TRABAJOS DE INVESTIGACION OPERATIVA
Vol. 7, núm. 1, 1992, pp. 135 a 156

UN NUEVO ALGORITMO EN PROGRAMACION SIGNOMIAL

A. ALLUEVA
Depto. Matemática Aplicada
Universidad de Zaragoza
A. PÉREZ
Depto. Métodos Estadísticos
Universidad Pública de Navarra

RESUMEN

La técnica de Programación Geométrica resuelve problemas no lineales en los que tanto la función objetivo como las restricciones son expresiones posinomiales con coeficientes positivos. La teoría de Programación Signomial es similar para el caso en que los coeficientes sean reales arbitrarios. En este trabajo describimos un procedimiento de solución para problemas signomiales que pueden transformarse en problemas geométricos inversos. Este procedimiento incluye la formulación de un problema aumentado con grado de dificultad cero y el uso de la técnica de condensación de posinomiales. La solución del problema original precisa la estimación de un conjunto de parámetros del problema aumentado. Presentamos un procedimiento iterativo para la estimación de éstos y proponemos un nuevo algoritmo para resolver el modelo signomial.
Palabras clave: Programación Geométrica, Programación Signomial.
Clasificación AMS 1980: 90C30.

SUMMARY

The theory of Geometric Programming in concerned with the solution of certain nonlinear programming problems in which the objective function and the constraints are polynomial expressions with positive coeficients. The theory

Este trabajo se ha realizado con apoyo financiero de IBERCAJA.
Recibido: Septiembre 1991.
Revisado: Mayo 1992.

of signomial programming is similar but the coefficients are arbitrary real numbers. This paper describes a solution procedure for signomial programming problem which may be transformed into a reversed geometric programming problem. The procedure insolves the formulation of an augmented problem possessing degree of difficulty zero and the use of condensation technique. The solution to the original problem requires the estimation of certain parameters in the augmented problem. An iterative procedure for estimating these parameters is described and a new general algorithm of signomial programming is proposed.
Key word: Geometric Programming, Signomial Programming.
AMS Subject Classification (1980): 90C30.

1. EL PROBLEMA GENERAL DE PROGRAMACION SIGNOMIAL

La Programación Geométrica es una técnica de optimización desarrollada para resolver un tipo particular de problemas de decisión cuya formulación matemática se caracteriza por incluir complicados términos posinomiales.

La base de esta técnica de minimización se encuentra en las propiedades de la clásica desigualdad de la Media Aritmético-Geométrica, que proporcionan el máximo del problema dual correspondiente, caracterizado por poseer restricciones lineales. El valor óptimo para este problema coincide con el óptimo valor primal.

La Programación Geométrica fue desarrollada en su origen por los profesores Richard Duffin y Clarence Zener. También contribuyó un alumno de Zener: Elmon Petterson. Sus principales aplicaciones se dirigieron inicialmente hacia los diseños en ingeniería, aunque con posterioridad se extendieron a otros muy diversos campos en los que los modelos se formulan como problemas de optimización no lineales.

La técnica de Programación Geométrica Signomial o, simplemente, Programación Signomial, se desarrolló más tarde por varios investigadores, entre los que cabe destacar U. Passy y D. J. Wilde. Es una generalización natural de la técnica original, debida a que la mayoría de los problemas reales no se ajustaban a la restricción de no negatividad impuesta a los coeficientes c_j de los posinomios.

La formulación matemática del modelo de Programación Geométrica Signomial es la siguiente:

Problema Geométrico Signomial Primal

$$\min \qquad g_0(t) = \sum_{j=1}^{m_0} y_j(t)$$

$$[S] \quad \text{sujeto a:} \quad g_k(t) = \sum_{j=m_{k-1}+1}^{m_k} y_j(t) \leqslant s_k \ (k = 1, \ldots, p); \ t = (t_1, \ldots, t_n) > 0$$

donde:

$$y_j(t) = \sigma_j c_j t_1^{a_{j1}}, \ldots, t_n^{a_{jn}} \quad ; \quad c_j > 0 \ \forall j ; a_{ji} \in \mathbb{R} \ \forall ij \quad ; \quad \sigma_j = \pm 1 \ \forall j$$
$$s_k = \pm 1 \ \forall k \quad ; \quad m_k > m_{k-1} \ \forall k$$

Las m funciones signo σ_j se introducen con objeto de absorber el signo de cada término $y_j(t)$; y las p funciones signo s_k, para permitir que las restricciones sean del tipo $\leqslant$, $=$ o $\geqslant$.

Para este problema signomial primal se define su dual como:

Problema Geométrico Signomial Dual

$$\max \qquad v(\delta) = \sigma_0 \left[\prod_{k=0}^{p} \prod_{j=m_{k-1}+1}^{m_k} \left(\frac{c_j \delta_{0k}}{\delta_j} \right)^{\sigma_j \delta_j} \right]^{\sigma_0}$$

$$[DS] \quad \text{sujeto a:} \quad \sum_{j=1}^{m_0} \sigma_j \delta_j = \sigma_0 \quad ; \quad \sum_{j=1}^{m} \sigma_j a_{ij} \delta_j = 0 \, (i = 1, \ldots, n); \delta_j \geqslant 0 \, \forall j$$

donde:

$$\delta_{0k} = s_k \sum_{j=m_{k-1}+1}^{m_k} \sigma_j \delta_j \quad , \quad k = 1, \ldots, p \quad ; \quad \delta_{00} = 1$$

$$\sigma_0 = \pm 1 \quad ; \quad m_{-1} = 0 \quad ; \quad m = m_p$$

Tanto en el modelo primal como en el dual, si se toma $\sigma_j = 1 \ \forall j$, $s_k = 1 \ \forall k$, se sigue que

$$\sigma_0 = +1 \quad , \quad \delta_{0k} = \sum_{j=m_{k-1}+1}^{m_k} \delta_j = \lambda_k(\delta)$$

y aparecen los modelos geométricos posinomiales primal y dual, respectivamente. Su formulación queda pues como sigue:

Problema Geométrico Posinomial Primal

$$\min \qquad g_0(t) = \sum_{j=1}^{m_0} c_j \prod_{i=1}^{n} t_i^{a_{ji}}$$

$$[P] \quad \text{sujeto a:} \quad g_k(t) = \sum_{j=m_{k-1}+1}^{m_k} c_j \prod_{i=1}^{n} t_i^{a_{ji}} \leqslant 1 \ (k = 1, ..., p); \ t = (t_1, ..., t_n) > 0$$

donde:

$$c_j > 0 \quad (j = 1, ..., m) \quad ; \quad m = m_p \quad ; \quad m_k > m_{k-1} \ \forall k \quad ; \quad a_{ji} \in \mathbb{R}, \ \forall \mathrm{i}, \mathrm{j}$$

Problema Geométrico Posinomial Dual

$$\max \qquad v(\delta_1, ..., \delta_m) = \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{c_j}{\delta_j}\right)^{\delta_j} \prod_{k=1}^{p} \lambda_k(\delta)^{\lambda_k(\delta)}$$

$$[DP] \quad \text{sujeto a:} \quad \sum_{j=1}^{m_0} \delta_j = 1; \ \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\delta_j = 0 \ (i = 1, ..., n); \ \delta_j \geqslant 0 \ (j = 1, ..., m)$$

A los términos

$$c_j \prod_{i=1}^{n} t_i^{a_{ji}}$$

del problema [P] se les denomina posinomios, siendo la suma de ellos una expresión posinomial.

Análogamente, los términos

$$\sigma_j c_j \prod_{i=1}^{n} t_i^{a_{ji}}$$

del problema [S] se dicen signomios, y expresiones signomiales la suma de estos términos.

Definición: El grado de dificultad del problema geométrico posinomial [P] (o del problema signomial [S]) es la diferencia entre el número total de posinomios (signomios) y el de variables más una: $d = m - (n + 1)$.

Está probado (4) que la teoría de Dualidad en Programación Geométrica se puede utilizar eficientemente para resolver el problema geométrico primal. Una conclusión del Primer Teorema de Dualidad, dado por Duffin, Petterson y Zener, es que si δ^* es un máximo de [DP], entonces, cada mínimo del primal $[P]$ satisface el sistema de ecuaciones:

$$c_j t_1^{a_{j1}}, \ldots, t_n^{a_{jn}} = \begin{cases} \delta_j^* v(\delta^*) & \forall j = 1, \ldots, m_0 \\ \delta_j^* / \sum\limits_{j=m_{k-1}+1}^{m_k} \delta_j^*, \forall j = m_{k-1}+1, \ldots, m_k; m_p = m; \forall k \text{ t.q.} \sum\limits_{j=m_{k-1}+1}^{m_k} \delta_j^* > 0 \end{cases}$$

Este sistema se reduce fácilmente a uno de ecuaciones lineales en las variables $\log t_i$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Cuando el número de variables primales es uno menos que el número de posionomios, el grado de dificultad es cero. En este caso, las ecuaciones lineales que forman el conjunto de restricciones duales proporcionan una única solución factible y, por tanto, un óptimo δ^*. Podemos sustituir este vector en las ecuaciones anteriores y determinar de forma inmediata el óptimo t^*, coincidiendo el valor óptimo primal con el de la función objetivo dual $v(\delta^*)$.

2. EL PROBLEMA GEOMETRICO INVERSO

Un Problema del tipo:

$$[I] \quad \begin{array}{lll} \min & g_0(t) & \\ \text{sujeto a:} & g_k(t) \geqslant 1 & k = 1, \ldots, r \\ & g_k(t) \leqslant 1 & k = r+1, \ldots, p \\ & t \geqslant 0 \;\; ; \;\; g_0 \;\; , \;\; g_k & \text{posinomiales} \end{array}$$

que únicamente se diferencia del geométrico usual en el sentido inverso de las desigualdades de algunas de las restricciones, se denomina *Problema Geométrico Inverso.*

En lo que sigue supondremos, sin pérdida de generalidad, que existe una única restricción inversa, por ejemplo, la última:

$$[I] \quad \begin{array}{ll} \min & g_0(t) \\ \text{sujeto a:} & g_1(t) \leqslant 1 \\ & \ldots \\ & g_{p-1}(t) \leqslant 1 \\ & g_p(t) \geqslant 1 \\ & t > 0 \;\; ; \;\; g_k(t) \;\; \text{posinomiales}, \; k = 0, \ldots, p \end{array}$$

y un conjunto de pesos no negativos $\varepsilon_{m_{p-1}+1}, \ldots, \varepsilon_{m_p}$ tales que

$$\sum_{j=m_{p-1}+1}^{m_p} \varepsilon_j = 1$$

Se obtiene un programa geométrico $[I_\varepsilon]$, que aproxima al anterior, sustituyendo $g_p(t) \geqslant 1$ por

$$\bar{g}_p(t) = \prod_{j=m_{p-1}+1}^{m_p} \left(\frac{\varepsilon_j}{y_j}\right)^{\varepsilon_j} \leqslant 1$$

donde $y_j(t) = c_j t_1^{a_{j1}}, \ldots, t_n^{a_{jn}}, j = m_{p-1} + 1, \ldots, m_p$.

Esto es, $\bar{g}_p(t) = \bar{c}_p t_1^{\bar{a}_{p1}}, \ldots, t_n^{\bar{a}_{pn}}$ con

$$\bar{c}_p = \prod_{j=m_{p-1}+1}^{m_p} \left(\frac{\varepsilon_j}{c_j}\right)^{\varepsilon_j} \quad ; \quad \bar{a}_{pi} = \sum_{j=m_{p-1}+1}^{m_p} \varepsilon_j(-a_{ji}) \quad , \quad i = 1, \ldots, n$$

Es inmediato, de la desigualdad de la Media Aritmético Geométrica, que:

$$g_p(t) \geqslant \frac{1}{\bar{g}_p(t)}$$

Entonces, si t' satisface la restricción $1 \geqslant \bar{g}_p(t')$, o bien

$$\frac{1}{g_p(t')} \geqslant 1$$

también se tiene que $g_p(t') \geqslant 1$. Luego $\bar{g}_p(t') \leqslant 1 \Rightarrow g_p(t') \geqslant 1$, y la relación existente entre los mínimos de ambos problemas es: $\bar{M} \geqslant M$.

El siguiente teorema proporciona un procedimiento para elegir adecuadamente los pesos ε_j.

Teorema: Si t' es una solución factible para el problema [I], entonces t' es también factible para el problema $[I_\varepsilon]$, con los pesos:

$$\varepsilon_j = \frac{y_j(t')}{g_p(t')} \, (m_{p-1} + 1 \leqslant j \leqslant m_p)$$

y la diferencia $\bar{M} - M$ se puede hacer tan pequeña como se desee.

Demostración

Dado $t'(>0)$ y los correspondientes pesos $\varepsilon_j = \dfrac{y_j(t')}{g_p(t')}$, de la desigualdad de la media aritmético-geométrica se tiene que:

$$y_{m_{p-1}+1} + \cdots + y_{m_p} \geqslant \left(\frac{y_{m_{p-1}+1}}{\varepsilon_{m_{p-1}+1}}\right)^{\varepsilon_{m_{p-1}+1}} \cdots \left(\frac{y_{m_p}}{\varepsilon_{m_p}}\right)^{\varepsilon_{m_p}}$$

esto es, $g_p(t') = [\bar{g}_p(t')]^{-1}$. Puesto que $g_p(t') \geqslant 1$, se prueba que $\bar{g}_p(t') \leqslant 1$; t' es una solución factible de $[\mathrm{I}_\varepsilon]$ y puesto que $[I]$ e $[I_\varepsilon]$ tienen la misma función objetivo, la diferencia $\bar{M} - M$ debe ser arbitrariamente pequeña. ■

Este teorema proporciona un procedimiento iterativo para la aproximación del mínimo M:

Si $[I_{\varepsilon^{(1)}}]$ se resuelve para una tupla inicial de pesos $\varepsilon^{(1)}_{m_{p-1}+1}, \ldots, \varepsilon^{(1)}_{m_p}$ y tenemos una estimación $\bar{M}_1$ inicial para el problema $[I]$, el mínimo $t_1^{(1)}$ se calcula resolviendo el sistema:

$$y_j(t^*) = \begin{cases} \delta_j^* g_0(t^*) & j = 1, \ldots, m_0 \\ \delta_j^*/\lambda_k(\delta^*) & j = m_{k-1}+1, \ldots, m_k;\ k = 1, \ldots, p \end{cases}$$

Utilizando este valor de $t^{(1)}$ estimamos los nuevos pesos $\varepsilon_j^{(2)}$:

$$\varepsilon_j^{(2)} = \frac{y_j(t^{(1)})}{g_p(t^{(1)})} \quad (m_{p-1} + 1 \leqslant j \leqslant m_p)$$

con los que resolvemos nuevamente el problema condensado $(P_{\varepsilon(2)})$ y obtenemos $\bar{M}_2$, etc. Reiteramos este procedimiento hasta que $|\bar{M}_{k-1} - \bar{M}_k| < \varepsilon$, para $\varepsilon > 0$ prefijado, de forma que la sucesión $\bar{M}_1$, $\bar{M}_2$, $\bar{M}_3$, ... converge a M.

Este procedimiento descrito, para el caso en que hubiera una única restricción de tipo inverso, se generaliza de forma inmediata para el caso de que exista más de una restricción de este tipo, aplicándolo directamente sobre cada una de las restricciones inversas de forma independiente.

3. EL PROBLEMA SIGNOMIAL COMO UN PROBLEMA GEOMETRICO INVERSO

Si analizamos con detalle el problema geométrico inverso y tenemos en cuenta que una restricción del tipo $g_k(t) \geqslant 1$ equivale a la expresión $-g_k(t) \leqslant -1$, se puede afirmar que este tipo de programa geométrico no es más que un caso particular del modelo signomial general que puede resolverse de una forma independiente que, a su vez, proporcionará un procedimiento de resolución para el caso signomial.

De modo general sea $g_k(t)$ una restricción cualquiera en el programa inverso; se dará una de las tres situaciones siguientes:

a) $g_k(t)$ es un posinomial: en este caso, el problema se reduce al caso geométrico usual, ya que estamos suponiendo que la función objetivo es también un posinomial.

b) $g_k(t)$ es un posinomial multiplicado por -1: $g_k(t) = -\bar{g}_k(t)$, con $\bar{g}_k(t)$ posinomial; luego $-\bar{g}_k(t) \leqslant 0$ y, trivialmente, se verifica que $g_k(t) \leqslant 1$, con lo cual esta restricción es redundante y puede eliminarse.

c) $g_k(t)$ es la diferencia entre dos posinomiales: reagrupando los términos con coeficientes positivos, se reescribe como:

$$g_k(t) = g_{k_1}(t) - g_{k_2}(t)$$

con $g_{k_1}(t)$ y $g_{k_2}(t)$ posinomiales. Ahora:

— Si la restricción $g_k(t) \leqslant 1$, tenemos:

$$g_{k_1} - g_{k_2} \leqslant 1 \quad \Rightarrow \quad g_{k_1} \leqslant 1 + g_{k_2},$$

e introduciendo una nueva variable positiva t_0 tal que:

$$g_{k_1}(t) \leqslant t_0 \leqslant 1 + g_{k_2}(t),$$

obtenemos, multiplicando por t_0^{-1}, dos restricciones equivalentes a la primera, una de ellas inversa:

$$t_0^{-1} g_{k_1}(t) \leqslant 1 \quad ; \quad t_0^{-1} + t_0^{-1} g_{k_2}(t) \geqslant 1$$

— Si la restricción $g_k(t) \leqslant -1$, de modo análogo se obtienen las dos restricciones:

$$t_0^{-1} g_{k_2}(t) \geqslant 1 \quad ; \quad t_0^{-1} + t_0^{-1} g_{k_1}(t) \leqslant 1.$$

Analizaremos ahora cómo transformamos la función objetivo del problema signomial $c_j(t)$. Dependerá de su signo:

a) Si el mínimo de $g_0(t)$ es positivo, el problema equivalente es:

$$\{\min s \ /g(t) \leqslant s \ ; \ s > 0, \ t > 0\}$$

o bien

$$\{\min s \ /f(t) = s^{-1}g(t) \leqslant 1; \ s > 0, \ t > 0\},$$

donde $f(t)$ es una restricción de tipo signomial que se tratará como hemos descrito anteriormente.

b) Si el mínimo de $g_0(t)$ es negativo el problema es equivalente a:

$$\{\max s \ /f(t) = g(t) + s \leqslant 0 \ ; \ s > 0, \ t > 0\},$$

o bien

$$\{\min s^{-1} \ /f(t) = g(t) + s \leqslant 0 \ ; \ s > 0, \ t > 0\}.$$

Si $f(t)$ es igual a un posinomial multiplicado por -1, es obvio que se satisface trivialmente y se ignora. Si es la diferencia entre dos posinomiales, $g_1(t)$ y $g_2(t)$, entonces:

$$f(t) = g_1(t) - g_2(t) \leqslant 0 \quad \Rightarrow \quad g_1(t) \leqslant g_2(t),$$

e introduciendo, con un procedimiento similar al desarrollado anteriormente, una variable positiva t_0 tal que: $g_1(t) \leqslant t_0 \leqslant g_2(t)$, obtenemos las restricciones equivalentes: $t_0^{-1}g_1(t) \leqslant 1$, $t_0^{-1}g_2(t) \geqslant 1$. De este modo, el problema signomial se transforma en uno geométrico inverso:

$$\{\min s^{-1} \ /t_0^{-1}g_1(t) \leqslant 1 \ ; \ t_0^{-1}g_2(t) \geqslant 1 \ ; \ s > 0, \ t > 0\}.$$

4. LA TECNICA DE CONDENSACION PARA PROBLEMAS GEOMETRICOS

Utilizamos la técnica de Condensación de posinomiales para transformar el problema Geométrico Inverso en un problema Geométrico Posinomial. Supongamos el problema [*P*] superconsistente (esto es, existe $t' > 0$ tal que $g_k(t') < 1 \ \forall k$), y consideremos un conjunto de pesos no negativos:

$$\varepsilon_{m_{k-1}+1}, \ldots, \varepsilon_{m_k} \quad \text{tales que} \quad \sum_{j=m_{k-1}+1}^{m_k} \varepsilon_j = 1.$$

Entonces, el *Problema Geométrico Condensado* $[P_\varepsilon]$ se obtiene sustituyendo alguna o todas las funciones

$$g_k(t) \quad \text{por} \quad \bar{g}_k(t) = \prod_{j=m_{k-1}+1}^{m_k} \left(\frac{y_i}{\varepsilon_j}\right)^{\varepsilon_j},$$

$(k = 1, \ldots, p)$, donde $y_j = c_j t_1^{a_{j1}} \ldots t_n^{a_{jn}}$. Es decir, $\bar{g}_k(t) = \bar{c}_k t_1^{\bar{a}_{k1}} \ldots t_n^{\bar{a}_{kn}}$ con

$$\bar{c}_k = \prod_{j=m_{k-1}+1}^{m_k} \left(\frac{c_j}{\varepsilon_j}\right)^{\varepsilon_j} \quad ; \quad \bar{a}_{ki} = \sum_{j=m_{k-1}+1}^{m_k} \varepsilon_j a_{ji}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Teorema: Supongamos que $[P]$ es superconsistente y alcanza un mínimo $M > 0$ en el punto t^*. Si los pesos del programa condensado $[P_\varepsilon]$ se eligen de forma que:

$$\varepsilon_j^* = \frac{y_j(t^*)}{g_k(t^*)} \quad (m_{k-1} + 1 \leqslant j \leqslant m_k)$$

entonces, el problema condensado $[P_\varepsilon]$ alcanza el mínimo $\bar{M}$ en t^* y además: $\bar{M} = M$.

Demostración

Por la desigualdad de la Media Aritmético Geométrica:

$$y_{m_{k-1}+1} + \cdots + y_{m_k} \geqslant \left(\frac{y_{m_{k-1}+1}}{\varepsilon_{m_{k-1}+1}}\right)^{\varepsilon_{m_{k-1}+1}} \cdots \left(\frac{y_{m_k}}{\varepsilon_{m_k}}\right)^{\varepsilon_{m_k}}$$

Por tanto, $g_k(t) \geqslant \bar{g}_k(t)$ y si un vector t' es factible para $[P]$, también lo es para $[P_\varepsilon]$ ya que $g_k(t') \leqslant 1$ implica que $\bar{g}_k(t') \leqslant 1$. De igual modo, se obtiene la relación entre los mínimos M del problema $[P]$ y $\bar{M}$ del problema $[P_\varepsilon]: M \geqslant \bar{M}$. Para cualquier conjunto de pesos no negativos que satisfagan la condición de normalidad

$$\sum_{j=m_{k-1}+1}^{m_k} \varepsilon_j = 1,$$

el mínimo del problema $[P_\varepsilon]$ proporcionará una cota inferior al mínimo del problema $[P]$. Se tratará de determinar cómo elegir estos pesos para que dichos mínimos coincidan.

Supongamos que resolvemos el problema para una tupla inicial de pesos

$$\varepsilon^{(1)}_{m_{k-1}+1}, \ldots, \varepsilon^{(1)}_{m_k},$$

y se obtiene una solución $(t_1^{(1)}, \ldots, t_n^{(1)})$ de $[P_{\varepsilon(1)}]$.

Elegimos nuevos valores para los pesos:

$$\varepsilon_j^{(2)} = \frac{y_i(t^{(1)})}{g_k(t^{(1)})}, \; (m_{k-1} + 1 \leqslant j \leqslant m_k)$$

y, con ellos, resolvemos nuevamente el problema condensado $[P_{\varepsilon(2)}]$, del que obtendremos una solución $t^{(2)}$, $\bar{M}_2$, que utilizaremos a su vez para calcular $\varepsilon_j^{(3)}$ y resolver $[P_{\varepsilon(3)}]$, obteniendo $t^{(3)}$, $\bar{M}_3$; y así sucesivamente.

Este proceso se repite hasta que $|\bar{M}_{k-1} - \bar{M}_k| < \varepsilon$, para $\varepsilon > 0$ tan pequeño como se quiera, de forma que la sucesión $\bar{M}_1$, $\bar{M}_2$, $\bar{M}_3$, ... converge al mínimo M. ■

Observación 1: Una primera consecuencia, que se deduce del procedimiento de resolución que muestra el teorema es que, al disminuir el número de posinomiales del problema, se rebaja su grado de dificultad.

Observación 2: Utilizando esta técnica de condensación se obtiene, como segunda consecuencia de interés, una transformación del problema Geométrico Inverso en un problema Posinomial.

5. APLICACION DE LA TECNICA DE CONDENSACION A LA FUNCION OBJETIVO

Supongamos, en general, el problema de optimización geométrico $[P]$ con grado de dificultad $d \geqslant 0$:

$$\{\min\, g_0(t) \;/ g_k(t) \leqslant 1,\, k = 1, \ldots, p;\, t > 0\}.$$

Si introducimos una variable, t_0 tal que $g_0(t) \leqslant t_0$, el problema equivalente que podemos formular es:

$$\left| \begin{array}{ll} \min & t_0 \\ \text{s. a} & g_k(t) \leqslant 1 \quad ; \quad k = 1, \ldots, p \\ & g_0(t) t_0^{-1} \leqslant 1 \\ & t > 0 \end{array} \right.$$

Observación 3: Con esta transformación no se modifica el grado de dificultad inicial del problema primal, puesto que la introducción de un nuevo posinomio (único en la nueva función objetivo) está compensada por una nueva variable, que añadimos al problema, t_0 (que no es más que el valor de la función objetivo, puesto que la restricción que ésta define se satisfará con igualdad en el óptimo).

Observación 4: En esta nueva situación la restricción $g_0(t)t_0^{-1} \leqslant 1$ puede tratarse como un posinomial más del conjunto restricciones primales, y aplicársele la técnica de condensación, de modo que se reduzca el grado de dificultad del problema original.

Observación 5: Nótese que este procedimiento es realmente eficaz cuando al aplicarlo conseguimos directamente un problema de grado de dificultad cero, que se podrá resolver iterando sobre los valores de los pesos que introduciremos en la condensación de los posinomiales y, en su caso, las restricciones de tipo inverso.

6. EL PROBLEMA AUMENTADO

Estudiaremos en este capartado un procedimiento de resolución para el caso geométrico posinomial que consiste en transformar el problema de grado de dificultad positivo en otro equivalente de grado cero.

Será preciso para el desarrollo teórico que se satisfagan algunas hipótesis previas en el problema geométrico:

i) El grado de dificultad es $d \geqslant 0$.
ii) La función objetivo contiene exactamente n términos posinomiales, tantos como variables primales.
iii) La matriz de exponentes tiene rango n.

iv) El sistema de restricciones primales contiene, al menos, una que se satisface con igualdad en el óptimo.

Nótese que según las hipótesis ii) y iii), el sistema lineal determinado por las restricciones duales de ortogonalidad posee tantas ecuaciones como variables duales y, por tanto, tiene solución única.

Ahora bien, podría suceder que esta primera condición no se cumpliera, y el número de términos posinomiales que incluye la función objetivo fuera menor o mayor que el de variables primales. Analizaremos estas dos posibilidades:

A) Si el número de posinomios en la función objetivo es mayor que el de variables primales, $m_0 > n$, definimos $m_0 - n$ nuevas variables t_{n+1}, ..., t_{m_0}, como posinomiales de la función objetivo que definan productos o cocientes entre las n variables primales: $y_j(t) = t_j$, $(j = n + 1, ..., m_0)$ e introduciremos una nueva restricción del tipo: $y_j(t)t_j^{-1} \leqslant 1$, $(j = n+1, ..., m_0)$.

Observación 6: Nótese que, de esta forma, se cumple la primera condición, a costa de aumentar el número de variables primales, aunque el grado de dificultad permanece invariante, ya que se incluyen tantos posinomiales en el sistema de restricciones como nuevas variables.

B) Si el número de posinomios en la función objetivo es menor que el de variables primales, $m_0 < n$, el problema es de inmediata solución, puesto que si el rango de la matriz de exponentes es menor que n, los vectores columna de esta matriz son linealmente dependientes, y puede ser particionada en una base para el espacio columna y un conjunto de vectores columna que dependan linealmente de los vectores de la base y que, por tanto, puedan ser eliminados sin afectar al mínimo del problema. En consecuencia, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que la matriz de exponentes tiene rango n.

Supongamos pues que se cumplen las hipótesis anteriores, el procedimiento para construir el problema aumentando consta de dos pasos fundamentales:

1) Multiplicar, cada término posinomial del sistema de restricciones primales, por una variable de holgura t_j $(j = n + 1, ..., m)$.

2) Añadir una nueva restricción, al sistema de restricciones primales, compuesta por el producto de todas las holguras que se han incluido en los posinomiales, afectadas de un exponente a determinar, menor o igual que -1.

Entonces, el *Problema Aumentado* se formula como:

$$\min \quad g_0(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j \prod_{i=1}^{n} t_i^{a_{ji}} \tag{1}$$

[A]

$$\text{s. a} \quad g_k(t) = \sum_{j=m_{k-1}+1}^{m_k} c_j \prod_{i=1}^{n} t_i^{a_{ji}} t_j \leqslant 1 \quad k = 1, \ldots, p \tag{2}$$

$$g_{p+1}(t) = \prod_{j=n+1}^{m} t_j^{b_j} \leqslant 1 \tag{3}$$

(4) $\quad t > 0$

donde:

$$c_j > 0 \ \forall j; \quad m_k > m_{k-1} \ \forall k; \quad a_{ji} \in \mathbb{R} \ \forall i, j;$$

$$b_j \leqslant -1 \ \forall j = n+1, \ldots, m; \quad m_p = m; \quad m_0 = n$$

Observación 7: En el problema aumentado hemos introducido una variable de holgura por cada posinomio en las restricciones, luego tenemos $m - n$ nuevas variables y, por haber incluido únicamente un nuevo posinomio (como nueva restricción), el número de posinomios es $m + 1$ y el de variables $n + (m - n) = m$; por tanto, su grado de dificultad es $d = m + 1 - (m + 1) = 0$.

Proposición: Si $t' = (t'_1, \ldots, t'_n, t'_{n+1}, \ldots, t'_m)$ es una solución del problema aumentado [A] y $t'_h = (t'_{n+1}, \ldots, t'_m)$ satisface que:

$$t'_j \geqslant 1 \quad (j = n+1, \ldots, m) \tag{5}$$

entonces, t' resuelve el problema primal [P].

Demostración

Supongamos que $g_{p+1} = \prod_{j=n+1}^{m} t_j^{b_j} \leqslant 1$ se reemplaza por $t'_j \geqslant 1$, $j = n+1, \ldots, m$ en el problema [A]. Entonces el problema dado por (1), (2), (4) y (5) es equivalente a [P].

Si t', t'_h resuelven (1), (2), (4) y (5), entonces t' resuelve el problema [P]. Puesto que $b'_j \leqslant -1$, $j = n+1, \ldots, m$, la restrición

$$g_{p+1}(t) = \prod_{j=n+1}^{m} t_j^{b_j} \leqslant 1$$

no es más restrictiva que (5), por tanto, si t', t'_h resuelve [A], entonces t'_h satisface (5) y resuelve [P]. ■

El problema *Dual del Aumentado* es el siguiente:

$$[DA] \quad \begin{aligned} \max \quad & v(\delta) = \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{c_j}{\delta_j}\right)^{\delta_j} \prod_{k=1}^{p} \lambda_k(\delta)^{\lambda_k(\delta)} \\ \text{s. a} \quad & \sum_{j=1}^{n} \delta_j = 1 \\ & \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\delta_j = 0 \quad i = 1, ..., n \\ & \delta_j + b_j\delta_{m+1} = 0 \quad j = n+1, ..., m \\ & \delta_j \geqslant 0 \quad \forall j \end{aligned}$$

con

$$\lambda_k(\delta) = \sum_{j=m_{k-1}+1}^{m_k} \delta_j \quad \forall k = 1, ..., p+1$$

Nótese que, efectuando si es preciso alguna operación elemental, la matriz de exponentes es triangular:

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 0 & \alpha_{1n+1} & \cdots & \alpha_{1m} & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & \alpha_{nn+1} & \cdots & \alpha_{nm} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \cdots & \cdots & b_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & b_m \end{bmatrix}$$

Entonces, puesto que además se satisface la restricción de normalidad $\sum_{j=1}^{n} \delta_j = 1$, el sistema de ecuaciones a resolver para determinar el valor de las variables duales es:

$$\begin{cases} \delta_{m+1} = 1 \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=n+1}^{m} \alpha_{ij} b_i \\ \delta_j = \delta_{m+1}\left(\sum_{i=n+1}^{m} \alpha_{ij} b_i \right) \quad (j = 1, ..., n) \\ \delta_j = -\delta_{m+1} b_j \quad (j = n + 1, ..., m) \end{cases}$$

Obsérvese que el vector dual δ está unívocamente determinado por los exponentes b_j; por tanto, éstos habrán de elegirse de modo que las variables duales satisfagan la última condición de no negatividad, $\delta_j \geqslant 0$ $\forall j$. Por ello, deberá verificarse que

$$\sum_{i=n+1}^{m} \alpha_{ij} b_i > 0, \quad (j = 1, ..., n) \quad \text{y además,} \quad b_i \leqslant -1.$$

El procedimiento de resolución consistirá en determinar los exponentes b_j, $(j = n + 1, ..., m)$, mediante un proceso iterativo en el que se eligen valores iniciales para los exponentes b_j, $\forall j$.

7. ALGORITMO PARA LA RESOLUCION DEL MODELO SIGNOMIAL

Para abordar el objetivo propuesto en este trabajo, utilizaremos todas las técnicas desarrolladas en los apartados anteriores para proponer un algoritmo que resuelva el modelo signomial.

Algoritmo

Paso 1: Transformar el problema signomial en un problema geométrico inerso efectuando los cambios descritos en el apartado 3 e introduciendo, si es preciso, alguna variable de holgura.

Paso 2: Transformar el problema geométrico inverso en un problema posinomial, utilizando para las restricciones inversas la conversión descrita en el apartado 2 con el conjunto de pesos $\varepsilon^{(q)}_{m_{k-1}+1}, ..., \varepsilon^{(q)}_{m_k}$ correspondientes a cada restricción inversa k, $(1 \leqslant k \leqslant p)$.

Paso 3: A fin de reducir el grado de dificultad del problema geométrico, ahora posinomial, aplicar la técnica de condensación descrita en el apartado 4 para posinomiales. De este modo obtenemos un problema geométrico condensado $P_{\varepsilon^{(q)}}$ para los pesos $\varepsilon^{(q)}_{m_{k-1}+1}, \ldots, \varepsilon^{(q)}_{m_k}$ correspondientes a las restricciones de tipo posinomial $(1 \leqslant k \leqslant p)$.

Si el problema condensado es de grado cero, ir al paso 11.

En otro caso ir al paso 4.

Paso 4: Hacer $q = 1$ y elegir valores iniciales para los pesos $\varepsilon^{(1)}_{m_{k-1}+1}, \ldots, \varepsilon^{(1)}_{m_k}$ tales que

$$\sum_{j=m_{k-1}+1}^{m_k} \varepsilon_j^{(1)} = 1 \quad , \quad (k = 1, \ldots, p)$$

Por ejemplo:

$$\varepsilon_j^{(1)} = \frac{1}{1 + m_k - (m_{k-1} + 1)} \quad , \quad \forall j$$

Si la función objetivo posee exactamente n términos posinomiales, es decir, tantos como variables primales, y la matriz de exponentes tiene rango n, ir al paso 5.

En otro caso, modificar convenientemente la función objetivo introduciendo nuevas variables, hasta que se cumpla la condición anterior.

Paso 5: Multiplicar cada término posinomial del sistema de restricciones primales por una variable de holgura t_j $(j = n + 1, \ldots, m)$ y añadir una nueva restricción al sistema de restricciones primales compuesta por el producto de todas estas holguras, afectadas de un exponente a determinar, $b_j \leqslant -1$.

Esto es, la nueva restricción:

$$g_{p+1}(t) = \prod_{j=n+1}^{m} [t_j]^{b_j} \leqslant 1$$

En este punto, el problema tiene grado de dificultad cero.

Hacer $r = 0$ y elegir, por ejemplo, $b_j^{(1)} = -1$, $\forall j$.

Paso 6: Hacer $r = r + 1$. Hallar una solución para el vector dual $\delta^{(r)}$:

$$\begin{cases} \delta_{m+1}^{(r)} = 1 \Big/ \sum\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{i=n+1}^{m} \alpha_{ij}(\varepsilon^{(q)}) \mathrm{b}_i^{(r)} \\ \delta_j^{(r)} = \delta_{m+1}^{(r)} \left(\sum\limits_{i=n+1}^{m} \alpha_{ij}(\varepsilon^{(q)}) \mathrm{b}_i^{(r)} \right) & \mathrm{j} = 1, \ldots, \mathrm{n} \\ \delta_j^{(r)} = -\delta_{m+1}^{(r)} \mathrm{b}_j^{(r)} & \mathrm{j} = \mathrm{n} + 1, \ldots, \mathrm{m} \end{cases}$$

Para este valor de $\delta^{(r)}$, hallar el valor de la función objetivo dual $v^{(r)}(\delta)$, o lo que es lo mismo, de la función objetivo primal $g_0^{(r)}(t)$.

Paso 7: Tomar logaritmos, si es preciso, y obtener los valores de las variables primales $t^{(r)}$ del sistema:

$$\begin{cases} c_j \prod\limits_{i=1}^{n} [t_i^{(r)}]^{a_{ji}} = \delta_j^{(r)} v_0^{(r)}(\delta) & j = 1, \ldots, n \\ c_j \prod\limits_{i=1}^{n} [t_i^{(r)}]^{a_{ji}} t_j^{(r)} = \delta_j^{(r)} / \lambda_k^{(r)}(\delta) & j = m_{k-1} + 1, \ldots, m_k,\ k = 1, \ldots, p+1,\ m_0 = n \end{cases}$$

donde los valores de c_j y a_{ji} dependen de $\varepsilon^{(q)}$.

Paso 8: Si $t_j^{(r)}$ satisface: $t_j^{(r)} \geqslant 1 - \varepsilon$ $(j = n + 1, \ldots, m)$ para ε suficientemente pequeño, estamos en óptimo: hacer $M^{(q)} = g_0^*(t^{(r)}) = g_0^*(t^{(q)})$ e ir al paso 9. En otro caso, sea $t_s^{(r)}$ la más pequeña de las variables de holgura menor que la unidad. Hacer:

$$\begin{cases} b_s^{(r+1)} = b_s^{(r)} / t_s^{(r)} & n + 1 \leqslant s \leqslant m \\ b_j^{(r+1)} = b_j^{(r)} & \text{para el resto} \end{cases}$$

Ir al paso 6.

Paso 9: Si $q = 1$, *hacer* $q = q + 1$, y elegir

$$\varepsilon_j^{(2)} = \frac{\mathrm{y}_j(\mathrm{t}^{(1)})}{\mathrm{g}_k(\mathrm{t}^{(1)})} \quad (j = m_{k-1} + 1, \ldots, m_k;\ 1 \leqslant k \leqslant p)$$

Ir al paso 6.
Si $q > 1$ ir al paso 10.

Paso 10: Si $|\mathrm{M}^{(q)} - \mathrm{M}^{(q-1)}| < \varepsilon$, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, parar.
La solución óptima es $(M^{(q)}, t^{(q)})$.

En otro caso, hacer $q = q + 1$, y elegir

$$\varepsilon_j^{(q)} = \frac{y_j(t^{(q-1)})}{g_k(t^{(q-1)})}$$

Ir al paso 6.

Paso 11: Hacer $q = 1$ y elegir valores iniciales para los pesos $\varepsilon_{m_{k-1}+1}^{(1)}$, ..., $\varepsilon_{m_k}^{(1)}$ tales que

$$\sum_{j=m_{k-1}+1}^{m_k} \varepsilon_j^{(1)} = 1 \quad (k = 1, ..., p)$$

Se puede tomar:

$$\varepsilon_j^{(1)} = \frac{1}{1 + m_k - (m_{k-1} + 1)} \quad \forall j$$

Paso 12: Resolver el problema (con grado cero) de la forma habitual, con el valor para los pesos de $\varepsilon_j^{(q)}$. Sea la solución óptima $g_0^*(t^{(q)}) = M^{(q)}$.

Paso 13: Si $q = 1$, hacer $q = q + 1$ y elegir

$$\varepsilon_j^{(2)} = \frac{y_j(t^{(1)})}{g_k(t^{(1)})} \quad (j = m_{k-1} + 1, ..., m_k;\ 1 \leqslant k \leqslant p)$$

e ir al paso 12.

Si $q > 1$, ir al paso 14.

Paso 14: Si $|M^{(q)} - M^{(q-1)}| < \varepsilon$, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, parar.

La solución óptima es $(M^{(q)}, t^{(q)})$.

En otro caso, hacer $q = q + 1$ y elegir

$$\varepsilon_j^{(q)} = \frac{y_j(t^{(q-1)})}{g_k(t^{(q-1)})}$$

Ir al paso 12.

8. JUSTIFICACION TEORICA

La convergencia del algoritmo depende , en el paso 8, de que todas las variables de holgura satisfagan la condición (5): $t'_j \geqslant 1$ $(j = n + 1, ..., m)$.

Supongamos que una o más componentes t'_j violan esta condición.

Se elige, siguiendo el algoritmo, la más pequeña de estas variables de holgura menor que la unidad, y se aumenta el valor absoluto del exponente b_s hasta obtener un nuevo valor según la regla:

$$b_s'' = b_s'/t_s' \quad (n + 1 \leqslant s \leqslant m)$$

El nuevo vector b'' obtenido se lleva al problema [A] y se resuelve para t', continuando este proceso hasta que todas las variables de holgura satisfacen $t_j^* \geqslant 1 - \varepsilon$, para ε prefijado. Es evidente que si t^0 es el óptimo de [P], se satisface que $g_0(t^*) \approx g_0(t^0)$ cuando se verifica la desigualdad anterior para cualquier ε.

Para explicar mejor el papel que juegan los exponentes b_j, consideremos la Lagrangiana asociada al problema [A]:

$$L = g_0(t) + \sum_{k=1}^{p} \mu_k[g_k(t, t_h) - 1] + \mu_{k+1}[g_{p+1}(t_h) - 1]$$

donde $t = (t_1, ..., t_n)$ y $t_h = (t_{n+1}, ..., t_m)$ representa el vector de holguras.

Las condiciones necesarias que debe satisfacer en un punto extremo serán:

$$\partial L/\partial t_j = g_0^j(t) + \sum_{k=1}^{p} \mu_k g_k^j(t, t_h) = 0 \quad , \quad j = 1, ..., n \tag{6}$$

$$\partial L/\partial t_j = \mu_k c_j t_1^{a_{j1}}, ..., t_n^{a_{jn}} + \mu_{p+1} g_{p+1}^j(t_h) = 0 \quad , \quad j = n + 1, ..., m \tag{7}$$

$$\partial L/\partial \mu_k = g_{p+1}(t, t_h) - 1 = 0 \quad , \quad k = 1, ..., p \tag{8}$$

$$\partial L/\partial \mu_{k+1} = g_{p+1}(t_h) - 1 = 0 \tag{9}$$

Sustituyendo (9) en (7):

$$\partial L/\partial t_j = \mu_k c_j t_n^{a_{jn}} + (\mu_{p+1} b_j)/t_j = 0 \quad , \quad j = n + 1, ..., m \tag{10}$$

Sumando esta expresión en j y teniendo en cuenta (8):

$$\mu_k = -\mu_{p+1} \sum_{j=m_{k-1}+1}^{m_k} b_j \quad , \quad k = 1, ..., p \tag{11}$$

En consecuencia, el valor relativo de los multiplicadores de Lagrange μ_k está determinado por los exponentes b_j asociados a cada iteración k. Si el valor de alguna variable de holgura t_r en la restricción w es menor que la unidad, incrementando el valor absoluto del exponente b_r, incrementaremos el valor absoluto del multiplicador μ_w. Un incremento en este valor influye directamente sobre cómo se satisface la restricción w.

Por otra parte, de (9) tenemos que cualquier solución óptima de $[A]$ satisfará:

$$t_r = \prod_{i=n+1}^{m} t_i^{\alpha_i}$$

donde $\alpha_i = b_i/b_r$ y, por tanto, según aumenta el valor absoluto del exponente b_r, la holgura t_r se aproxima a la unidad: $\lim_{|b_r| \to \infty} t_r = 1$.

De la ecuación (10), obtenemos:

$$\mu_k c_j t_1^{a_{j1}}, ..., t_n^{a_{jn}} t_j = -\mu_{p+1} b_j \quad , \quad j = n+1, ..., m$$

y, teniendo en cuenta el resultado de (11):

$$c_j t_1^{a_{j1}}, ..., t_n^{a_{jn}} t_j = b_j \Big/ \sum_{j=m_{k-1}+1}^{m_k} b_j \quad , \quad j = n+1, ..., m$$

Si t' y t'_h son una solución del problema $[A]$ y suponemos que $t_r < 1 - \varepsilon$, $n + 1 \leqslant r \leqslant m$, entonces:

$$c_r t_1^{a_{r1}}, ..., t_n^{a_{rn}} t'_r = b'_r \Big/ \sum_{j=m_{k-1}+1}^{m_k} b'_j$$

Una estimación de un nuevo valor de b_r tal que t''_r satisface (5) estará dada por:

$$b''_r = c_r t_1^{a_{r1}}, ..., t_n^{a_{rn}} \sum_{j=m_{k-1}+1}^{m_k} b'_j = b'_r/t'_r$$

REFERENCIAS

1. ALLUEVA, A. (1989): *Problemas Notables en Programación Geométrica Estocástica. Aplicaciones en Economía Agraria.* Tesis Doctoral. Universidad de Zaragoza.

2. ALLUEVA, A., y PEREZ, A. (1989): «Sobre la reducción del grado de dificultad en problemas de Programación Geométrica Signomial», *Actas XIV Jornadas Hispano Lusas de Matemáticas*, 745-752.

3. DINKEL, J. J., y KOCHENBERGUER, G. A. (1979): «Some remarks on condensation methods for Geometric Programs», *Mathematical Programming*, 17(1), 109-113.

4. DUFFIN, R. J.; PETERSON, E., y ZENER, C. (1967): *Geometric Programming*, Wiley.

5. DUFFIN, R. J., y PETERSON, E. (1973): «Geometric Programming with Signomials», *Journal of Optimizaqtion. Theory and Applications*, 11, 3-35.

6. ECKER, J. G. (1980): «Geometric Programming Methods, computation and applications», *SIAM Rev.*, 22(3), 338-362.

7. HAYES, P. (1975): *Mathematical Methods in the social and Managerial Sciences*, Wiley.

8. McNAMARA, J. (1976): «A Solution Procedure for Geometric Programming», *Operations Research*, 24, 15-25.