La enseñanza de los números negativos: formalismo y significado

por

Alicia Bruno

Introducción

La enseñanza de los números negativos presenta dificultades para muchos estudiantes de secundaria. Esta afirmación no debería sorprender, pues, a fin de cuentas, muchos matemáticos a lo largo de la historia se resistieron a utilizarlos. Los negativos han sufrido un largo y complejo proceso de aceptación hasta ser considerados como números en la misma forma que lo eran los naturales y los racionales no negativos. De hecho, su incorporación a los sistemas numéricos se retrasó hasta el siglo XIX, cuando Hankel los introdujo de manera formal. Una de las principales razones de estos hechos se encuentra en la necesidad que tenían los matemáticos de asignar significados concretos a los números y a las operaciones con ellos: ¿puede existir algo menor que la nada?, ¿por qué "menos por menos es más"? ...

Desde un punto de vista didáctico, también importantes matemáticos han manifestado las dificultades que encontraron al enseñar estos números. La cita de Felix Klein de 1925 (en Thomaidis, 1993) es una buena muestra de ello:

> Comprendamos, sin embargo, de una vez y categóricamente, lo extremadamente difícil que es, en principio, el paso que se realiza en la escuela cuando se introducen los números negativos. Los números, y posteriormente las letras, con los que operaba el alumno, así como los resultados que obtenía de estas operaciones, los representaba visualmente con objetos concretos, pero esto ahora le resulta bastante diferente. Tiene que tratar con algo nuevo, los "números negativos", que, en primera instancia, nada tienen en común con su imagen de número de cosas, pero debe operar con ellos como si lo tuvieran, aunque las operaciones tengan gráficamente un significado mucho menos claro que las anteriores. Aquí, por primera vez, nos encontramos con el paso de las matemáticas concretas a las formales. El dominio total de esta transición requiere un alto nivel de capacidad de abstracción.

El inicio de la enseñanza de los números negativos con alumnos de 12 o 13 años (edad en la que suele realizarse) supone la modificación de ideas fuertemente arraigadas y construidas a lo largo de toda la enseñanza primaria e, incluso, antes. Por ejemplo, los significados más familiares de los números positivos y de las operaciones con ellos conducen a que los alumnos tengan la idea de que no existen números menores que cero, y la de que la suma y el producto de dos números es un número mayor. También, al introducir los números negativos se produce la identificación de las operaciones suma y resta; esto es, sumar (restar) un número es lo mismo que restar (sumar) su opuesto. Además, surgen nuevas reglas operatorias, como la de los signos para el producto. Añadamos a todo ello los cambios que se producen en la simbología ($+a = a$) o las reglas de los paréntesis. Estas novedades con relación al conocimiento sobre los números positivos que ya tienen los alumnos son la causa de las dificultades y obstáculos que surgen en el aprendizaje de los números negativos.

Küchemann (1981) señala, en una investigación realizada en Inglaterra sobre el conocimiento de los estudiantes de secundaria (en el marco del proyecto *Concepts in Secondary Mathematics and Science*), que menos de la mitad de los estudiantes encuestados de 14 años dieron una respuesta correcta a operaciones como $-2 - (-5)$ ó $-6 - (+3)$. También observó que obtienen mejores resultados en la multiplicación y división de los negativos que en la resta, quizás porque la regla operatoria del producto es más sencilla. En este artículo se presentan algunas consideraciones sobre la enseñanza-aprendizaje de los números negativos. Las ideas que se exponen se sitúan en una concepción de la enseñanza-aprendizaje de los números y se apoyan en las investigaciones realizadas, tanto por otros autores como propias. La amplitud del tema y lo parcial de nuestro trabajo hacen que sólo nos refiramos a parte de los problemas didácticos que podrían abordarse.

Los números negativos como parte del conocimiento numérico

Buena parte de los alumnos terminan su aprendizaje escolar obligatorio con ideas confusas sobre los números. Se trata de un hecho bien conocido por los profesores de los últimos cursos de la educación secundaria y de los primeros años de la universidad. También Robinet (1986) y Fischbein (1994) han puesto de manifiesto esta situación en sus investigaciones didácticas. Concretamente, los alumnos manifiestan, entre otros aspectos, poca claridad en las relaciones de los diferentes sistemas numéricos (naturales, enteros, racionales, irracionales, reales), en las distintas formas de escribir un racional ($1/2 = 0.5$), en la escritura decimal de los reales, en la identificación de los reales con la recta o en la densidad de los racionales en los reales. A pesar de ello, la experiencia docente en los cursos preuniversitarios nos indica que los alumnos utilizan con un cierto grado de precisión la operatoria en cada uno de esos sistemas.

Como queda dicho, no suele establecerse correctamente la relación entre los diferentes sistemas numéricos. Habrá mucho que investigar y discutir, pero pensamos que una visión unitaria de su enseñanza contribuiría a establecer las correctas relaciones entre ellos, de manera que el nuevo conocimiento suponga una ampliación del antiguo y que el antiguo se integre en el nuevo. A tal fin, en el proceso de enseñanza-aprendizaje deben utilizarse elementos que contribuyan a esa integración. Tener esa visión unitaria es especialmente importante en los momentos en que se introducen nuevos tipos de números, es decir, al realizar las *extensiones numéricas*. Concretamos estas ideas a continuación.

Alrededor del concepto de número hay una amplia constelación de ideas que agrupamos en tres dimensiones. Por un lado tenemos las ideas más abstractas: propiedades, símbolos, reglas operatorias . . . . Por otro, nos encontramos con las representaciones de carácter gráfico, muy especialmente la recta. Por último, están las situaciones reales y problemas contextualizados que se modelizan mediante números y operaciones con ellos.

Los sistemas numéricos tienen diferencias y semejanzas en cada una de las tres dimensiones anteriores: con respecto a las ideas abstractas, a los gráficos y a los contextos. Cuando se realiza una extensión numérica hay aspectos que permanecen comunes en cada una de estas dimensiones. Por ejemplo, en la dimensión abstracta, al realizar una extensión aparecen reglas operatorias que conservan las mismas propiedades (conmutativa, asociativa, distributiva ...) que las del sistema inicial. En cuanto a los gráficos, la recta es la representación común a todos los sistemas numéricos y sirve de hilo conductor entre ellos. En el plano contextual cabe hacer la siguiente observación: cualquier número natural puede ser usado para expresar un cardinal y una temperatura, pero hay números reales que no son adecuados para expresar un cardinal, aunque sí una temperatura; así pues, al ampliar un conjunto numérico se reduce la clase de situaciones en las que se aplican todos los números del nuevo sistema. Si en la enseñanza de los números se pusiera más énfasis que ahora en los aspectos abstractos, gráficos y contextuales comunes a los distintos sistemas de números, los alumnos construirían una visión más integrada de los mismos.

Secuencia de extensiones

Los alumnos inician el aprendizaje numérico en el sistema de los números enteros no negativos $\mathbb{Z}_+$ y concluyen con el de los números reales $\mathbb{R}$. Hay varios caminos o secuencias de extensiones que pueden seguirse:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}_+ \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Q}_+ \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{R}_+ \arrow[d] \\ \mathbb{Z} \arrow[r] & \mathbb{Q} \arrow[r] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

La secuencia influirá en el conocimiento que adquieran los estudiantes. La que se ha seguido en España es la siguiente:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}_+ \arrow[r, "1"] \arrow[d, "2"'] & \mathbb{Q}_+ \arrow[d, "3"'] & \\ \mathbb{Z} \arrow[r, "3"] & \mathbb{Q} \arrow[r, "4"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

donde 1, 2, 3 y 4 indica el orden en que se realiza cada extensión numérica. Es decir, primero se realiza la extensión $\mathbb{Z}_+ \longrightarrow \mathbb{Q}_+$, la segunda extensión es $\mathbb{Z}_+ \longrightarrow \mathbb{Z}$ y, más tarde, la $\mathbb{Q}_+ \longrightarrow \mathbb{Q}$ o bien la $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$. De este modo se produce una discontinuidad en el momento de introducir los números negativos. Pese a que los alumnos conocen el conjunto $\mathbb{Q}_+$ de los racionales no negativos, la segunda ampliación que se estudia no es $\mathbb{Q}_+ \longrightarrow \mathbb{Q}$, sino $\mathbb{Z}_+ \longrightarrow \mathbb{Z}$, lo que obliga a los alumnos al abandono de sus conocimientos sobre los racionales.

Realmente pensamos que seguir secuencias que avancen hacia $\mathbb{R}$, sin retrocesos como este que acabamos de comentar, facilitaría el establecimiento de las conexiones entre los sistemas numéricos. Hacerlo así implica seguir alguna de las siguientes secuencias:

$$
\begin{array}{lllllll}
(1) & \mathbb{Z}_+ & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Q} & \longrightarrow \mathbb{R} \\[2ex]
(2) & \mathbb{Z}_+ & \longrightarrow & \mathbb{Q}_+ & \longrightarrow & \mathbb{Q} & \longrightarrow \mathbb{R} \\[2ex]
(3) & \mathbb{Z}_+ & \longrightarrow & \mathbb{Q}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow \mathbb{R}
\end{array}
$$

Obsérvese que estas secuencias llevan a modificar la extensión usual a los negativos (secuencias 2 y 3) o el momento escolar en que se produce (secuencia 1).

Seguir la secuencia (1) supondría el estudio en la educación primaria de los números negativos y de los racionales, ya que no estudiar estos últimos números en ese nivel supondría ignorar sus utilidades, tan necesarias para la mayoría de los ciudadanos. Así pues, sería necesario adelantar la edad en la que se enseñan los números negativos. Hay investigaciones que han analizado la capacidad de los alumnos para comprender determinados aspectos de estos números desde los primeros años de la educación primaria y han concluido que el concepto de número negativo es fácilmente asimilable, así como el de algunas adiciones simples, pero es complejo introducir la resta y la multiplicación, hasta el punto de que es necesario retrasar el estudio de estas dos operaciones a etapas posteriores [Galbraith, 1974; Murray, 1985]. Por tanto, resulta poco factible la secuencia (1).

En nuestra investigación [Bruno y Martinón, 1996a] planteamos si era posible realizar la extensión (3), manteniendo el momento actual de introducir los números negativos. Esto supone introducir los números irracionales con 12-13 años. Evidentemente es complejo que alumnos de estas edades adquieran el concepto de número irracional. Planteamos entonces que los alumnos conocieran de manera intuitiva los números irracionales, apoyándonos en la idea de que llenan la recta y que posteriormente trabajaran los negativos. Concluimos que, en general, es posible realizar la ampliación numérica con aquellos números negativos que son los opuestos de los positivos que conocen los alumnos en el momento de realizar la extensión (que son los de $\mathbb{Q}_+$ y puede que algunos irracionales, como π o $\sqrt{2}$), con lo cual, sí parece viable seguir la secuencia (2).

Formas de realizar la extensión a los negativos

También influye en el conocimiento numérico la forma en que se introducen o se presentan por primera vez a los estudiantes los nuevos números. Veamos a continuación distintas formas de introducir los números negativos.

Muchos podemos recordar, bien porque nos tocó vivirlo como alumnos o bien enseñarlo como profesores, cómo en la etapa de las 'matemáticas modernas' los números negativos se introducían utilizando pares ordenados de números naturales y considerando la relación de equivalencia

$$(a, b) \approx (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c\,.$$

De esta forma, el conjunto de los enteros $\mathbb{Z}$ se define como el conjunto cociente $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \backslash \approx$. Sobra comentar que este procedimiento, debido a su elevado grado de abstracción, poco caló en el conocimiento de los alumnos de 12-13 años.

En la actualidad, casi siempre se pasa de $\mathbb{Z}_+$ a $\mathbb{Z}$ definiendo $\mathbb{Z}$ como los números naturales con signo (positivo y negativo), es decir,

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \ldots\}\,;$$

más tarde se indica que el sistema de los enteros positivos es isomorfo a los naturales.

Las dos formas anteriores de introducir los negativos implican la creación de entes nuevos. Desde nuestro punto de vista, la presentación a los alumnos de los números enteros positivos con una escritura y una denominación diferentes a las que ya conocían (antes: $1, 2, 3 \ldots$, naturales; ahora: $+1, +2, +3 \ldots$, enteros positivos) conduce a que sea muy difícil la consideración del antiguo sistema numérico como parte del nuevo y, lo que es más grave, la integración del anterior conocimiento numérico con el que ahora se le presenta, de manera que se construyen imágenes inconexas de los diferentes sistemas de números. La figura 1 representa las dos primeras extensiones que realizan los alumnos y es habitual, como ya se ha dicho, que no establezcan el isomorfismo entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}_+$, o no relacionen los enteros con los racionales.

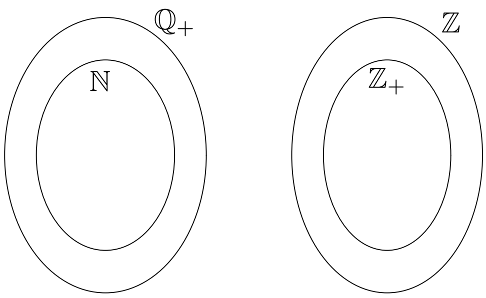

figura 1

La siguiente anécdota ilustra hasta qué punto a los alumnos les cuesta relacionar los sistemas numéricos. Una profesora de educación secundaria, tal como hacía el libro de texto, presentó la extensión a los negativos definiendo $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \ldots\}$; ante un ejercicio en el que se pedía dibujar unos ejes coordenados y representar los puntos $(+4, +3)$, $(-4, -2)$, $(-1, +8)$, $(1, 3)$, un alumno dijo "el $(1, 3)$ no lo puedo representar porque no lo hemos estudiado".

Desde nuestro punto de vista, sería más acertado presentar los números negativos por *adjunción*; es decir, a los números positivos que ya se conocen se añaden sus opuestos, a través de la correspondiente notación ($-1, -2, -3...$) y usando su representación en la recta a la izquierda (o por debajo) de cero.

Modelos de enseñanza de los números negativos

La preocupación por mejorar la enseñanza-aprendizaje de los números negativos se ha manifestado en la publicación de numerosos trabajos en los que se presentan modelos (manipulativos y/o gráficos), así como aproximaciones didácticas con las que dar sentido a estos números y sus operaciones.

Siguiendo la terminología presentada por Janvier (1983), la mayoría de los modelos que podemos encontrar responden al *modelo del equilibrio* o al *modelo de la recta.*

El trasfondo del *modelo del equilibrio* es la construcción de los números enteros como pares ordenados de números positivos, aunque, en realidad, su uso no implica escribir los números negativos como pares ordenados. Los números enteros (positivos y negativos) se representan con fichas de dos colores diferentes, por ejemplo blancas y negras. Si las fichas negras representan lo negativo y las blancas lo positivo, el número -1 puede representarse como cualquier combinación de fichas en las que las negras superen a las blancas en una, como por ejemplo

● o bien ● ● ○ o bien ● ● ● ○ ○

La idea básica del modelo es que una ficha blanca y una negra se anulan y representan el cero (●○ representa el 0). A partir de esto se definen las distintas operaciones: la suma se define como "combinar" o "unir" las fichas, la resta como "quitar" y la multiplicación como una suma repetida.

Cuando se usa el *modelo de la recta* los números son, al mismo tiempo, posiciones sobre la recta y desplazamientos sobre ella. La adición en este modelo puede ser la combinación de dos desplazamientos o el desplazamiento de una posición a otra. En la resta "sumar el opuesto" puede ser "hacer el desplazamiento en sentido opuesto" o bien la diferencia entre dos posiciones. La multiplicación se define como suma repetida de movimientos.

Se pueden encontrar investigaciones que han contrastado estos modelos, mostrando las ventajas e inconvenientes de ellos, sin que se haya llegado a un consenso sobre el más adecuado para la enseñanza, aunque todas las investigaciones coinciden en que, en los dos tipos de modelos, las mayores dificultades se encuentran en la resta, para los casos $a - (-b)$, y en la justificación de "menos por menos es más".

Importantes investigadores en didáctica de las matemáticas, como Fischbein (1987), piensan que la enseñanza de los números negativos debería ser abordada desde el principio de una manera formal, dado que no existe un modelo adecuado. Fischbein opina que no existe ningún modelo que sea intuitivo y que al mismo tiempo satisfaga todas las propiedades de los números negativos. Sin embargo, pensamos nosotros, la enseñanza formal de los números negativos evita que muchos estudiantes comprendan la operatoria, con lo cual se hace necesario seguir indagando sobre los modelos o los métodos de enseñanza diferentes al puramente formal.

En ese sentido, coincidimos con Bell (1986) al defender que la enseñanza de los números negativos debe llevar a los estudiantes a establecer lazos con la realidad, lo mismo que los números positivos que ya conocían. Desde esta perspectiva, nos parece que el modelo de la recta es más adecuado, ya que puede ser utilizado en situaciones cotidianas en las que se usan los números negativos (ascensor, temperatura, nivel del mar ...) y resulta adecuado para la enseñanza de los racionales y los reales, y no sólo de los enteros. Además, la recta integra el conocimiento previo de los estudiantes y facilita el aprendizaje de las posteriores extensiones numéricas. Es por eso que nuestras principales investigaciones han estado centradas en trabajos de aula con alumnos de 12-13 años de edad a los que hemos presentado los números negativos a través de situaciones reales que eran visualizadas sobre la recta.

En nuestras investigaciones, antes de introducir a los alumnos en el trabajo con números negativos, indagamos sobre su conocimiento acerca de las representaciones de los positivos en la recta. En una prueba escrita pasada a estudiantes de tres colegios diferentes en las que se les pedía representar en la recta operaciones con números positivos, pudimos comprobar que el uso de la recta era casi desconocido. Muchos alumnos manifestaron dificultad para representar los números en forma decimal y fraccionaria, y al pedirles que representaran en la recta operaciones sencillas como $4 + 7 = 11$ o $8 - 3 = 5$, encontramos respuestas en las que se representaban los números con tres puntos sin relación entre ellos, lo que demostraba que no tenían comprensión del modelo de la recta [Bruno y Martinón, 1994].

Esta poca familiaridad con las representaciones de los números positivos en la recta influye, evidentemente, en las representaciones de los negativos. Nuestras conclusiones indican que la recta necesita un trabajo directo en el aula y que no es un modelo sencillo que los alumnos usen de forma espontánea. Por otro lado, hemos constatado que se consigue mayor comprensión en las representaciones en la recta si se asocian a situaciones reales.

La resolución de problemas y la operatoria de los números

La enseñanza de los números negativos a través de la resolución de problemas es un enfoque que tiene varios puntos en común con el modelo de la recta, concretamente la justificación de las reglas operatorias. Obsérvense los siguientes problemas aditivos, similares a los que suelen figurar en los textos escolares:

a) *Si una persona tiene 8 pesetas y debe 11 pesetas. ¿Cuál es su situación económica?*

b) *Una persona nació en el año 123 antes de Cristo y vivió 65 años. ¿En qué año murió?*

c) *La temperatura en Madrid es de 5 grados sobre cero, en París hay 9 grados menos que en Madrid. ¿Cuál es la temperatura en París?*

d) *Un avión descendió 600 metros para huir de una tormenta y posteriormente subió 350 metros. ¿Cómo cambió la posición del avión con respecto a la que tenía antes de estos dos movimientos?*

Lo primero que cabe pensar es que los cuatro problemas anteriores pueden resolverse usando números positivos. Es cierto, pero también podemos plantear en todos ellos una suma o resta en la que estén implicados números negativos. Este hecho nos lleva a defender una enseñanza donde se utilicen este tipo de problemas. Por un lado, los estudiantes pueden resolverlos con lo que ya conocen y son problemas análogos (en cuanto a su estructura) a los que realizaron durante la enseñanza primaria, salvo que ahora los contextos suelen ser novedosos, con lo cual no se produce una ruptura con el conocimiento numérico anterior. Además, son problemas que admiten una representación en la recta.

Por último, aunque no ha sido objeto de nuestra investigación, utilizando los mismos contextos podemos plantear situaciones de multiplicación, de manera que no se produce una ruptura entre los dos tipos de operaciones. Así, la multiplicación y la división pueden ser contextualizadas en situaciones concretas a través de problemas con la estructura

$$\textit{variación por unidad de tiempo} \times \textit{tiempo} = \textit{variación total}$$

El tiempo futuro es denotado por un valor positivo y el tiempo pasado por un valor negativo. La variación por unidad de tiempo es lo que se gana o pierde en una día. Veamos un ejemplo en el contexto deber-tener.

- *Si una persona gana 4 pesetas diarias, dentro de 3 días tendrá 12 pesetas más que hoy:* $4 \times 3 = 12$
- *Si una persona gana 4 pesetas diarias, hace 3 días tenía 12 pesetas menos que hoy:* $4 \times (-3) = -12$
- *Si una persona pierde 4 pesetas diarias, dentro de 3 días tendrá 12 pesetas menos que hoy:* $-4 \times 3 = -12$
- *Si una persona pierde 4 pesetas diarias, hace 3 días tenía 12 pesetas más que hoy:* $-4 \times (-3) = 12$

¿Cómo llevar a cabo una enseñanza que utilice estos problemas de forma que se utilicen para comprender las reglas operatorias con los números negativos? En nuestras investigaciones hemos utilizado problemas de esta clase para que los estudiantes lleguen a deducir las reglas operatorias y encuentren la justificación y den sentido a los resultados. Queremos insistir que no se trata de presentar los problemas como *aplicaciones* después de estudiar las reglas, como suele hacerse en la mayoría de las propuestas curriculares, sino utilizarlos para la búsqueda de significados para las operaciones y para deducir las reglas, de tal forma que contribuyan a la adquisición de una mayor comprensión numérica.

Tipos y características de los problemas aditivos

Aunque los cuatro problemas aditivos presentados anteriormente puedan parecer similares (todos responden a un esquema $x + y = z$), la realidad es que existen diferencias entre ellos. Analizamos a continuación las principales características de los problemas aditivos.

(1) *Estructura*. Una lectura atenta de los enunciados de los problemas permite distinguir varios tipos de sentencias que figuran en él. Podemos encontrar *estados* (tiene 8 pesetas), *variaciones* (vivió 65 años) y *comparaciones* (en París hay 9 grados menos que en Madrid).

Atendiendo a esos tipos de sentencias, vamos a distinguir (en este artículo) cuatro estructuras diferentes. Siguiendo la nomenclatura que hemos usado en Bruno y Martinón (1997a), el problema a) se denomina de *combinación de estados*, porque hay dos estados parciales y un estado total; el problema b) es de *variación de un estado*, porque tenemos un estado inicial, se produce un cambio o variación y se alcanza un estado final; el problema c) es de *comparación de estados*, porque hay dos estados y la comparación de ambos; y, por el último, el problema d) es un problema de *combinación de variaciones sucesivas*, porque hay dos variaciones o cambios sucesivos y la variación total.

(2) *Posición de la incógnita*. Hemos de tener en cuenta que una cierta situación aditiva da lugar a varios problemas, según cuál sea la incógnita. Por ejemplo, a partir de la situación

- La temperatura en Madrid por la mañana era de 5 grados sobre cero, a lo largo del día bajó 7 grados, hasta llegar a los 2 grados bajo cero por la noche

obtenemos los tres problemas siguientes:

- La temperatura en Madrid por la mañana era de 5 grados sobre cero, a lo largo del día bajó 7 grados. ¿Cuál era la temperatura en Madrid por la noche?

- La temperatura en Madrid por la mañana era de 5 grados sobre cero, y por la noche era de 2 grados bajo cero ¿Qué ocurrió con la temperatura a lo largo del día?

- La temperatura en Madrid bajó 7 grados a lo largo del día, por la noche había 2 grados bajo cero. ¿Qué temperatura había en Madrid por la mañana?

(3) *Tipos de números.* También resulta relevante en un problema el tipo de números que se utilice (enteros, decimales...) y el signo que tengan (positivo + negativo = negativo, positivo - negativo = positivo, negativo ± negativo = negativo ...).

(4) *Contexto.* Otra característica de los problemas que resulta ser influyente es el contexto, los más usuales en la enseñanza de los negativos son: deber-tener (dinero), cronología, temperatura, nivel del mar o ascensor.

LA INVESTIGACIÓN SOBRE LOS PROBLEMAS ADITIVOS

En este apartado resumimos algunas de las investigaciones realizadas sobre los problemas aditivos que pueden resolverse usando números negativos.

Las investigaciones sobre estos problemas son muy fragmentarias, habiéndose centrado sólo en algunas de las variables posibles (estructura, posición de la incógnita, contexto, tipos de números ...) y no existe un cuerpo de conocimiento sobre el que elaborar y justificar las propuestas curriculares que tengan como base estos problemas.

Exponemos algunos resultados de las investigaciones que muestran cómo problemas aparentemente similares son completamente distintos para los alumnos, en cuanto a la dificultad y al procedimiento de resolución que emplean. La dificultad depende de las variables ya comentadas: estructura, posición de la incógnita, tipos de números o contexto.

Vergnaud y Durand (1976), en un trabajo realizado con alumnos de primaria, observaron que los problemas de combinación de variaciones sucesivas son más complejos que los de variación de un estado en todos los casos, cuando los problemas se enuncian en un contexto de deber-tener.

En Bruno y Martinón (1997b) concluimos que, en general, aunque la estructura del problema condiciona la dificultad, es más importante la influencia de la incógnita.

Marthe (1979) realizó un estudio sobre los signos de los números, observando que en los problemas de combinación de variaciones, cuando las dos variaciones tienen signos opuestos son más complejos que cuando tiene el mismo signo.

Aunque el contexto del enunciado es un factor menos determinante en la dificultad que la estructura [Bell, 1986], también puede producir, en algunos casos, diferencias en el éxito. Por ejemplo, el contexto cronología produce mayor fracaso que otros. Por otro lado, el contexto deber-tener lleva a más éxito en la resolución por ser de más fácil comprensión, lo que indica que es un contexto adecuado para iniciar el estudio de estos números [Bruno y Martinón, 1997b].

Hemos analizado los procedimientos de resolución, encontrando que los alumnos resuelven estos problemas con una operación (con números positivos o negativos) y/o mediante una representación en la recta. Hay dos hechos que parecen claros en cuanto a los procedimientos: por un lado, dependen del contexto y de la dificultad del problema, y por otro dependen del alumno que lo resuelva.

Para la mayoría de los alumnos los contextos deber-tener y cronología inducen a un menor uso de la recta que los otros contextos.

También hemos comprobado que hay alumnos que tienen tendencia hacia el uso de la recta como apoyo para encontrar la solución y la operación adecuada con números negativos, mientras que otros no manifiestan esa tendencia. En general, los alumnos tienen más seguridad en los resultados que obtienen en la recta que en los que obtienen a través de una operación.

Para muchos alumnos hay problemas aditivos especialmente difíciles, y no consiguen encontrar una operación adecuada con números negativos que resuelva el problema. Se hace necesario, por lo tanto, buscar métodos de enseñanza que ayuden a establecer relaciones entre el conocimiento abstracto y las situaciones contextualizadas.

Conclusiones

En estas líneas hemos pretendido situar al lector en la enseñanza de los números negativos. Las ideas que aquí hemos presentado, como ya se comentó al principio, forman parte de la visión que tenemos de la enseñanza de los números en general y están relacionadas con los aspectos que hemos investigado.

Queda mucho por averiguar sobre la enseñanza de los números negativos. Desde nuestro punto de vista, son necesarias nuevas investigaciones para determinar formas más eficaces de enseñanza que permitan a los alumnos modelizar situaciones simples mediante el uso de números negativos; es decir, que los alumnos trasladen situaciones contextualizadas y gráficas a la dimensión abstracta y operen correctamente en ella.

En la sección anterior ha quedado patente que las investigaciones sobre la resolución de problemas aditivos con números negativos han dejado sin responder algunos interrogantes. Se necesitan estudios que establezcan con claridad las diferencias de dificultad, así como los distintos procedimientos de resolución de los problemas teniendo en cuenta las variables más relevantes de los mismos. Ello daría mucha luz sobre el diseño de material curricular para llevar a cabo una enseñanza que utilice estos problemas. Necesitamos profundizar en los procedimientos de resolución, especialmente con los problemas de *comparación*, que han sido obviados en muchas investigaciones.

Por último, pocas investigaciones se han referido a los números negativos en la etapa posterior a la introducción, es decir, una vez que las operaciones simples están asimiladas o cuando aparecen en otros campos de las matemáticas. En ese caso, los problemas de investigación deberían centrarse en operaciones múltiples, en cuestiones de sintaxis, simbología y notación (signos, uso de paréntesis, reglas, etc.) y en el papel de los negativos en el álgebra.

BIBLIOGRAFÍA

BELL, A.: 1986, Enseñanza por diagnóstico. Algunos problemas sobre números enteros, *Enseñanza de las Ciencias*, **4**(3), 199-208.

BRUNO, A., MARTINÓN, A.: 1994, La recta en el aprendizaje de los números negativos, *Suma*, **18**, 39-48.

BRUNO, A., MARTINÓN, A.: 1996a, Beginning the learning of negative numbers, *Proceedings of the XX Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, Valencia, pp. 161-168.

BRUNO, A., MARTINÓN, A.: 1997a, Clasificación funcional y semántica de problemas aditivos, *Educación Matemática*, **14**, 1.

BRUNO, A., MARTINÓN, A.: 1997b, Procedimientos de resolución de problemas aditivos con números negativos, *Enseñanza de las Ciencias*, **15**(2), 249-258.

BRUNO, A., MARTINÓN, A.: 1999, The teaching of numerical extension: the case of negative numbers, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, **30**(6), 789-809.

CONNE, F.: 1985, Calculs numériques et calculs relationnels dans la resolution de problèmes d'arithmetique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **5**(3) 269-332.

FISCHBEIN, I.: 1987, *Intuition in Science and Mathematics. An Educational approach.* Reidel. Dordrecht.

FISCHBEIN, I.: 1994, The irrational numbers and the corresponding epistemological obstacles, *Proceedings of the XVIII Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, Lisboa, pp. 352-359.

GALBRAITH, M.: 1974, Negative Numbers, *International Journal of Mathematics Education Science and Technology*, **5**, 83-90.

JANVIER, C.: 1983, The understanding of directed numbers, *Proceedings of the VIII Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, pp. 295-301.

KÜCHEMANN, D.E.: 1981, Positive and negative numbers, En Hart, K. (ed.) *Children's Understanding of Mathematics: 11-16*, John Murray. Londres, pp. 82-87.

MARTHE,P.: 1979, Additive problems and directed numbers, *Proceedings of the III Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Warwick, pp. 153-157.

Murray, J.C.: 1985, Children's informal conceptions of integer arithmetic, *Proceedings of the IX Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, pp. 147-153.

Robinet, J.: 1986, Les réels: quels modèles en ont les élèves?, *Educational Studies in Mathematics*, **17**, 359-386.

Thomaidis, Y.: 1993, Aspects of negative numbers in the early 17th century, *Science and Education* **2**, 69-86.

Vergnauud, G., Durand, C.: 1976, Structures additives et complexité psychogénétique, *La Revue Française de Pédagogie*, **36**, 28-43.

Alicia Bruno Castañeda,
Departamento de Análisis Matemático, Universidad de La Laguna
C/Astrofísico Francisco Sánchez, s/n
38271 La Laguna, Tenerife
correo electrónico: abruno@ull.es