INTERPOLACION FUNCIONAL EN R^n

por

Francisco F. Michavila Pitarch

Sea dado un conjunto

$$\Sigma = \left\{ a_i \right\}_{i=1}^{N}$$

de N puntos distintos de $\mathbf{R}^n$. Llamaremos K a la envoltura convexa cerrada de Σ.

Se designa por P el espacio de dimensión finita de las funciones de valor definidas sobre K. P es tal que dim (P) $=$ N.

Definición: Se dirá que Σ es un conjunto P-unisolvente de puntos de $\mathbf{R}^n$ si dados N escalares cualesquiera α_i, $1 \leq i \leq N$, existe una función $p \in P$ y una sola tal que:

$$p(a_i) = \alpha_i \qquad 1 \leq i \leq N$$

Sea v una función cualquiera definida sobre Σ, designaremos por Πv la función de P tal que:

$$\Pi v(a_i) = v(a_i) \qquad 1 \leq i \leq N$$

Πv es el P-interpolado funcional de v sobre Σ.

Designaremos por p_i a las funciones de P que verifiquen:

$$p_i(a_j) = \delta_{ij} \qquad 1 \leq i, j \leq N$$

a estas funciones, p_i, las denominaremos funciones de base. La expresión general de la interpolación funcional es:

$$(\Pi v)(x) = \sum_{i=1}^{N} p_i(x)\, v(a_i)$$

Pasemos, a continuación, a definir las funciones de base en cada caso posible, con P siendo un espacio de polinomios; P_k, polinomios de grado K en las n variables. Un polinomio de grado K contiene

$$\binom{n+K}{K} \text{ terminos.}$$

Caso 1. Sea K un n-simplex no degenerado de $\mathbf{R}^n$, de vértices

$$a_i \,, \; 1 \leqslant i \leqslant n+1$$

El conjunto

$$\Sigma(1\ \mathrm{F},\ \mathrm{S}) = \left\{ a_i \right\}_{i=1}^{n+1}$$

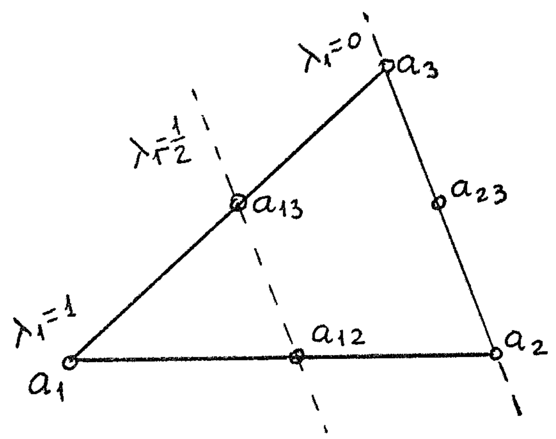
es P_1-unisolvente. Las funciones de base, siendo λ_i las coordenadas baricéntricas, serán lineales:

$$p_i(x) = \lambda_i(x) \qquad 1 \leqslant i \leqslant n+1$$

Caso 2. Designemos por $a_{ij} = a_{ji}$ el punto medio de la arista (a_i, a_j).

Consideremos el sistema:

$$\Sigma(2\ \mathrm{F},\ \mathrm{S}) = \left\{ a_i \right\}_{i=1}^{n+1} \cup \{a_{ij}\}_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1}$$



que contiene

$$\binom{n+2}{2}$$

puntos. Este $\Sigma(2\ \mathrm{F},\ \mathrm{S})$ es P_2-unisolvente.

Las funciones de base (polinomios de grado dos) son:

$$p_1(x) = [\lambda_1(x)] \cdot [2\, \lambda_1(x) - 1]$$

Generalizando:

$$p_i(x) = \lambda_i\, (2\, \lambda_i - 1) \qquad 1 \leqslant i \leqslant n+1$$

Asimismo:

$$p_{12}(x) = 4\, \lambda_1(x) \cdot \lambda_2(x)$$

Generalizando:

$$p_{ij}(x) = 4\,\lambda_i\,\lambda_i \qquad 1 \leqslant u < j \leqslant n + 1$$

Es decir, en este sistema las funciones de base son:

$$p_i(x) = \lambda_i\,(2\,\lambda_i - 1) \qquad 1 \leqslant i \leqslant n + 1$$
$$p_{ij}(x) = 4\,\lambda_i\,\lambda_j \qquad 1 \leqslant i < j \leqslant n + 1$$

Caso 3. Sea K el n-simplex no degenerado de vértices $a_i\,(1 \leqslant i \leqslant n + 1)$. Se designa a_{ijk} el baricentro de tres vértices no necesariamente equidistantes.

Supongamos $i \neq j \neq k \neq i$, entonces a_{ijk} es el centro del triángulo (a_i, a_j, a_k). Supongamos $k = i, j \neq i$, es decir, de la forma a_{iij} definido:

$$a_{iij} = \frac{1}{3}\,(2\,a_i + a_j)$$

El sistema:

$$\Sigma(3\ \mathrm{F},\ \mathrm{S}) = \left\{ a_i \right\}_{i=1}^{n+1} \cup$$

$$\cup\, \{a_{iij},\, a_{ijj}\}_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1} \cup \{a_{ijk}\}_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n+1}$$

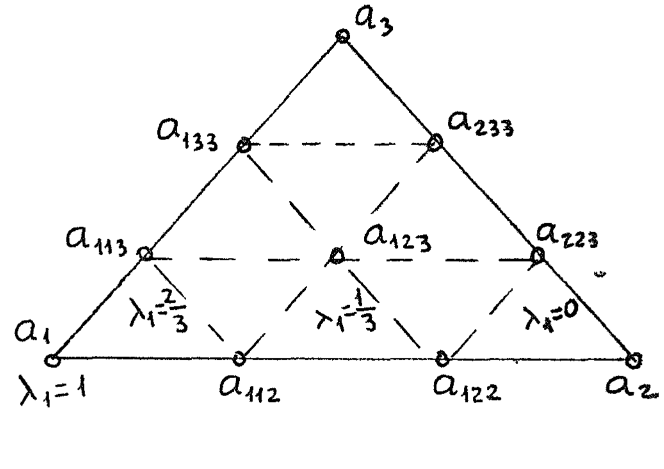
está formado por

$$\binom{n+3}{3}$$

puntos, que es el número de coeficientes de un polinomio de grado tres. Luego $\Sigma(3\ \mathrm{F},\ \mathrm{S})$ es P_{3} unisolvente.

Las funciones de base (polinomios de grado tres) son:

$$p_1(x) = \frac{1}{2}\,\lambda_1\,(3\,\lambda_1 - 1)\,(3\,\lambda_1 - 2)$$



$$p_{112}(x) = \frac{9}{2} \lambda_1 \lambda_2 (3 \lambda_1 - 1)$$

$$p_{122}(x) = \frac{9}{2} \lambda_1 \lambda_2 (3 \lambda_2 - 1)$$

$$p_{123}(x) = 27 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$$

En el n-simplex, las fórmulas generales seran:

$$p_i(x) = \frac{1}{1} \lambda_i (3 \lambda_i - 1) (3 \lambda_i - 2) \qquad 1 \leqslant i \leqslant n + 1$$

$$p_{iij}(x) = \frac{9}{2} \lambda_i \lambda_j (3 \lambda_i - 1)$$

$$1 \leqslant i < j \leqslant n + 1$$

$$p_{ijj}(x) = \frac{9}{2} \lambda_i \lambda_j (3 \lambda_i - 1)$$

$$p_{ijk}(x) = 27 \lambda_i \lambda_j \lambda_k$$

Generalización. Podemos, generalizando, construir sistemas P_k-unisolventes con $k > 3$, colocando más puntos sobre los lados: tres, cuatro, . . . sin ninguna dificultad; los grados de libertad son los valores de la función en los nudos.

En dimensión dos, el punto a_{ijk}, baricentro del triangulo, es un punto interior. Intentemos suprimir este punto, con el objeto de sólo utilizar puntos frontera. Para ello:

Lema: Sea T un triángulo de vértices a_i con $1 \leqslant i \leqslant 3$ en $\mathbf{R}^n$ y sea $\mathbf{a}$ su centro de gravedad. Si un polinomio p es de grado dos (es decir, $p \in P_2$) se tiene:

$$p(a) = -\frac{1}{6} \sum_{i=1}^{3} p(a_i) + \frac{1}{4} \sum_{\substack{i,\, j=1 \\ i \neq j}}^{3} p(a_{iij})$$

Es decir, se expresa el valor en a por los valores en los puntos-frontera.

Demostración. Si $p \in P_2$, su derivada total segunda $D^2\, p(x)$ es constante. $D^2\, p(x)$ es una forma bilineal continua, $D^2\, p(x) \in L_2\, (\mathbf{R}^n; \mathbf{R})$. Llamemos $A = D^2\, p(x)$, entonces:

$$p(a_i) = p(a) + D\, p(a) \cdot (a_i - a) + \frac{1}{2} A \cdot (a_i - a)^2$$

$$\sum_{i=1}^{3} p(a_i) = 3\, p(a) + D\, p(a) \cdot \left(\sum_{i=1}^{3} (a_i - a) \right) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} A \cdot (a_i - a)^2$$

Como,

$$\sum_{i=1}^{3} (a_i - a) = 0$$

queda:

$$\sum_{i=1}^{3} p(a_i) = 3\,(p\,(a)) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} A \cdot (a_i - a)^2$$

En el triángulo, con $i \neq j \neq k \neq i$:

$$p(a_{iik}) = p(a) + D\, p(a) \cdot (a_{iik} - a) + \frac{1}{2} A \cdot (a_{iik} - a)^2$$

$$(a_{iik} - a)^2 = \frac{1}{9} (a_i - a_j)^2$$

Luego:

$$p(a_{iik}) = p(a) + D\, p(a) \cdot (a_{iik} - a) + \frac{1}{18} A \cdot (a_i - a_j)^2$$

$$p(a_{jjk}) = p(a) + D\, p(a) \cdot (a_{jjk} - a) + \frac{1}{18} A \cdot (a_i - a_j)^2$$

$$p(a_{iik}) + p(a_{jjk}) = 2\, p(a) + \frac{1}{9} A \cdot (a_i - a_j)^2$$

$$\sum_{\substack{i,\, j=1 \\ i \neq j}}^{3} p(a_{iij}) = 6\, p(a) + \frac{1}{9} (A \cdot (a_i - a_j)^2 + A \cdot (a_j - a_k)^2 + \\ + A \cdot (a_k - a_i)^2)$$

Sumando:

$$-\frac{1}{6} \sum_{i=1}^{3} p(a_i) + \frac{1}{4} \sum_{\substack{i,\, j=1 \\ i \neq j}}^{3} p(a_{iij}) =$$

$$= p(a) - \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{3} A\,(a_i - a)^2 +$$

$$+ \frac{1}{36} \sum_{\substack{i,\, j=1 \\ i \neq j}}^{3} \{A \cdot (a_i - a_j)^2 + A \cdot (a_j - a_k)^2 + A\,(a_k - a_i)^2\}$$

donde el segundo sumando

$$\frac{1}{12}\cdots$$

es un tercio del ultimo término

$$\frac{1}{36}\cdots$$

ya que el segundo miembro debe ser $p(a)$ y con ello queda demostrado.

Vamos a aplicarle a la eliminación del punto interior. Sea:

$$P = \{p \mid p \in P_3,\ p(a_{ijk}) = -\frac{1}{6}[p(a_i) + p(a_j) + p(a_k)] +$$

$$+ \frac{1}{4}[p(a_{iij}) + p(a_{ijj}) + p(a_{jjk}) + p(a_{jkk}) + p(a_{kii})],$$

$$1 \leqslant i < j < K \leqslant n + 1\}$$

El espacio P contiene los polinomios de grado dos: $P_2 \subset P \subset P_3$. Sea el sistema:

$$\Sigma(3\ F', S) = \left\{a_i\right\}_{i=1}^{n+1} \cup \{a_{iij}, a_{ijj}\} \qquad 1 \leqslant i < j \leqslant n+1$$

Las funciones de base (polinomios) son:

$$p_i(x) = \frac{1}{2}\lambda_i(3\lambda_i - 1)(3\lambda_i - 2) - \frac{9}{2}\lambda_i \sum_{\substack{1\leqslant j<k\leqslant n+1 \\ j,\ k\neq i}} \lambda_j \lambda_k \qquad 1\leqslant i\leqslant n+1$$

$$p_{iij}(x) = \frac{9}{2}\lambda_i \lambda_j(3\lambda_i - 1) + \frac{27}{4}\lambda_i \lambda_i \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i,\ k\neq j}}^{n+1} \lambda_k \quad 1\leqslant i<j\leqslant n+1$$

$$p_{ijj}(x) = \frac{9}{2}\lambda_i \lambda_j(3\lambda_j - 1) + \frac{27}{4}\lambda_i \lambda_j \sum_{\substack{k+1 \\ k\neq i,\ k\neq j}}^{n+1} \lambda_k \quad 1\leqslant i<j\leqslant n+1$$

El polinomio $\Pi\ v(x)$, de interpolación, es:

$$\Pi\ v(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{2}\lambda_i(3\lambda_i - 1)(3\lambda_i - 2)\, v(a_i) +$$

$$+ \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n+1} \left[\frac{9}{2}\lambda_i \lambda_j (3\lambda_i - 1)\cdot v(a_{iij}) +\right.$$

$$+ \frac{9}{2} \lambda_i \lambda_i (3 \lambda_i - 1) v(a_{ijj}) \Big] +$$

$$+ \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n+1} 27 \lambda_i \lambda_j \lambda_k \cdot v(a_{ijk})$$

OTRO PROCEDIMIENTO DE INTERPOLACION

Sean los conjuntos de puntos

$$\Sigma = \left\{ a_i \right\}_{i=1}^{N} \quad \text{y} \quad \widehat{\Sigma} = \left\{ \widehat{a}_i \right\}_{i=1}^{N}$$

donde $\widehat{\Sigma}$ es el llamado conjunto de referencia. Se dice que Σ y $\widehat{\Sigma}$ son equivalentes si existe una aplicación $F : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, afín e inversible, tal que:

$$a_i = F(\widehat{a}_i) \qquad 1 \leqslant i \leqslant N$$

Se escribirá $F(x) = B\, x + b$, donde $B \in L(\mathbf{R}^n)$ y $b \in \mathbf{R}^n$.

Para definir una interpolación sobre Σ se introduce sobre $\widehat{\Sigma}$ y se trasladará por aplicación a Σ, para ello $\widehat{P}$ es un espacio de dimensión finita de funciones de valores reales definidas sobre $\widehat{K}$ y tal que $\dim(\widehat{P}) = N$.

Lema: Se supone que $\widehat{\Sigma}$ es un conjunto $\widehat{P}$-unisolvente. Sea

$$\Sigma = \left\{ a_i \right\}_{i\,=\,1}^{N}$$

un conjunto equivalente a $\widehat{\Sigma}$, entonces Σ es P-unisolvente con $P = \{p / p(x) = \widehat{p}\, (F^{-1}(x)\,),\ \widehat{p} \in \widehat{P}\}$.

Llamemos $\widehat{p}_i$ las funciones de base relativas a una interpolación en $\widehat{\Sigma}$ por $\widehat{P}$, es decir, $\widehat{p}_i \in \widehat{P}$, $\widehat{p}_i\, (\widehat{a}_j) = \delta_{ij}$ con $1 \leqslant i, j \leqslant N$.

$$p_i(x) = \widehat{p}_i(F^{-1}(x)\,) \qquad 1 \leqslant i \leqslant N$$

Las p_i forman una base de P. Como $p_i(a_j) = \delta_{ij}$ estas p_i son las funciones de base relativas a la interpolación sobre Σ por P.

Si $\widehat{P} = P_k$, implica $P = P_k$, es decir, todos los polinomios de grado k son aplicados en polinomios de grado k.

A $\widehat{v}$, definida sobre $\widehat{K}$ (o $\widehat{\Sigma}$), le asociamos v definida sobre K (o Σ) por la expresión:

$$v(x) = \widehat{v}\, (F^{-1}(x)\,)$$

o recíprocamente, si a v, definida sobre K (o Σ) le asociamos $\widehat{v}$ sobre $\widehat{K}$ (o $\widehat{\Sigma}$) por $\widehat{v}\,(x) = v(F\,(x)\,)$. Es decir, hay una correspondencia biyectiva $v \longleftrightarrow \widehat{v}$.

Supongamos que $\hat{\Sigma}$ es $\hat{P}$-unisolvente, en $\hat{\Sigma}$ consideramos $\hat{v}$ tal que

$$(\widehat{\Pi}\,\hat{v})\,(\hat{x}) = \sum_{i=1}^{N} \hat{p}_i\,(\hat{x})\,\hat{v}\,(\hat{a}_i)$$

de la misma forma, si v esta definida sobre Σ que es P-unisolvente por

$$(\Pi\, v)\,(x) = \sum_{i=1}^{N} p_i(x)\; v(a_i)$$

se deduce:

$$\hat{\Pi}\,\hat{v} = \widehat{\Pi v}$$

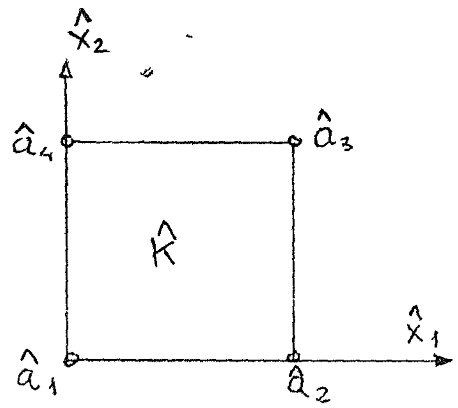
INTERPOLACION SOBRE PARALELOTOPOS

Designemos por P_k el espacio de polinomios de grado k; Q_k es el espacio de polinomios $p(x)$, que son de la forma:

$$p(x) = p(x_1, x_2) = \sum_{0 \leqslant i_1,\, i_2 \leqslant k} C_{i_1,\, i_2}\, x_1^{i_1}\, x_2^{i_2} \qquad C_{i_1,\, i_2} \in \mathbf{R}$$

Se cumple que $P_k \subset Q_k \subset P_{2k}$.

Vamos a utilizar el segundo de los métodos para introducir la interpolación funcional y para ello definimos $\hat{K}$ como un cuadrado de lado unidad.



Una condición necesaria y suficiente para que el cuadrilatero (a_1, a_2, a_3, a_4) sea un paralelogramo no degenerado es que exista una aplicación $\hat{F}$ afín, inversible de $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, tal que

$$a_i = F(\hat{a}_i) \qquad 1 \leqslant i \leqslant 4$$

CASO 1. Consideremos el conjunto

$$\widehat{\Sigma}\,(1\ \mathrm{F},\ \mathrm{R}) = \left\{\widehat{a}_i\right\}_{i=1}^{4},$$

vamos a demostrar que es Q_1-unisolvente. Para ello acudiremos a las funciones de base:

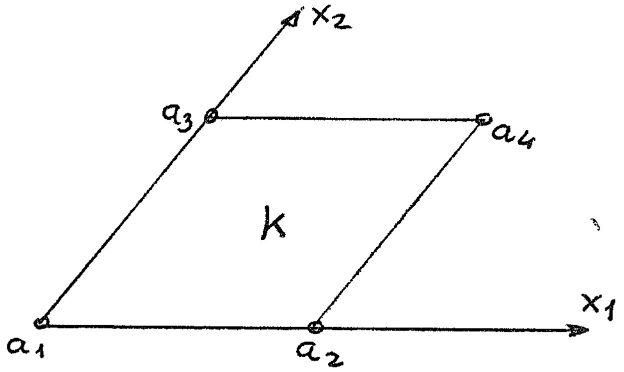
$$\begin{aligned}
\widehat{p}_1\,(\widehat{x}) &= (1 - \widehat{x}_1)\,(1 - \widehat{x}_2)\\
\widehat{p}_2\,(\widehat{x}) &= \widehat{x}_1\,(1 - \widehat{x}_2)\\
\widehat{p}_3\,(\widehat{x}) &= \widehat{x}_1\,\widehat{x}_2\\
\widehat{p}_4\,(\widehat{x}) &= (1 - \widehat{x}_1)\,\widehat{x}_2
\end{aligned}$$

Vamos a introducir una notación que nos permite utilizar la permutación circular:

$$\widehat{x}_3 = 1 - \widehat{x}_1 \quad , \quad \widehat{x}_4 = 1 - \widehat{x}_2$$

de forma que:

$$\begin{aligned}
\widehat{p}_1\,(\widehat{x}) &= \widehat{x}_3\,\widehat{x}_4\\
\widehat{p}_2\,(\widehat{x}) &= \widehat{x}_4\,\widehat{x}_1\\
\widehat{p}_3\,(\widehat{x}) &= \widehat{x}_1\,\widehat{x}_2\\
\widehat{p}_4\,(\widehat{x}) &= \widehat{x}_2\,\widehat{x}_3
\end{aligned}$$

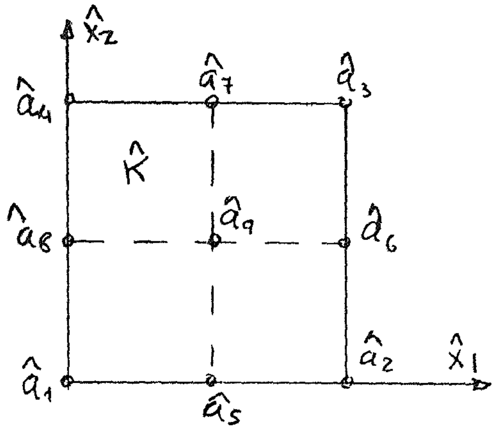


Este $\widehat{\Sigma}\,(1\ \mathrm{F},\ \mathrm{R})$ es el conjunto de referencia. A través de la aplicación afín inversible obtenemos

$$\Sigma\,(1\ \mathrm{F},\ \mathrm{R}) = \left\{a_i\right\}_{i=1}^{4}$$

que define el paralelogramo y el conjunto de P-unisolvente, donde $\mathrm{P} = \{p \ / \ p(x) = \widehat{p}\,(\mathrm{F}^{-1}\,(x)\,),\ \widehat{p} \in Q_1\}$.

CASO 2. Sea el elemento cuadrado unidad de nueve grados de libertad. Q_2 es de dimensión 9.



Llamamos

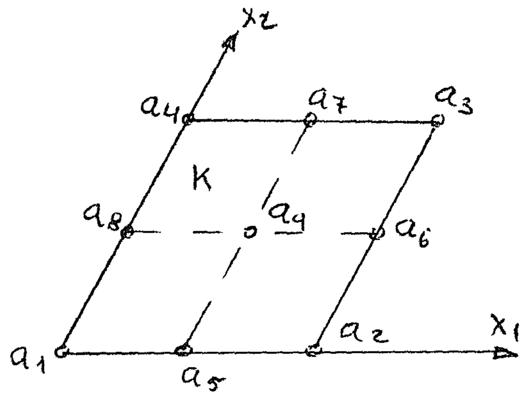
$$\hat{\Sigma}(2\text{ F, R}) = \left\{ a_i \right\}_{i=1}^{9}$$

que es Q_2-unisolvente. Definimos las funciones de base:

$$\widehat{p}_1(\widehat{x}) = \widehat{x}_3\,\widehat{x}_4\,(2\,\widehat{x}_3 - 1)\,(2\,\widehat{x}_4 - 1)$$

$\widehat{p}_2$, $\widehat{p}_3$, $\widehat{p}_4$ se obtienen por permutación circular.

$$\widehat{p}_5(\widehat{x}) = 4\,\widehat{x}_3\,\widehat{x}_4\,\widehat{x}_1\,(2\,\widehat{x}_4 - 1)$$



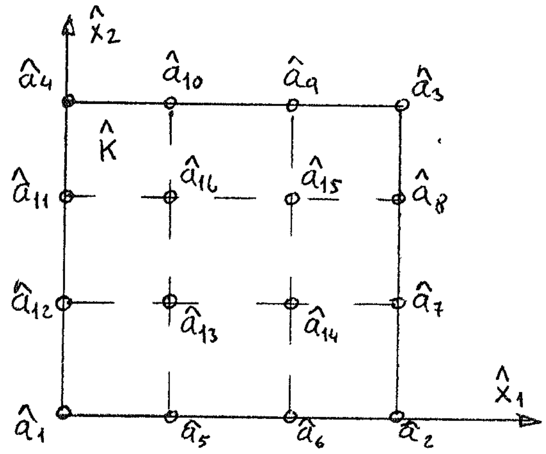
$\widehat{p}_6$, $\widehat{p}_7$, $\widehat{p}_8$ se obtienen por permutación circular.

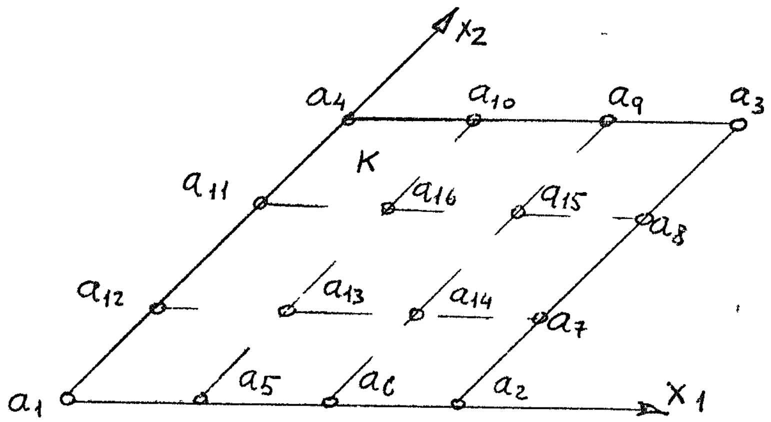
$$\widehat{p}_9(\widehat{x}) = 16\,\widehat{x}_1\,\widehat{x}_2\,\widehat{x}_3\,\widehat{x}_4$$

CASO 3. Sea el elemento de dieciséis grados de libertad.

$$\widehat{\Sigma}(3\ F,\ R) = \left\{ \widehat{a}_i \right\}_{i=1}^{16}$$

es Q_3-unisolvente.





Las funciones de base son:

$$\widehat{p}_1(\widehat{x}) = \frac{1}{4}\,\widehat{x}_3\,\widehat{x}_4\,(3\,\widehat{x}_3 - 1)\,(3\,\widehat{x}_4 - 1)\,(3\,\widehat{x}_3 - 2)\,(3\,\widehat{x}_4 - 2)$$

$\widehat{p}_2$, $\widehat{p}_3$, $\widehat{p}_4$ por permutación circular

$$\widehat{p}_5(\widehat{x}) = \frac{9}{4}\widehat{x}_3\widehat{x}_4\widehat{x}_1(3\widehat{x}_3 - 1)(3\widehat{x}_4 - 1)(3\widehat{x}_4 - 2)$$

$$\widehat{p}_6(\widehat{x}) = \frac{9}{4}\widehat{x}_3\widehat{x}_4\widehat{x}_1(3\widehat{x}_3 - 2)(3\widehat{x}_4 - 1)(3\widehat{x}_4 - 2)$$

$\widehat{p}_7$, $\widehat{p}_8$, $\widehat{p}_9$, $\widehat{p}_{10}$, $\widehat{p}_{11}$, $\widehat{p}_{12}$ por permutación circular

$$\widehat{p}_{13}(\widehat{x}) = \frac{81}{4}\widehat{x}_1\widehat{x}_2\widehat{x}_3\widehat{x}_4(3\widehat{x}_3 - 1)(3\widehat{x}_4 - 1)$$

$\widehat{p}_{14}$, $\widehat{p}_{15}$, $\widehat{p}_{16}$ por permutación circular.

Análogamente podemos construir sistemas de puntos Q_k-unisolventes con $k \geqslant 4$.

Caso 4. Eliminemos los puntos interiores del elemento. Consideremos de nuevo el elemento del caso 2 y sea el:

Lema: Si $v \in P_2$, se tiene

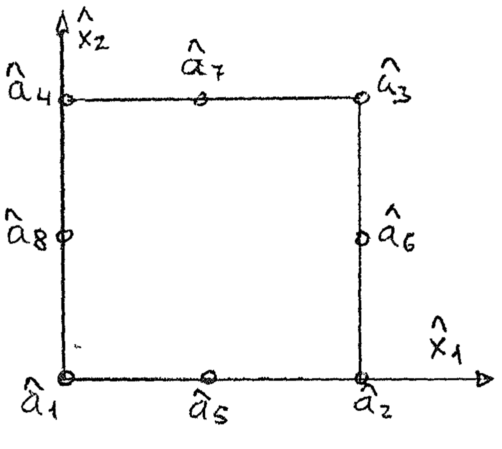
$$v(\widehat{a}_9) = -\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} v(a_i) + \frac{1}{2}\sum_{i=5}^{8} v(\widehat{a}_i)$$

Definimos el espacio de polinomios:

$$\widehat{P} = \left\{\widehat{p} \mid \widehat{p} \in Q_2, \widehat{p}(\widehat{a}_9) = -\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}\widehat{p}(\widehat{a}_i) + \frac{8}{2}\sum_{i=5}^{8}\widehat{p}(\widehat{a}_i)\right\}$$

Este espacio contiene al espacio P_2 y está contenido en Q_2: $\widehat{P}_2 \subset P \subset Q_2$.
El sistema de puntos

$$\left\{\widehat{a}_i\right\}_{i=1}^{8} = \widehat{\Sigma}(2\,F^1, R)$$



es $\widehat{\mathrm{P}}$-unisolvente. Para comprobar que $\widehat{\Sigma}$ (2 F[1], R) es $\widehat{\mathrm{P}}$-unisolvente basta en definir las funciones de base.

$$\widehat{p}_1(\widehat{x}) = \widehat{x}_3\,\widehat{x}_4 \cdot [2(\widehat{x}_3 + \widehat{x}_4) - 3]$$

$\widehat{p}_2$, $\widehat{p}_3$, $\widehat{p}_4$ por permutación circular

$$\widehat{p}_5(\widehat{x}) = 4\,\widehat{x}_3\,\widehat{x}_4\,\widehat{x}_1$$

$\widehat{p}_6$, $\widehat{p}_7$, $\widehat{p}_8$ por permutación circular.

El elemento sin punto interior tiene ocho grados de libertad. En general es un paralelogramo de la misma forma.

Caso 5. Eliminemos los puntos interiores del elemento análogo al del caso 3.

$$\widehat{\Sigma}(3\ \mathrm{F},\ \mathrm{R}) = \left\{\widehat{a}_i\right\}_{i=1}^{16}$$

es Q_3-unisolvente.

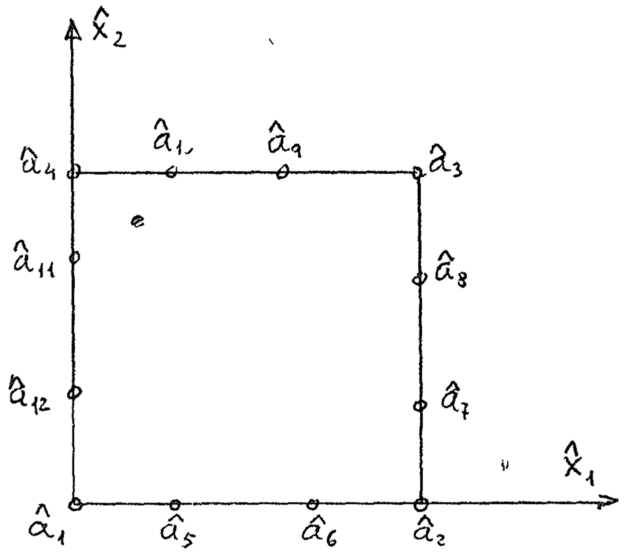
Lema: Si $\widehat{p} \in \mathrm{P}_3$, se tiene:

$$\widehat{p}(\widehat{a}_{13}) = -\frac{1}{9}\left(4\,\widehat{p}(\widehat{a}_1) + 2\,\widehat{p}(\widehat{a}_2) + \widehat{p}(\widehat{a}_3) + 2\,\widehat{p}(\widehat{a}_4)\right) +$$

$$+ \frac{1}{3}\left(2\,\widehat{p}(\widehat{a}_5) + \widehat{p}(\widehat{a}_7) + p(\widehat{a}_{10}) + 2\,\widehat{p}(\widehat{a}_{12})\right)$$

y por permutación circular obtenemos $\widehat{p}(\widehat{a}_{14})$, $\widehat{p}(\widehat{a}_{15})$ y $\widehat{p}(\widehat{a}_{16})$.

La demostración es trivial.



Sea el espacio de polinomios $\widehat{P} = \{\widehat{p} \mid \widehat{p} \in Q_3, \widehat{p}$ verifica el lema último$\}$. Es un espacio de dimensión 12 y se cumple $P_3 \subset \widehat{P} \subset Q_3$.

Construyamos el sistema

$$\widehat{\Sigma}\,(3\ F^1,\ R) = \left\{\widehat{a}_i\right\}_{i=1}^{12}$$

que es $\widehat{P}$-unisolvente.

Las funciones de base son:

$$\widehat{p}_1\,(\widehat{x}) = \widehat{x}_3\,\widehat{x}_4\left[1 - \frac{9}{2}\,(\widehat{x}_4\,\widehat{x}_3 + \widehat{x}_2\,\widehat{x}_4)\right]$$

$\widehat{p}_2, \widehat{p}_3, \widehat{p}_4$ por permutación circular.

$$\widehat{p}_5\,(\widehat{x}) = \frac{9}{2}\,\widehat{x}_3\,\widehat{x}_4\,\widehat{x}_1\,(3\,\widehat{x}_3 - 1)$$

$$\widehat{p}_6\,(\widehat{x}) = \frac{9}{1}\,\widehat{x}_3\,\widehat{x}_4\,\widehat{x}_1\,(3\,\widehat{x}_3 - 2)$$

y el resto, por permutación circular.

BIBLIOGRAFIA

1. LEGRÁS, J.: *Methodes et techniques d'analyse numerique* (1971).
2. LIONS, J. L.: *Cours d'analyse numerique* (1973).
3. MICHAVILA, F.: *Elementos finitos curvos en espacios de Sobolev* (1975).
4. TEMAN, R.: *Analyse numerique* (1970).
5. ZIENKIEWICZ: *The finite element method in engineering science* (1971).