TRABAJOS DE INVESTIGACION OPERATIVA
Vol. 7, núm. 1, 1992, pp. 17 a 29

ANALISIS DE SENSIBILIDAD DE LAS SOLUCIONES DEL PROBLEMA LINEAL MULTIPLE ORDENADO

F. R. FERNÁNDEZ GARCÍA Y J. PUERTO ALBANDOZ
Depto. de Estadística e I. O.
Universidad de Sevilla. Spain

RESUMEN

Partiendo del problema de programación lineal multiobjetivo bajo incertidumbre y definiendo la utilidad de una decisión factible x, como el k-ésimo valor ordenado del vector $(c^1x, c^2x, ..., c^px)$, estudiamos en este trabajo el problema múltiple planteado en el caso de un conocimiento incompleto de los objetivos, así como la sensibilidad de una solución óptima en relación con dicho conocimiento parcial.
Palabras clave: Programación Lineal, Teoría de Decisión, Análisis de Sensibilidad.
Clasificación AMS: 90C05, 62C99.

ABSTRACT

In this paper we present the *Ordered Multiobjective Linear Programming*, where the utility function in x, is given by the k-th lowest value of the vector $(c^1x, c^2x, ..., c^px)$. We study the problem in the case of partial knowledge of the objectives and make sensitivity analysis of optimal solutions and regions under this formulation with partial knowledge.
Key words: Vector Linear Programming, Decision Theory, Sensitivity Analysis.
AMS Clasification: 90C05, 62C99.

Recibido: Marzo 1991.
Revisado: Enero 1992.

1. INTRODUCCION

Los criterios de decisión en ambiente de incertidumbre Milnor (1954), cuando se emplean para resolver el problema de programación lineal múltiple

$$(P) \quad \text{«Optimizar»} \quad \{c^1x, c^2x, ..., c^px\} \quad \text{sujeto a} \quad Ax \leqslant b \quad , \quad x \geqslant 0$$

presentan la dificultad de proporcionar un único punto eficiente, por lo que se han realizado generalizaciones de los mismos para que como resultado de estudios paramétricos se obtengan todos los puntos eficientes del problema (P). En esta dirección encontramos en la literatura, al trabajar con el criterio minimax o minimin, desarrollos que conducen a los procedimientos de Tchebycheff de Steuer y Choo (1983).

En la misma línea el criterio introducido por Puerto (1990), consigue el conjunto de puntos eficientes del problema lineal multiobjetivo al ponderar los objetivos c^ix, $i = 1, ..., p$ y escoger la mejor decisión como generalización de los criterios de Wald (1950). Este presenta la dificultad sobre los criterios clásicos (primero y último), de que la función de utilidad no es convexa, aunque su optimización puede ser estudiada al ser lineal sobre regiones convexas del espacio de alternativas.

Dicho criterio está estrechamente relacionado, y éste es el propósito del presente trabajo, con el problema lineal multiobjetivo con conocimiento incompleto, el que siguiendo a Kmietowicz y Pearman (1981) se define como un problema en el que existe un cierto orden de preferencia entre los objetivos (importancia ordinal), sin que podamos determinar los pesos de importancia de los mismos (importancia cardinal entre objetivos).

El objetivo de este trabajo es el estudio de la sensibilidad de las variaciones ordinales de los objetivos de (P), según los cambios en las valoraciones de la solución del problema lineal ordenado. Lo que supone un análisis de sensibilidad de una solución asociada a un orden dado entre objetivos.

El trabajo consta de tres partes. En la primera de ellas formulamos el problema lineal ordenado, en la segunda se estudia la sensibilidad de las soluciones y regiones ordenadas para este problema, presentando en la tercera un algoritmo para la enumeración de las regiones óptimas del mismo.

2. PROBLEMA LINEAL ORDENADO

En el proceso de destacar una solución eficiente del problema multiobjetivo:

$$\text{«max»} \; \{c^1x, c^2x, ..., c^px\} \quad \text{sujeto a} \quad Ax \leqslant b \quad , \quad x \geqslant 0 \quad (P)$$

siendo $C = (c^1, c^2, ..., c^p)^t \in \mathbb{M}_{p \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{M}_{m \times n}$.

Consideremos la función de utilidad asociada al criterio k-ésimo:

$$U_k(x) = c^{\sigma_k}x \quad \text{siendo} \quad c^{\sigma_1}x \leqslant c^{\sigma_2}x \leqslant \cdots \leqslant c^{\sigma_p}x$$

Nótese que para el elemento x, la función está valorada por alguno de los p-criterios.

Definimos el problema de programación lineal ordenado con el criterio k-ésimo, P_k como

$$\max \; U_k(x) \quad \text{sujeto a} \quad Ax \leqslant b \quad , \quad x \geqslant 0 \quad (P_k)$$

Este es un problema de programación no convexa, con restricciones lineales. No obstante puede demostrarse fácilmente que este problema es lineal sobre ciertas particiones de $\mathbb{R}^n$, aunque en cada una de ellas la función objetivo sea diferente. La solución de este problema se consigue con un algoritmo enumerativo de búsqueda en profundidad en árboles con sondeo sobre las soluciones (Puerto, 1990).

Especial importancia tiene el estudiar las soluciones del problema (P) que verifiquen un cierto orden entre los objetivos: $c^{\sigma_1}x \leqslant c^{\sigma_2}x \leqslant \cdots \leqslant \leqslant c^{\sigma_p}x$, donde $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_p) \in \text{Perm}\ (1..p)$ conjunto de permutaciones de los índices $1..p$. Esta formulación se conoce en la literatura como problema múltiple con información parcial y lo representamos por $(P; c^{\sigma_1}, c^{\sigma_2}, ..., c^{\sigma_p})$. Igualmente importante resulta el establecer intervalos de variación de la solución y su función objetivo, bajo los cuales no se modifique el orden, o que a lo sumo produzcan cambios entre *órdenes consecutivos.*

Para dar solución a este problema se suelen emplear criterios de tipo lexicográfico, pero esta aproximación tiene el inconveniente de trabajar sólo con objetivos extremos; por lo que proponemos emplear el criterio k-ésimo. Al desear optimizar dicho objetivo diremos estar considerando el problema $(P;\ c^{\sigma_1},\ ...,\ c^{\sigma_p};\ c^{\sigma_k})$ y denotamos su solución $x(P; c^{\sigma_1}, ..., c^{\sigma_p}; c^{\sigma_k})$. Esta solución conlleva una ordenación σ de las funciones objetivo del problema (P) y determina una región ordenada, S_σ, dada por el conjunto de puntos

$$S_\sigma = S \cap C_\sigma$$

siendo $C_\sigma = \{x \in \mathbb{R}^n\colon\ C^{\sigma_1} - C^{\sigma_2}x \leqslant 0, \ldots,\ C^{\sigma_{p-1}}x - C^{\sigma_p}x \leqslant 0\}$ y $S = \{x \in \mathbb{R}^n\colon Ax \leqslant b,\ x \geqslant 0\}$.

3. SENSIBILIDAD DE LAS SOLUCIONES Y REGIONES DEL PROBLEMA LINEAL MULTIPLE CON EL CRITERIO *K*-ESIMO

Para el estudio de la sensibilidad de $(P;\ c^{\sigma_1},\ c^{\sigma_2}, \ldots, c^{\sigma_p};\ c^{\sigma_k})$ necesitamos considerar el problema múltiple con todos los objetivos de (P), sobre esta región factible.

Consideraremos que la matriz $\bar{A}$ de restricciones del problema, posee una descomposición $\bar{A} = [B, N]$; donde B son las columnas correspondientes a la base óptima del problema, N las correspondientes a las columnas no básicas y x_{B_r} la r-ésima variable de la base óptima del problema $(P;\ c^{\sigma_1}, \ldots, c^{\sigma_p};\ c^{\sigma_k})$. De igual forma descomponemos $C = [C_B, C_N]$. Además denotaremos por $\bar{b}$ el vector de términos independientes (RHS), por $\hat{b} = B^{-1}\bar{b}$ el término independiente en la solución óptima y por $y_{.j}$ la columna j-ésima de $\bar{A}$, que se obtiene al ser multiplicada por la inversa de la base óptima. Una representación tabular pormenorizada de todos los elementos de este problema sería la que exponemos a continuación:

	Variables problemas	Holguras de restricciones $Ax \leqslant b$	Holguras de restricciones del orden	
Coeficiente de objetivos	C	0	0	RHS
Restricciones originales del problema	A	I	0	b
Restricciones de orden	$C^i - C^j$	0	I	0
Costes sombra de objetivos	$Z - C$			

Nótese que $\bar{A} = \begin{bmatrix} A & I & 0 \\ C^i - C^j & 0 & I \end{bmatrix}$ y que $\bar{b} = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}$. Además denotaremos por $\ominus_{rj} = \dfrac{\hat{b}_r}{y_{rj}}$, $C_{.j}$ la columna j-ésima de C y $Z_{.j} = C_B y_{.j}$.

En esta sección estudiamos las variaciones que admite la solución $x(P; c^{\sigma_1}, ..., c^{\sigma_p}; c^{\sigma_k})$ manteniendo la ordenación actual del objetivo c^{σ_k} permitiendo desplazamientos a través de aristas. Asimismo estudiamos cómo estas variaciones afectan a las restantes funciones objetivo.

En el caso en que la solución sea un vértice de S, es fácil probar que la sensibilidad vendrá dada por las variables de holgura de las restricciones que determinan los órdenes, estableciéndose ésta por las diferencias positivas $c^{\sigma_{i+1}}x - c^{\sigma_i}x$. De forma que cuanto mayores sean estas diferencias más robusta será la solución. En cualquier otro caso hay holguras nulas entre estas restricciones, lo que determina que éstas sean activas. Disminuyendo la sensibilidad en el orden.

Se presentan dos casos para su estudio:

a) Mantener el orden e intentar mejorar otro objetivo aún empeorando el situado en orden k. Este caso responde a situaciones en las que el orden entre objetivos esta fuertemente aceptado por los decisores, resultando, por tanto, inviolable. En esta situación las variaciones de los objetivos en dos vértices adyacentes vienen dadas por el teorema 1.

b) Aumentar el valor del objetivo c^{σ_k} aún incumpliendo parcialmente el orden dado. Así dada la solución óptima de $(P; c^{\sigma_1}, ..., c^{\sigma_p}; c^{\sigma_k})$, $x(P; c^{\sigma_1}, ..., c^{\sigma_p}; c^{\sigma_k})$, pretendemos estudiar los cambios en la solución que se producen al aceptar la modificación del orden entre los objetivos en las posiciones k y $(k + 1)$-ésima sin afectar a los restantes órdenes entre objetivos.

a) *Mantener el orden mejorando un objetivo situado en lugar distinto del* k-*ésimo*

Puesto que en el orden dado optimizamos el objetivo situado en lugar k, podría ocurrir que el decisor desee un aumento en cualquier otro objetivo distinto del k, aún disminuyendo el k-ésimo optimizado anteriormente.

Los cambios en los diferentes objetivos para poder realizar análisis marginales vienen dados por el siguiente teorema, que nos muestra una matriz de cambios de los valores de todos los objetivos en función de los cambios de la base factible del orden.

Teorema 1

Sea $x = x(P; c^{\sigma_1}, ..., c^{\sigma_p}; c^{\sigma_k})$ y sea x' una solución adyacente a x que se obtiene introduciendo en la base de x, una variable x_j y sacando de la base de x, la variable que ocupa el lugar r, x_{B_r}. En estas condiciones x' conserva el orden entre los objetivos si, y sólo si, se verifica que:

$$0 < \min_s \{\bar{b}'_s / \bar{b}'_s = \hat{b}_s - \ominus_{rj} y_{sj}, \; y_{rj} \neq 0\} \tag{1}$$

Además, la diferencia entre los valores de los objetivos en ambas soluciones x, x' es dada por:

$$Cx - Cx' = \ominus_{rj}(Z_{.j} - C_{.j})$$

Demostración

Puesto que $\ominus_{rj} = \dfrac{\hat{b}_r}{y_{rj}}$; es claro que al entrar en la base x_j, saca de ella a x_{B_r}, si, y sólo si, se verifica (1). Ello es consecuencia del hecho de que la solución siga siendo factible.

La segunda parte es una consecuencia inmediata de las propiedades de los costes sombra. ■

Dado un cambio de base podemos ver el cambio de todos los objetivos, destacando la mejora de algunos de ellos y la cantidad en que disminuye el objetivo k-ésimo. A la luz de los costos sombra (positivos y negativos) en cada cambio de base, servirá de ayuda a el decisor.

El siguiente corolario limita el decrecimiento de la función k-ésima que estamos optimizando, indicando al decisor el riesgo máximo que puede llegar a tener con estos cambios, puesto que es posible que cada objetivo esté controlado por un decisor diferente.

Corolario

El máximo decrecimiento del valor óptimo de la función objetivo $c^{\sigma_k}x$, para cualquier cambio de base viene dado por

$$c^{\sigma_k}x - c^{\sigma_k}x' = \frac{\hat{b}_{r^*}}{y_{r^*j^*}}(z^{\sigma}_{j^*k} - c^{\sigma}_{j^*k})$$

siendo r^*, j^* los índices donde se alcanza el máximo de la expresión

$$\max_{r,j} \{\ominus_{rj}(z_j^{\sigma_k} - c^{\sigma_k j})/y_{rj} > 0 \quad \text{y} \quad \min_s \bar{b}'_s \geqslant 0\}$$

b) *Aumentar la función objetivo c^{σ_k}*

Al ser óptimo el objetivo σ_k para la solución actual, no se puede aumentar el valor de dicho objetivo a no ser que se intercambie el orden preestablecido y optimicemos de nuevo el objetivo σ_k, ahora en posición $k + 1$. Para modificar parcialmente entre k y $k + 1$ este orden, es obligado hacer tres cambios entre objetivos adyacentes, que se concretan en:

$$\text{(A1)} \quad c^{\sigma_{k+1}}x - c^{\sigma_k}x \leqslant 0 \quad ; \quad \text{(A2)} \quad c^{\sigma_{k-1}}x - c^{\sigma_{k+1}}x \leqslant 0$$
$$\text{(A3)} \quad c^{\sigma_k}x - c^{\sigma_{k+2}}x \leqslant 0$$

(A2) y (A3) son consistentes con las restricciones del sistema original y, por tanto, las añadimos sin más a dicho sistema. En (A1) se cambia el sentido de la restricción en el sistema original. El estudio del aumento del valor del objetivo σ_k en la nueva región está íntimamente relacionado, como probamos en el teorema 2, con el carácter activo de una restricción y con la consistencia del nuevo sistema, quedando reducido a detectar cuando la nueva región ordenada es factible.

Consideremos el problema $(P; c^{\sigma_1}, ..., c^{\sigma_{k-1}}, c^{\sigma_k}, ..., c^{\sigma_p}; c^{\sigma_k})$ cuya matriz de restricciones será, por tanto,

$$M = \begin{bmatrix} B & N & \Theta_{(m+p-1)\times 2} \\ C' & N' & I_{2\times 2} \end{bmatrix}$$

siendo C' la matriz de $2 \times (m + (p - 1))$ de los coeficientes de las restricciones (A2) y (A3) correspondientes a las variables básicas de la solución óptima

$$x(P; c^{\sigma_1}, ..., c^{\sigma_p}; c^{\sigma_k})$$

hallada en el problema previo y N' los coeficientes asociados a las variables no básicas de las mismas restricciones. El vector de términos independientes b_1 del problema es:

$$b_1 = \begin{bmatrix} \bar{b} \\ \Theta_{2\times 1} \end{bmatrix}$$

En la matriz, los coeficientes de la fila correspondiente a la restricción (A1), son los términos de dicha restricción, que es la opuesta de la correspondiente ecuación en el sistema original.

El teorema siguiente caracteriza el crecimiento del objetivo σ_k en las reordenaciones que siendo factibles intercambian sólo el orden entre los dos objetivos σ_k y σ_{k+1} mencionados anteriormente.

Teorema 2

Dado un problema ordenado $(P; c^{\sigma_1}, ..., c^{\sigma_p}; c^{\sigma_k})$, sea P' el problema $(P; c^{\sigma_1}, ..., c^{\sigma_{k-1}}, c^{\sigma_k}, ..., c^{\sigma_p}; c^{\sigma_k})$ cuya ordenación intercambia el orden de los objetivos k y $(k+1)$-ésimo. Entonces se verifica:

a) Si $c^{\sigma_{k-1}}x(P; c^{\sigma_1}, ..., c^{\sigma_p}; c^{\sigma_k}) - c^{\sigma_k}x(P; c^{\sigma_1}, ..., c^{\sigma_p}; c^{\sigma_k}) > 0$, o P' no tiene solución o el óptimo de P' es menor que el de $(P; c^{\sigma_1}, ..., c^{\sigma_p}; c^{\sigma_k})$.

b) Si $c^{\sigma_{k+1}}x(P; c^{\sigma_1}, ..., c^{\sigma_p}; c^{\sigma_k}) - c^{\sigma_k}x(P; c^{\sigma_1}, ..., c^{\sigma_p}; c^{\sigma_k}) = 0$, el óptimo de P' mejora estrictamente el valor anterior si, y sólo si, la variable de holgura de la restricción (A1) es no básica en toda solución óptima de $(P; c^{\sigma_1}, ..., c^{\sigma_p}; c^{\sigma_k})$.

Demostración

La demostración de a) es consecuencia de que $c^{\sigma_{k+1}}x(P; c^{\sigma_1}, ..., c^{\sigma_p}; c^{\sigma_k}) - c^{\sigma_k}x(P; c^{\sigma_1}, ..., c^{\sigma_p}; c^{\sigma_k}) > 0$ implica que o bien la restricción $c^{\sigma_{k-1}}x - c^{\sigma_k}x \leqslant 0$ es no factible, o bien que sobre S_σ el mayor valor del objetivo c^{σ_k} sobre la restricción anterior es menor que el obtenido en $x(P; c^{\sigma_1}, ..., c^{\sigma_p}; c^{\sigma_k})$.

El primer caso implica que la región factible de P' es vacía lo que prueba el resultado. En el segundo caso, $x(P; c^{\sigma_1}, ..., c^{\sigma_p}; c^{\sigma_k})$ es también un punto con mayor valor del objetivo c^{σ_k} que cualquier otro situado en $S \cap \{x \in \mathbb{R}^n: c^{\sigma_k}x - c^{\sigma_{k+1}}x > 0\}$, pues en otro caso bastaría con unir dicho punto con un segmento que por convexidad estaría contenido en S y cuya intersección con el hiperplano $c^{\sigma_k}x - c^{\sigma_{k+1}}x = 0$ daría un punto con mayor valor del objetivo c^{σ_k} que $x(P; c^{\sigma_1}, ..., c^{\sigma_p}; c^{\sigma_k})$, lo cual es una contradicción, lo que termina la prueba de a).

El resultado b) se deduce de que al producirse sólo un cambio entre los objetivos k-ésimo y $(k+1)$-ésimo la nueva región factible estará contenida en el cono en el que se verifican las restricciones anteriores del orden salvo la k-ésima y tres nuevas restricciones

$$c^{\sigma_{k-1}}x - c^{\sigma_{k+1}}x \leqslant 0 \quad , \quad c^{\sigma_{k-1}}x - c^{\sigma_k}x \leqslant 0 \quad , \quad c^{\sigma_k}x - c^{\sigma_{k-2}}x \leqslant 0$$

Conocida $x(P;\, c^{\sigma_1}, \ldots, c^{\sigma_p};\, c^{\sigma_k})$ y la descomposición óptima asociada a esta solución (B, N), que verificará $(z_j^{\sigma_k} - c_j^{\sigma_k}) \geqslant 0\ \forall j$, la obtención de una descomposición inicial $(\bar{B}, \bar{N})$ para el problema P' depende de que la variable de holgura x_{m+k} de la restricción (A1), esté o no en la base B.

i) x_{m+k} pertenece a B.

$$(\bar{B}, \bar{N}) = \begin{bmatrix} e_k B e_k & \Theta & e_k N \\ C' & I_{2\times 2} & N' \end{bmatrix}$$

siendo $e_k \in \mathbb{M}_{(m+p-1)\times(m+p-1)}$, la matriz diagonal siguiente:

$$e_k = \begin{array}{c} \quad\quad m+k \\ \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & -1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{bmatrix} m+k \end{array}$$

m es el número de restricciones de $Ax \leqslant b$ y k la restricción que se quiere cambiar de signo.

Entonces los costes sombra $\bar{z}_N - \bar{c}_N$ de las variables no básicas para este problema son

$$\bar{z}_N - \bar{c}_N = [c_B, \Theta] \begin{bmatrix} e_k B^{-1} e_k & \Theta \\ C' e_k B^{-1} e_k & I_{2\times 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_k N \\ N' \end{bmatrix} - c_N = c_B e_k B^{-1} N - c_N$$

Por tanto, deducimos que $\bar{z}_j - \bar{c}_j = z_j - c_j \geqslant 0$ en esta base, puesto que e_k sólo afecta con un cambio de signo al correspondiente coeficinte en el objetivo de x_{m+k}, que al ser una variable de holgura es nulo, en ambos problemas P' y $(P;\, c^{\sigma_1}, \ldots, c^{\sigma_p};\, c^{\sigma_k})$.

ii) x_{m+k} no pertenece a B.

$$(\bar{B}, \bar{N}) = \begin{bmatrix} e_k B & \Theta & e_k N f_k \\ C' & I_{2\times 2} & N \end{bmatrix}$$

siendo $f_k \in \mathbb{M}_{(m+p-1)\times n}$, dada por la siguiente matriz:

$$f_k = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} & & m+k & & \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \iddots & \vdots \\ \vdots & & -1 & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & 1 \\ \vdots & & \vdots & & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ m+k' \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

y e_k definida anteriormente.

Entonces los costes sombra no básicos para este problema son:

$$\bar{z}_N - \bar{c}_N = [c_B, \Theta]\begin{bmatrix} B^{-1}e_k & \Theta \\ -C'B^{-1}e_k & I_{2\times 2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_k N f_k \\ N' \end{bmatrix} - c_N = c_B B^{-1} N f_k - c_N$$

En este caso la matriz f_k cambia únicamente el signo del elemento z_{m+k} que corresponde a la variable de holgura de la restricción (A1) y teniendo en cuenta que su coste es nulo al ser holgura, entonces todos los costes sombra $\bar{z}_j - \bar{c}_j = z_j - c_j \geqslant 0$, son iguales en esta base, salvo el correspondiente a $x_{m\times n}$, que cambia de signo. Como por hipótesis no es parte de ninguna solución óptima del problema original, su coste sombra era estrictamente positivo y al cambiar de signo en esta base de P', será estrictamente negativo. Entonces siempre se mejorará la solución de P', introduciendo esta variable en la base. ■

4. ENUMERACION DE REGIONES OPTIMAS

Por último hemos de abordar el problema de conocer la valoración del objetivo c^{σ_k} en todas las regiones en las que su ordenación es la k-ésima. El algoritmo que proponemos está basado en el propuesto por Puerto (1990) para la resolución del problema lineal ordenado. En esencia es un algoritmo de ramificación que enumera todas las posibles regiones en las que el objetivo considerado se ordena en la posición k-ésima.

Para definir las reglas de ramificación que utiliza el algoritmo es necesario generalizar la familia de conjuntos S_σ, definida en la primera sección.

Sea $I \subseteq \{1, 2, ..., p\}$ un subconjunto de índices de los p primeros números naturales, con card $(I) = k$, entonces si $\sigma \in \text{Perm}\ (I)$ el conjunto S_σ será

$$S_\sigma = \{x \in \mathbb{R}^n\colon x \in S,\ C^{\sigma_i}x - C^{\sigma_{i+1}}x \leqslant 0;\ i = 1, 2, ..., k-1\}$$

Notación. En lo que resta escribiremos un índice l con prima, l', para indicar el l-ésimo índice del conjunto $\{1, 2, ..., p\}\setminus\{i^*\}$, donde i^* se fijó de antemano.

Definición 1

La función posición de un índice i, pos (i), en un conjunto de índices I es aquella definida por la aplicación

$$\begin{aligned} \text{pos}\colon I &\to \{1, 2, ..., \text{card}\ (I)\} \\ i &\to \text{pos}\ (i) = \text{Lugar ocupado por } i \text{ en } I \end{aligned}$$

Definición 2

Dado un conjunto X la ramificación según la regla B a primer nivel, que denotaremos por $\Gamma_B(X)$, es la familia de todos los subconjuntos de X que se obtienen al descomponer este conjunto según la regla B.

La ramificación de k-ésimo nivel ($k \leqslant p$), que denotaremos por $\Gamma_B^k(X)$, es la familia de todos los subconjuntos de X obtenidos al ramificar según la regla B, la familia $\Gamma_B^{k-1}(X)$, de todos los subconjuntos descendientes al nivel $(k-1)$-ésimo.

Consideremos la siguiente regla de ramificación.

Regla de ramificación

La ramificación B de una partición activa asociada con un objetivo i^*, para el problema P_k viene dada según las posiciones de i^*, por las familias de regiones siguientes:

i) $$\Gamma_B(S, i^*) = \begin{cases} S_{(i^*, 1')} & \text{si} \quad k = 1 \\ S_{(1', i^*)} \cup S_{(i^*, 1')} & \text{si} \quad k > 1 \end{cases}$$

ii) Sea $S_\sigma \subseteq S$ con $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_h)$ $h < p$, entonces:

a) Si pos $(i^*) < k - (p - h)$, el objetivo i^* no puede alcanzar la posición k y, por tanto, no se divide S_σ.

b) Si pos $(i^*) = k - (p - h)$.

$$\Gamma_B(S_\sigma, i^*) = S_{((h+1)'\sigma_1,\ldots,\sigma_h)} \cup \cdots \cup S_{(\sigma_1,\ldots,(h+1)'i^*,\ldots,\sigma_h)}$$

c) Si $k - (p - h) < \text{pos}\,(i^*) < k$

$$\Gamma_B(S, i^*) = S_{((h+1)'\sigma_1,\ldots,\sigma_h)} \cup S_{(\sigma_1(h+1)',\ldots,\sigma_h)} \cup \cdots \cup S_{(\sigma_1,\ldots,\sigma_h(h+1)')}$$

d) Si pos $(i^*) = k$

$$\Gamma_B(S_\sigma, i^*) = S^*_{(\sigma_1,\ldots,i^*(h+1)',\ldots,\sigma_n)} \cup \cdots \cup S_{(\sigma_1,\ldots,\sigma_h(h+1)')}$$

La regla de ramificación anterior está basada en el estudio de las diferentes posiciones en cuanto al orden del objetivo a optimizar, así como sus posiciones relativas al ir insertando secuencialmente nuevos objetivos aún no considerados de forma que en la ordenacio'n completa el objetivo i^*, pueda ordenarse en la posición deseada k.

De la definición anterior se deduce que todo subconjunto resultante de una ramificación de un conjunto activo, está incluido en dicho conjunto. Designemos por $\mathscr{F}$ la colección actual de ramificaciones del conjunto S y por (A, r) al subconjunto A de la familia $\mathscr{F}$, que se ramificará según la regla B por el objetivo r.

Algoritmo

Paso 0. Hacer $S_1 = S$; $r = 1$; $\mathscr{F} = \{(S_1, r_1)\}$.

Paso 1. Si $\mathscr{F} = \phi$ parar en otro caso, seleccionar un elemento de (S_i, r_i) de $\mathscr{F}$, con $r_i = \max\ \{j\colon (A, j) \in \mathscr{F}\}$.

Paso 2. Si $r = p$ evaluar $v(c^{\sigma_k}, (S_i, r_i)) = \max\ \{c^{\sigma_k}x\colon x \in S_i\}$. Guardar S_i y $v(c^{\sigma_k}, PA)$, como un conjunto ordenado y su valoración con el objetivo c^{σ_k} en posición k-ésima.

En otro caso, dividir S_i según la regla B y añadir a $\mathscr{F}$ los conjuntos (S_{ij}, r_{i+1}) obtenidos al dividir S_i.

En cualquier caso borrar (S_i, r_i) de $\mathscr{F}$.

Paso 3. Volver al paso 1.

El algortimo propuesto con los procedimientos de ramificación y actualización referidos es convergente.

Teorema 3

El algortimo descrito con las reglas de ramificación B, siendo el conjunto factible S no vacío, termina en número finito de iteraciones.

Demostración

Nótese que para cada objetivo i, su sondeo puede suponer a lo sumo la ramificación del conjunto S, a través de todos los conjuntos de $\Gamma^{\xi}_{B}(S, i)$ y su evaluación. Por construcción card $(\Gamma^{\xi}_{B}(S, i)) \leqslant (p - 1)!$. Con lo que una cota superior para el número de iteraciones del proceso es este valor. ■

5. CONCLUSIONES

Los resultados del presente trabajo permiten realizar exploraciones de la solución óptima del problema lineal ordenado. Partiendo de un orden dado, el cual puede ser una primera aproximación a los deseos del decisor, el análisis de sensibilidad realizado permite encontrar soluciones satisfactorias al problema original, mediante el uso de comparaciones marginales de utilidad.

AGRADECIMIENTOS

Queremos agradecer al profesor doctor don Miguel Sánchez García sus interesantes sugerencias en la elaboración del presente trabajo.

REFERENCIAS

1. GAL, T.: *Postoptimal Analysis, Parametric Programming and related topics*, McGraw-Hill, 1979.
2. KMIETOWICZ, Z. W., y PEARMAN, A. D.: *Decision Theory and Incomplete Knowledge*, Ed. Gower, 1981.
3. HWANG, C. L., y YOON, K.: *Multiple attribute Decision Making*, Springer Verlag (1981).
4. MILNOR, J. M.: *Games againts Nature in Decision Processes*, Edts. Thrall, Coombs and Davis, 49-60, John Wiley, 1954.
5. PUERTO, J.: «Programación Múltiple Ordenanda». Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla, 1990.
6. STEUER, R. E., y CHOO, E. U.: «An Interactive Weigthed Tchebycheff Procedure for Multiple Objective Programmin», *Matematical Programming*, 26 (1983).
7. WALD, A.: *Statistical Decision Functions*, New York, 1950.