MEDIDAS ARQUIMEDIANAS
Y MEDIDAS DE RADON DE TIPO $\mathcal{K}$

por

J. FERNANDEZ NOVOA

ABSTRACT

In this paper we introduce the Radon outer measures of type ($\mathscr{H}$) and we generalize some results of [1]. The main result proved is: If E is a T_1 topological space, a Radon strict outer measure of type ($\mathscr{H}$) on E is archimedian if and only if it is weakly archimedian.

NOTACIONES:

En[1] introducíamos las medidas exteriores arquimedianas y débilmente arquimedianas y establecíamos la equivalencia de estos dos conceptos para las medidas exteriores de Radon sobre espacios topológicos T_1.

En [2] y [3] B. Rodríguez-Salinas y P. Jiménez Guerra extienden la teoría de Schwartz introduciendo las medidas de Radon de tipo ($\mathcal{K}$) en espacios topológicos arbitrarios. Para ello, sustituyen el concepto de compacidad por el de μ-compacidad, que es mucho más natural en la teoría de la medida, y suprimen la condición de que las medidas sean localmente finitas.

En este trabajo introducimos las medidas exteriores de Radon de tipo ($\mathcal{K}$) y extenderemos los resultados de [1] para esta clase de medidas.

Designaremos por μ^* una medida exterior sobre un conjunto E y por μ la restricción de μ^* a los conjuntos medibles. Cuando E sea un espacio topológico, denotaremos por $\mathcal{G}$ la clase de los subconjuntos abiertos de E.

1. Definicion: Se dice que μ^* es *arquimediana* cuando existe un $\epsilon_o > 0$ tal que para cada $\epsilon > 0$ se puede hallar un número finito de subconjuntos $A_1, \ldots, A_n$ de E que satisfacen

$$\mu^* (A_i) < \epsilon \quad (i = 1, \ldots, n) \quad y \ \mu^* \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) > \epsilon_o .$$

2. Definicion: Se dice que μ^* es *débilmente arquimediana* cuando para $A_\epsilon = \bigcup \{A \subset E: \ \mu^* (A) < \epsilon \}$ $(\epsilon > 0)$ se tiene

$$\lim_{\epsilon \to 0} \mu^* (A_\epsilon) > 0$$

En [1] establecíamos la siguiente.

3. Proposicion: *Una medida exterior regular μ^* es débilmente arquimediana si y sólo si se verifica alguna de las siguientes condiciones:*

3. 1. *μ^* es arquimediana*

3. 2. *Existe un átomo que es unión de conjuntos de medida nula.*

4. Definicion: Sean E un espacio topológico y $\mathcal{H}$ una clase de subconjuntos cerrados de E. Una *medida exterior de Radon de tipo* ($\mathcal{H}$) *sobre* E es una medida exterior de Borel μ^* que satisface las siguientes condiciones:

4. 1. Todo $H \in \mathcal{H}$ es μ-compacto y de medida finita.

4. 2. Para cada conjunto medible $A \subset E$ se tiene

$$\mu (A) = \sup \{ \mu (H) : A \supset H \in \mathcal{H} \}$$

Si además se verifica

$$\mu (A) = \inf \{ \mu (G) : A \subset G \in \mathcal{G} \}$$

entonces se dice que μ^* es una *medida exterior de Radon de tipo* ($\mathcal{H}$) *sobre E estricta.*

5. PROPOSICION: *Sean* E *un espacio topológico,* $\mathcal{H}$ *una clase de subconjuntos cerrados de* E *y* μ^* *una medida exterior de Radon de tipo* ($\mathcal{H}$) *sobre* E. *Se verifican las siguientes propiedades:*

5. 1. *Si* μ^* *es regular entonces todo átomo tiene medida exterior finita.*

5. 2. *Si* μ^* *es estricta y* E *es* T_1 *entonces ningún átomo es unión de conjuntos de medida nula.*

5. 3. *Si* μ^* *es localmente finita y* E *es* T_1 *entonces para cada* $\epsilon > 0$ *el conjunto* $A_\epsilon = \cup\{A \subset E\colon \mu^*(A) < \epsilon\}$ *es abierto.*

DEMOSTRACION:

5. 1. Sean A un átomo y A′ un cubrimiento medible de A. Para cada número real r tal que $0 < r < \mu(A')$ existe un $H \in \mathcal{H}$ tal que $H \subset A'$ y $\mu(H) > r$, y como A′ es un átomo se tiene $\mu^*(A) = \mu(A') = \mu(H) < +\infty$ y H es un átomo.

5. 2. Sea A un átomo. Por ser μ^* una medida exterior de Borel estricta es regular y según lo que acabamos de ver en 5. 1., si A′ es un cubrimiento medible de A existe un átomo $H \in \mathcal{H}$ tal que $H \subset A'$ y $\mu^*(A) = \mu(A') = \mu(H)$. Veamos que H no es unión de conjuntos de medida nula:

Si lo fuese, sería $\mu(x) = 0$, para todo $x \in H$. Por otra parte, para cada $x \in H$ y todo número real s tal que $0 < s < \mu(H)$ existe un conjunto G_x abierto en H tal que $x \in G_x$ y

$$\mu(G_x) < \mu(x) + s = s < \mu(H)$$

y por ser H un átomo, $\mu(G_x) = 0$. Ahora bien, como H es μ-compacto, para cada $\epsilon > 0$, existe un número finito de abiertos $G_{x_1}, \ldots, G_{x_n}$ tales que

$$\mu\left(H - \bigcup_{i=1}^{n} G_{x_i}\right) < \epsilon$$

y por tanto,

$$\mu(H) = \mu(H - {}_{i=1}^{n} G_{x_i}) + \mu(\bigcup_{i=1}^{n} G_{x_i}) = \mu(H - \bigcup_{i=1}^{n} G_{x_i}) < \epsilon$$

y como ϵ es arbitrario, $\mu(H) = 0$ lo cual es absurdo.

Por consiguiente, existe un $x \in H$ tal que $\mu(x) > 0$. Si x no perteneciese a A, entonces A estaría contenido en $A' - \{x\}$ y, por tanto,

$$\mu^*(A) \leqslant \mu(A') - \mu(x) < \mu(A')$$

lo cual es imposible porque A' es un cubrimiento medible de A. En consecuencia, $x \in A$ y A no es unión de conjuntos de medida nula.

5. 3. Sea $x \in A_\epsilon$. Entonces $\mu(x) < \epsilon$ y existe un entorno abierto G_o de x tal que $\mu(G_o) < +\infty$. Para $\epsilon' = \epsilon - \mu(x)$ existe un $H \in \mathcal{H}$ tal que $H \subset G_o - \{x\}$ y

$$\mu(H) > \mu(G_o - \{x\}) - \epsilon' = \mu(G_o) - \mu(x) - \epsilon'$$

Entonces $G = G_o - H$ es un conjunto abierto tal que $x \in G \subset G_o$ y

$$\mu(G) = \mu(G_o) - \mu(H) < \mu(x) + \epsilon' = \epsilon$$

luego $x \in G \subset A_\epsilon$ y, por tanto, A_ϵ es abierto.

6. PROPOSICION: *Sean* E *un espacio topológico* T_1, $\mathcal{H}$ *una clase de subconjuntos cerrados de* E *y* μ^* *una medida exterior de Radon de tipo* $\mathcal{H}$ *sobre* E *estricta. Entonces* μ^* *es arquimediana si y sólo si es débilmente arquimediana.*

DEMOSTRACION: Es consecuencia inmediata de 5.2 y de la proposición 3.

BIBLIOGRAFIA

[1] FERNANDEZ NOVOA, J.: *"Medidas arquimedianas"*. Rev. Mat. Hisp. Amer. Madrid, 41 (1981), 63-79.

[2] RODRIGUEZ SALINAS, B.: *"Medidas de Radon de tipo* $(\mathcal{K})$ *y medidas con lifting"*. R. Acad. Ci. Madrid, 72. (1973), 605-610.

[3] RODRIGUEZ SALINAS, B., y JIMENEZ GUERRA, P.: *"Medidas de Radon de tipo* $(\mathcal{K})$ *en espacios topológicos arbitrarios"*. Mem. R. Acad. Ci. Madrid, 10 (1979).

Departamento de Matemáticas fundamentales
Facultad de Ciencias
U.N.E.D.
Ciudad Universitaria
28040 Madrid