados por familias de conjuntos acotados*, tesis doctoral, UV (1990).
- [67] L. SCHLÄFLI, *Vielfache Kontinuität*, Denkschrift. Schweiz. Natur. Gesellschaft, Bern, 1901.
- [68] H. SEIFERT Y W. THRELFALL, *Lehrbuch der Topologie*, Teubner, Berlin, 1934.
- [69] N. E. STEENROD, *The classification of sphere bundles*, Ann. of Math. **45** (1944), 294–311.
- [70] E. STIEFEL, *Richtungsfelder und Fernparallelismus un n -dimensionalen Mannigfaltigkeiten*, Comment. Math. Helv. **8** (1936), 305–353.
- [71] J. TARRÉS, *Topología propia de sistemas semidinámicos*, tesis doctoral, UCM (1979).

- [72] A. VIRUEL, *Homotopy uniqueness of classifying spaces of compact Lie groups*, tesis doctoral, UAB (1996).
- [73] J. H. C. WHITEHEAD, *On the groups $\pi_r(V_{nm})$ and sphere bundles*, Proc. London Math. Soc. **48** (1944), 243–291.
- [74] H. WHITNEY, *Sphere spaces*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **21** (1935), 464–468.
- [75] H. WHITNEY, *Topological properties of differentiable manifolds*, Bull. Amer. Math. Soc. **43** (1937), 785–805.

MANUEL CASTELLET, DEPARTAMENT DE MATEMÀTIQUES, UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA
Correo electrónico: Manuel.Castellet@uab.cat