TRABAJOS DE INVESTIGACION OPERATIVA
Vol. 7, núm. 1, 1992, pp. 87 a 93

UN NUEVO ALGORITMO PARA LA RESOLUCION DE JUEGOS BIMATRICIALES*

L. MÉNDEZ NAYA
Depto. de Econometría y Métodos Cuantitativos
Facultad de Ciencias Económicas
Universidad de Santiago de Compostela

RESUMEN

En este artículo se da un nuevo algoritmo para la resolución de juegos bimatriciales basado en encontrar las respuestas óptimas a las estrategias de cada jugador. El desarrollo del algoritmo se basa en un teorema de convexidad que se demuestra en el artículo.
Palabras clave: Juego bimatricial, equilibrio de Nash, respuestas óptimas, poliedros.
Clasificación AMS (1991): 90D10.

SUMMARY

In this paper we propose a new algorithm to solve bimatrix games based in the search of the best replies to each player's strategies. The devolopement of the algorithm is based on a convexity theorem which is proved in the paper.

1. INTRODUCCION

Son varios los algoritmos descritos en la literatura para la resolución de un juego bimatricial. A modo de ejemplo, podríamos citar los dados por Vorob'ev (1958), Mills (1960), Kuhn (1961) y Winkels (1979). No obstante, el interés de estos métodos es esencialmente teórico. Un algo-

Recibido: Noviembre 1991.
Revisado: Enero 1992.
* Premio de Investigación Fundación «Ramiro Melendreras» (XIX Reunión Nacional de la S.E.I.O., Segovia, marzo 1991).

ritmo eficiente para el cálculo de un punto de equilibrio en un juego bimatricial es el dado por Lemke y Howson (1964). En este artículo damos un algoritmo para el cálculo de todo el conjunto de puntos de equilibrio de un juego bimatricial, basado esencialmente en la búsqueda de las respuestas óptimas a las estrategias de cada uno de los jugadores. El eje del artículo es un teorema de convexidad, el cual hace que en la práctica este método sea fácil de aplicar.

2. PRELIMINARES

Comenzamos introduciendo una serie de conceptos básicos en el contexto de los juegos bimatriciales que van a ser el objeto de nuestro estudio.

Sean X e Y conjuntos finitos y K_1, K_2 aplicaciones de $X \times Y$ en $\mathbb{R}$. Un juego bipersonal finito en forma normal es la cuadrupla (X, Y, K_1, K_2). Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $X = \{1, 2, ..., m\} =: \mathbb{N}_m$ e $Y = \{1, 2, ..., n\} =: \mathbb{N}_n$; en cuyo caso podemos representar la función K_1 (K_2) por la matriz de dimensión $m \times n$, A (B) siendo $a_{ij} = K_1(i, j)$ $(b_{ij} = K_2(i, j))$. Con la nueva notación el juego se representaría por la cuadrupla $(\mathbb{N}_m, \mathbb{N}_n, K_1, K_2)$, este juego lo denotaremos por (A, B). Un punto (i_0, j_0) es un punto de equilibrio del juego si, y sólo si, $\forall i \in \mathbb{N}_m$ y $\forall j \in \mathbb{N}_n$ se verifica $a_{ij_0} \leqslant a_{i_0j_0}$ y $b_{i_0j} \leqslant b_{i_0j_0}$. En general no tenemos garantizado que todo juego bimatricial tenga algún punto de equilibrio, por ello es necesario aumentar las estrategias posibles de cada jugador introduciendo el concepto de extensión mixta de un juego bimatricial. Sea pues, (A, B) un juego bimatricial y supongamos que los jugadores pueden aleatorizar sus estrategias y elegir todas las distribuciones de probabilidad sobre los conjuntos $\mathbb{N}_m$ y $\mathbb{N}_n$. De este modo, cada estrategia del primer (segundo) jugador será un m-tupla (n-tupla) de números positivos $(p_1, p_2, ..., p_m)$ $((q_1, q_2, ..., q_n))$ de manera que la probabilidad de que el primer (segundo) jugador elija la estrategia i (j) es p_i (q_i). Definimos para cada par de estrategias aleatorizadas (p, q) el pago a cada uno de los jugadores como el pago medio, es decir:

$$K_1(p, q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i a_{ij} q_j = p^t A q \quad , \quad K_2(p, q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i b_{ij} q_j = p^t B q$$

En lo sucesivo, cometiendo un cierto abuso de lenguaje, identificaremos un juego bimatricial con su extensión mixta. Llamaremos, pues, juego bimatricial (A, B) al juego $\Gamma = \langle S_m, S_n, K_1, K_2 \rangle$ en donde S_m y S_n son los simplex m-dimensional y n-dimensional respectivamente. Diremos que un par $(\bar{p}, \bar{q}) \in S_m \times S_n$ es un punto de equilibrio del juego bimatricial Γ si:

$$\bar{p}A\bar{q} = \max_{p \in S_m} pA\bar{q} \quad ; \quad \bar{p}B\bar{q} = \max_{q \in S_n} \bar{p}Bq$$

El conjunto de puntos de equilibrio del juego (A, B) lo denotaremos por $E(A, B)$. Damos a continuación una conocida caracterización de los puntos de equilibrio de un juego bimatricial.

Lema 1. Sea (A, B) un juego bimatricial y sea $(p, q) \in S_m \times S_n$. Entonces $(p, q) \in E(A, B)$ si, y sólo si, $C(p) \subseteq M(A, q)$ y $C(q) \subseteq M(p, B)$ en donde

$$C(p) := \{i \in \mathbb{N}_m / p_i > 0\} \quad \text{(carrera de } p)$$

$$C(q) := \{j \in \mathbb{N}_n / q_j > 0\} \quad \text{(carrera de } q)$$

$$M(A, q) := \{i \in \mathbb{N}_m / e_i A q = \max_{1 \leqslant k \leqslant m} e_k A q\}$$

$$M(p, B) := \{j \in \mathbb{N}_n / pBe_j = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} pBe_k\}$$

3. TEOREMA FUNDAMENTAL

En este apartado, enunciamos y demostramos el teorema en torno al cual gira el artículo. Este teorema nos da una forma sencilla de calcular todos los puntos extremos de un conjunto convexo en los cuales se anula o es positiva una forma lineal.

Teorema 1. Sea $L \subset \mathbb{R}^n$, $L = EC(\{q_1, \ldots, q_s\})$ y sea $x \in \mathbb{R}^n$, $U := \{q \in \mathbb{R}^n / q^t x = 0\}$, entonces:

$$H := L \cap U = EC(\{q_{ij} / i \in I, j \in J\} \cup \{q_k / k \in K\})$$

en donde por $EC(Z)$ representamos la envoltura convexa del conjunto Z,

$$I := \{i / 1 \leqslant i \leqslant s \quad , \quad q_i x > 0\}$$

$$J := \{j / 1 \leqslant j \leqslant s \quad , \quad q_j x < 0\}$$

$$K := \{k / 1 \leqslant k \leqslant s \quad , \quad q_k x = 0\}$$

$q_{ij} := \lambda q_i + (1 - \lambda) q_j$, siendo $\lambda \in [0, 1]$ tal que $x q_{ij} = 0$.

Demostración

H es un poliedro y si consideramos la definición de cara dada por Goldman y Tucker (1956), sabemos que H se puede poner como unión disjunta de sus caras. Si C es una cara de L en el sentido de Goldman y Tucker y $C \cap U \neq \phi$ entonces dim $(C \cap H) \geqslant$ dim $(C) - 1$, en consecuencia sólo los vértices de L contenidos en U y las caras que son segmentos de L, no contenidos en U y que tienen intersección no vacía con U, pueden dar lugar a puntos extremos de H, lo que prueba el resultado. ■

Como consecuencia inmediata del teorema deducimos el siguiente corolario.

Corolario1: En las condiciones del teorema se tiene que

$$T: = \{q \in \mathbb{R}^n / q^t x \geqslant 0\} = EC(H \cup \{q_i / i \in I\})$$

Observación: Dado $L \subset \mathbb{R}^n$, $L = EC(q_1, q_2, ..., q_d)$ y $x \in \mathbb{R}^n$, el cálculo de los puntos extremos de los conjuntos H y T, aplicando el teorema se realiza del siguiente modo:

1. Se calculan los conjuntos I, J, K, sin más que observar el valor de $q_i x$ $\forall i \in \mathbb{N}_s$.
2. $\forall i \in I$, $\forall j \in J$ se calculan q_{ij} resolviendo el sistema en λ

$$\lambda x q_i + (1 - \lambda) x q_j = 0$$

3. Se aplica el teorema.

Con este método se calculan todos los puntos extremos de H y T, sin embargo pueden aparecer puntos que no son extremos de estos conjuntos pero esto no supone más inconveniente que posibles cálculos innecesarios.

4. DESCRIPCION DEL ALGORITMO

Veamos para cada $S \subset \mathbb{N}_m$ como se pueden calcular todos los puntos de equilibrio (p, q) tales que $C(p) = S$. Sin pérdida de generalidad, buscaremos los pares (p, q) tales que p da probabilidad positiva únicamente a sus s primeras estrategias, por lo tanto, $S = \{1, 2, ..., s\}$.

Paso 1. Se comienza el algoritmo buscando el conjunto

$$\begin{aligned} A := & \{q \in S_n / S \subset M(A, q)\} = \\ & = \{q \in S_n / a_1 q = a_2 q ... = a_s q \geqslant a_k q \ \forall k \in \mathbb{N}_m - S\} \end{aligned}$$

para ello calculamos primero los puntos extremos de

$$A_{12} = \{q \in S_n / a_1 q = a_2 q\}$$

conjunto que se obtiene fácilmente aplicando el teorema 1 con $L = S_m$ y $x = (a_1 - a_2)$. Si aplicamos nuevamente el teorema 1 ahora con $L = A_{12}$ y $x = (a_1 - a_3)$ obtenemos

$$A_{123} = \{q \in S_n / a_1 q = a_2 q = a_3 q\}$$

Iterativamente podríamos obtener

$$A_{12...s} = \{q \in S_n / a_1 q = aq = \cdots = a_s q\}$$

Aplicando ahora el corolario 1 con $L = A_{12...s}$ y $x = (a_s - a_{s+1})$ obtendríamos

$$A_{12...ss+1} = \{q \in s_n / a_1 q = a_2 q = \cdots = a_s q \geqslant a_{s+1} q\}$$

Iterativamente se obtiene $A_{12...ss+1...m} = A$, conjunto que podemos expresar como $A = EC(\{q_1, q_2, ..., q_t\})$.

Paso 2. Consideramos ahora todos los subconjuntos de $\mathbb{N}_t$. Como antes, con el fin de hacer más simple la notación consideraremos un subconjunto de $\mathbb{N}_t$ del tipo $K = \{1, 2, ..., f\}$ con $f \leqslant t$.

Sean pues $q_1, q_2, ..., q_f$ puntos extremos de A y sea

$$V := C(q_1) \cup C(q_2) \cup \cdots \cup C(q_f)$$

siguiendo el mismo sistema que el seguido en el primer paso, se obtiene fácilmente el conjunto

$$C_v := \begin{Bmatrix} p \in S_s / pb^i = pb^j \ \forall i, j \in V \\ pb^i \geqslant pb^k \ \forall i \in V, \ \forall k \in N_t \end{Bmatrix}$$

Veamos ahora que $C_v \times EC(\{q_1, q_2, ..., q_f\}) \subset E(A, B)$, sea $p \in C_v$ y sea $q \in EC(\{q_1, q_2, ..., q_f\})$, por ser $q \in A$, $C(p) \subset M(A, q)$ y por ser $p \in C_v$, $C(q) \subset M(p, B)$.

Damos ahora el teorema que nos garantiza que usando este método se pueden calcular todos los puntos de equilibrio de un juego bimatricial.

Teorema 2. El algoritmo anteriormente descrito nos da todos los puntos (p, q) ∈ E(A, B) tales que C(p) = S.

Demostración

Sea $(p, q) \in E(A, B)$ tal que $C(p) = S$. Obviamente, a la vista del lema 1, tiene que ser $S \subset M(A, q)$ y, por lo tanto

$$q \in A = EC(\{q_1, q_2, ..., q_t\})$$

y en consecuencia existe Z subconjunto minimal de $\mathbb{N}_t$, tal que

$$q \in EC(\{q_z / z \in Z\})$$

Como $p \in M(A, q)$, tiene que ser $p \in C_z$, por lo tanto

$$(p, q) \in C_z \times EC(\{q_z / z \in Z\})$$

y de este modo el par (p, q) aparecería en el desarrollo del algoritmo. Obviamente, recorriendo todos los subconjuntos S de $\mathbb{N}_m$ se obtendría $E(A, B)$. ■

Observación: Aunque en apariencia el algoritmo resulta largo y laborioso, en la práctica muchos de los subconjuntos definidos en él resultan vacíos, lo cual simplifica notoriamente los cálculos, como se puede ver en la siguiente aplicación a un juego concreto.

Ejemplo: Sea el juego bimatricial (A, B) con matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

aplicaremos el algoritmo a la resolución de este juego. Comenzamos considerando $S = \{1\}$. *Aplicando el teorema* 1 *con*

$$x = (a_1 - a_2) = (1, -1, -2, -1) \quad \text{y} \quad L = S_4$$

se obtiene

$$A_{12} = EC\left(\left\{e_1, \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2, \frac{2}{3}e_1 + \frac{1}{3}e_3, \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_4\right\}\right)$$

de forma similar se pueden obtener A_{123} y $A = A_{1234}$, haciendo los cálculos se tiene que

$$A_{123} = A_{12} \quad ; \quad A = \{(1, 0, 0, 0)\}$$

y de este modo el único subconjunto de los puntos extremos de A que podemos considerar es $\{(1, 0;, 0, 0)\}$ y para él se tiene que $V = \{1\}$. El siguiente paso es el cálculo de C_v, que en este caso es

$$C_v = \{(1, 0, 0, 0)\}$$

y de este modo, el único punto de equilibrio (p, q) con $C(p) = 1$ es ((1, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 0)). De modo similar se aplicaría el algoritmo a los restantes subconjuntos de $\mathbb{N}_4$ obteniéndose

$$E(A, B) = \Bigg\{(e_1, e_1), e_2 \times EC(\{e_2, e_3, e_4\}), (e_3, e_1), (e_4, e_4), EC(\{e_1, e_3\}) \times e_1, EC\left(\left\{\frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_4, e_1\right\}\right) \times e_1, EC(\{e_2, e_4\}) \times e_4, EC\left(\left\{\frac{1}{2}e_3 + \frac{1}{2}e_4, e_3\right\}\right) \times e_1\Bigg\}$$

REFERENCIAS

GARCIA LAGUNA, J. (1991): «Una generalización de la caracterización de puntos extremos», *Trabajos de Investigación Operativa*, 6, 71-82, 1991.

KUHN, H. W. (1961): «An algorithm for equilibium points in bimatrix games», *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 47, 1556-1662.

LEMKE, C. E., y HOWSON, J. T., (1974): «Equilibrium points of bimatrix games», *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, 12, 413-423.

MILLS, H. (1960): «Equilibrium points in finite games», *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, 8, 397-402.

VOROB'EV, N. N. (1958): «Equilibrium points in bimatrix games», *Theory Probability Appl.*, 3, 297-309.

WINKELS, H. M. (1979): «An algorithm to determine all equilibrium points of a bimatrix game», pp. 137-148, en O. Moeschlin y D. Pallaschki (eds.), *Game Theory and related topics*, North-Holland, Amsterdam.