TRABAJOS DE INVESTIGACION OPERATIVA
Vol. 6, núm. 1, 1991, pp. 71 a 82

UNA GENERALIZACION DE LA CARACTERIZACION DE PUNTOS EXTREMOS

JUAN GARCÍA LAGUNA
Departamento de Matemática Aplicada
Universidad de Valladolid

RESUMEN

En este artículo se obtiene una generalización de la caracterización de los puntos extremos en el poliedro de soluciones factibles del problema estándar de la Programación Lineal. Para ello se usa una extensión del concepto de cara dado por Goldman y Tucker para conos convexos poliédricos que difiere del expuesto en la mayoría de los tratados clásicos (Grünbaum, Mullen-Shepard, Stoer-Witzgall, ...).

Palabras clave: Programación Lineal, poliedro, cara, punto extremo, arista, cono de recesión.
Clasificación AMS (1980): 52A25, 90C05.

ABSTRACT

In this paper we find a generalization of the extreme points characterization in the polyhedron of feasible solutions in the standard problem of Linear Programming. To that purpose, we use an extension of the concepto of face given by Goldman and Tucker for polyhedral convex cones, which differs from that exposed in most of classical treatises (Grünbaum, Mullen-Shepard, Stoer-Witzgall, ...).

Key words: Linear Programming, polyhedron, face, extreme point, edge, recession cone.
AMS Classification (1980): 52A25; 90C05.

Recibido: Diciembre 1989.
Revisado: Septiembre 1990.

1. INTRODUCCION

El concepto de cara de un poliedro que se expone en la mayoría de los tratados clásicos del tema (intersección del poliedro con uno de sus hiperplanos soporte), tiene, entre otras, la ventaja de ser también válido para conjuntos convexos que no son poliedros [por ejemplo, Grünbaum (1967), Stoer-Witzgall (1970), McMullen-Shepard (1971)]. Así considerada, toda cara de un poliedro es un conjunto cerrado, pero la familia de todas ellas no forman una partición. Además, si el poliedro es sólido (con interior no vacío) sus puntos interiores no forman parte de ninguna cara.

En 1956, Goldman y Tucker introdujeron un concepto de cara para conos convexos poliédricos que difiere del anterior. Los aspectos más notables de esta concepción son los siguientes:

A) Las caras son siempre conjuntos abiertos en la topología relativa.

B) Las caras forman siempre una partición del cono.

En este artículo se extiende a un poliedro cualquiera el concepto de cara dado por Goldman y Tucker para conos convexos poliédricos y, aprovechando que con la definición introducida también las caras forman una partición, se prueba una generalización de la caracterización de los puntos extremos en el caso particular del poliedro de soluciones factibles asociado al problema estándar de la Programación Lineal. Para formalizar esta caracterización se introduce el concepto de conjunto k-dependiente de columnas de una matriz. Como aplicación directa del resultado obtenido se siguen algunas propiedades clásicas sobre puntos extremos y aristas en el contexto de la Programación Lineal.

Recordemos previamente algunas definiciones elementales:

Se dice que $S \subseteq \mathbb{R}^n$, $S \neq \phi$ es un cono convexo si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$, $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$ implica $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} \in S$. Si adicionalmente exigimos la condición $\alpha + \beta = 1$, se tiene la definición de conjunto convexo. Además, se admite que el vacío es un conjunto convexo. Es claro que, con la definición dada, el vector $\mathbf{0}$ pertenece a todo cono convexo.

Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Denotaremos por $\bar{S}$ la adherencia de S, es decir, la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a S. Por dimensión de S entenderemos la dimensión de la mínima variedad afín que contiene a S.

2. CARAS ABIERTAS DE UN POLIEDRO

Definición 2.1

Sea $\mathbf{A}$ una matriz $m \times n$, $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_m$ sus filas, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ y $P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{Ax} \leqslant \mathbf{b}\} \neq \phi$. Para $H \subseteq I = \{1, ..., m\}$ sean:

$$\begin{aligned}
O_H &= \{\mathbf{x} \in R^n : \mathbf{a}_i\mathbf{x} < b_i,\ i \in H\},\\
L_H &= \{\mathbf{x} \in R^n : \mathbf{a}_i\mathbf{x} = b_i,\ i \in I \backslash H\},\\
r_H &= \text{rango}\,\{\mathbf{a}_i : i \in I \backslash H\}; \quad r_I = 0,\\
d_H &= n - r_H,\\
F_H &= O_H \cap L_H.
\end{aligned}$$

Se dice que F_H es una cara k-dimensional de P si $F_H \neq \phi$ y $d_H = k$. En adelante, P denota el poliedro aquí definido.

Observaciones:

1. En $\mathbb{R}^n$, el conjunto O_H es un abierto y L_H es una variedad afín. Si $L_H \neq \phi$, entonces $\dim L_H = d_H$. En general, F_H no es un abierto en $\mathbb{R}^n$, pero sí lo es en la topología relativa que $\mathbb{R}^n$ induce en L_H. En consecuencia, si $F_H \neq \phi$ se tiene $\dim F_H = d_H$. En tal caso, F_H es una variedad afín si y sólo si $F_H = L_H$.
2. En general, F_H no es un poliedro, aunque sí lo es el conjunto $P_H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{x} \leqslant b_i \text{ si } i \in H \text{ y } \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{x} = b_i \text{ si } i \in I \backslash H\}$. Puede ocurrir que $F_H = \phi$ pero $P_H \neq \phi$; en cambio, si $F_H \neq \phi$, entonces $P_H = \bar{F}_H$. En cualquier caso, F_H es un conjunto convexo.
3. Dos caras asociadas a diferentes conjuntos H son disjuntas, es decir, $F_H \cap F_G \neq \phi$ implica $H = G$. Además, la unión de todas ellas es el poliedro P.
4. La anterior definición de cara difiere de la que se da en la mayoría de los tratados clásicos. La relación entre ambas es la siguiente:

a) Si P es de dimensión n, su interior es una cara en el sentido de la Definición 2.1 que no se corresponde con ninguna cara definida en el sentido clásico.

b) Cualquier otra cara en el sentido de la Definición 2.1 es el interior relativo de una cara definida en el sentido clásico.

c) Los puntos extremos de P (si los hay) son caras en el sentido clásico y en el de la Definición 2.1. En cualquier caso, salvo si $P = \mathbb{R}^n$, las caras de dimensión mínima, es decir, las $F_H \neq \phi$ tal que $d_H \leqslant d_G$ $\forall F_G \neq \phi$ con $G \subseteq I$, son caras en ambos sentidos.

5. Si $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, entonces P es un cono convexo poliédrico y se tiene la definición de cara dada en Goldman y Tucker (1956).

Teorema 2.1

Sea $W \subseteq P$, $W \neq \phi$. Entonces son equivalentes:

a) W es una cara de P, es decir, existe $H \subseteq I$ tal que $W = F_H$.

b) W es convexo, abierto en su topología relativa [$W = \text{relint } W$)]

y

$$\mathbf{x} \in W,\ \mathbf{x} = \alpha\mathbf{y} + (1 - \alpha)\mathbf{z},\ 0 < \alpha < 1,\ \mathbf{y}, \mathbf{z} \in P \text{ implica } \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \bar{W} \quad (*)$$

Demostración:

a) $\Rightarrow$ b). Si $W = F_H \neq \phi$, es claro que W es convexo, abierto en su topología relativa y $\bar{W} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{x} \leqslant b_i \text{ si } i \in H, \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{x} = b_i \text{ si } i \in I \backslash H\}$. Sea $\mathbf{x} \in W$, $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{y} + (1 - \alpha)\mathbf{z}$, $0 < \alpha < 1$, $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in P$. De $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in P$ se sigue $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{y} \leqslant b_i$, $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{z} \leqslant b_i$, para todo $i \in I$ y, en particular, para $i \in H$. Si $i \in I \backslash H$, se tiene:

$$b_i = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{x} = \alpha(\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{y}) + (1 - \alpha)(\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{z}) \leqslant \alpha b_i + (1 - \alpha) b_i = b_i$$

y, como $0 < \alpha < 1$, se sigue $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{y} = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{z} = b_i$. En consecuencia, $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \bar{W}$.

b) $\Rightarrow$ a). Sea $\mathbf{x} \in W$. Al ser las caras de P una partición, existe un único $H \subseteq I$ tal que $\mathbf{x} \in F_H$ [ver Observación 3 para la unicidad]. Veamos que $W = F_H$. Si $\mathbf{y} \in F_H$, al ser este conjunto convexo y abierto en su topología relativa, existe $\mathbf{z} \in F_H$ tal que $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{y} + (1 - \alpha)\mathbf{z}$, $0 < \alpha < 1$, con $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in P$. Por la condición (*) dada en b) se tiene $\mathbf{y} \in \bar{W}$ y, por tanto, $F_H \subseteq \bar{W}$. En consecuencia, $F_H = \text{relint}(F_H) \subseteq \text{relint}(\bar{W}) \subseteq W$ [ver Grünbaum (1967), pág. 9], es decir, $F_H \subseteq W$. De otra parte, si $W \backslash F_H \neq \phi$, entonces existe $G \neq H$ tal que $W \cap F_G \neq \phi$. De $G \neq H$ se sigue $G \backslash H \neq \phi$ o $H \backslash G \neq \phi$. Supongamos $G \backslash H \neq \phi$ y sean $k \in G \backslash H$,

$\mathbf{x}' \in W \cap F_H$ e $\mathbf{y}' \in W \cap F_G$. Al ser W convexo y abierto en su topología relativa, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\mathbf{z}' = \mathbf{x}' + \varepsilon(\mathbf{x}' - \mathbf{y}') \in W$. De aquí

$$\mathbf{a}_k \cdot \mathbf{z}' = \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{x}' + \varepsilon(\mathbf{a}_k \cdot \mathbf{x}' - \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{y}') = b_k - \varepsilon(b_k - \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{y}') > b_k$$

y, por tanto, $\mathbf{z}' \notin P$ (contradicción). De modo análogo se razona si $H \backslash G \neq \phi$.

Observación 6:

La condición (*) dada en b) se corresponde con la usada en Martini (1989), pág. 247, para definir cara de un conjunto convexo cualquiera.

3. LAS CARAS EN EL POLIEDRO ESTANDAR P_E

Definición 3.1

Sea $\mathbf{A}$ una matriz $m \times n$ de rango m y $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Llamaremos poliedro estándar a todo conjunto de la forma $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}\} \neq \phi$. Lo denotaremos por P_E.

La expresión de P_E en la forma dada en la Definición 2.1, es decir, como intersección de semiespacios cerrados es:

$$-x_i \leqslant 0 \qquad i = 1, \ldots, n \tag{5.1}$$

$$\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{x} \leqslant b_i \qquad i = 1, \ldots, m \tag{5.2}$$

$$(-\mathbf{a}_i) \cdot \mathbf{x} \leqslant -b_i \qquad i = 1, \ldots, m \tag{5.3}$$

En consecuencia el conjunto asociado de índices I tiene $n + 2m$ elementos.

Con el fin de explicitar mejor las caras de P_E, introduzcamos la siguiente notación:

$$P_E = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{x} \leqslant \beta_i, \; i \in I\}$$

donde:

$$\mathbf{f}_i = -\mathbf{e}_i, \quad \beta_i = 0 \quad \text{si} \quad i = 1, \ldots, n \tag{5.4}$$

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{a}_i, \quad \beta_i = b_i \quad \text{si} \quad i = n + 1, \ldots, n + m \tag{5.5}$$

$$\mathbf{f}_i = -\mathbf{a}_i, \quad \beta_i = -b_i \quad \text{si} \quad i = n + m + 1, \ldots, n + 2m \tag{5.6}$$

e $I = \{1, \ldots, n + 2m\}$.

Lema 3.1

Si F_H es una cara de P_E, entonces $H \subseteq I^* = \{1, ..., n\}$.

Demostración:

Si $H = \phi$ es claro. Si $H \backslash I \neq \phi$, sea $\mathbf{x} \in F_H$ y $k \in H \cap \{n + 1, ..., n + 2m\}$. Entonces se tiene $\mathbf{f}_k \cdot \mathbf{x} < \beta_k$, de donde:

$$\mathbf{a}_k \cdot \mathbf{x} < b_k \quad \text{si} \quad k \in \{n + 1, ..., n + m\} \quad \text{(imposible)},$$

o bien

$$(-\mathbf{a}_k) \cdot \mathbf{x} < -b_k \quad \text{si } k \in \{n + m + 1, ..., n + 2m\} \quad \text{(imposible)}.$$

Corolario 3.1

Toda cara de P_E es la solución de un sistema del tipo:

$$-x_i < 0 \quad \text{si} \quad i \in H \tag{5.7}$$

$$x_i = 0 \quad \text{si } i \in I^* \backslash H \tag{5.8}$$

$$\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{x} = b_i \quad \text{para} \quad i = 1, ..., m \tag{5.9}$$

para algún $H \subseteq I^* = \{1, ..., n\}$, es decir, es de la forma $F_H = O_H \cap L_H$, donde $O_H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : -x_i < 0 \text{ si } i \in H\}$ y $L_H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : x_i = 0 \text{ si } i \in I^* \backslash H, \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{x} = b_i \text{ para } i = 1, ..., m\}$.

Observación 7:

·Aunque todas las caras de P_E se obtienen del modo descrito en el corolario anterior, no todo $H \subseteq I^*$ determina una cara de P_E, ya que puede ser $F_H = \phi$.

4. GENERALIZACION DE LA CARACTERIZACION DE PUNTOS EXTREMOS

Definición 4.1 Murty (1983).

Sea $\mathbf{A}$ la matriz de la Definición 3.1 y $\mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_n$ sus columnas. Diremos que el punto $\mathbf{x} \in P_E$ usa la columna $\mathbf{A}_j$ si $x_j > 0$.

Lema 4.1

Dos puntos de P_E están en la misma cara si y sólo si usan el mismo conjunto de columnas de **A**.

Demostración:

Del Corolario 3.1 se sigue que un punto $\mathbf{x} \in P_E$ está en la cara F_H si y sólo si $\{j : x_j > 0\} = H$. En consecuencia, dos puntos **x** e **y** de P_E están en la misma cara si y sólo si $\{j : x_j > 0\} = \{j : y_j > 0\}$, lo cual es equivalente a que se tenga $\{\mathbf{A}_j : x_j > 0\} = \{\mathbf{A}_j : y_j > 0\}$, es decir, a que **x** e **y** usen las mismas columnas de la matriz **A**.

Definición 4.2

Sea $J \subseteq \{1, ..., n\}$, $J \neq \phi$. Diremos que las columnas $\{\mathbf{A}_j : j \in J\}$ forman un conjunto k-dependiente si k es el mínimo número de ellas que es necesario suprimir para obtener un conjunto linealmente independiente. En particular, todo conjunto de columnas linealmente independiente es 0-dependiente. Admitiremos que el vacío es un conjunto linealmente independiente.

Teorema 4.1

Existe una biyección entre las caras de P_E y los subconjuntos de $\{\mathbf{A}_j : j = 1, ..., n\}$ que generan **b** por medio de combinaciones lineales con coeficientes positivos. En esta biyección un punto **x** de P_E está en una cara de dimensión k si y sólo si el conjunto de columnas $\{\mathbf{A}_j : x_j > 0\}$ es k-dependiente.

Demostración:

La primera parte se sigue del Lema 4.1. Para probar la segunda, sea F_H una cara de P_E, d_H su dimensión y $\mathbf{x} \in F_H$. Si $\{\mathbf{A}_j : x_j > 0\}$ es un conjunto k-dependiente, se trata de probar que $d_H = k$. Sea h el número de elementos de H. Reordenando convenientemente las componentes del vector **x**, se puede poner $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_H, \mathbf{A}_{I^* \setminus H}]$ con $\mathbf{A}_H = \{\mathbf{A}_j : x_j > 0\}$ y

$\mathbf{A}_{I^*\backslash H} = \{\mathbf{A}_j : x_j = 0\}$. En consecuencia se tiene $L_H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}^*\mathbf{x} = \mathbf{b}^*\}$, donde:

$$\mathbf{A}^* = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n-h} \\ \hline \mathbf{A}_H & \mathbf{A}_{I^*\backslash H} \end{array}\right] \quad \text{y} \quad \mathbf{b}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

Como $d_H = n - r_H$ y $r_H = \text{rango } \mathbf{A}^* = \text{rango } I_{n-h} + \text{rango } A_H = (n-h) + (h-k) = n-k$, se tiene $d_H = k$.

5. CONSECUENCIAS

Deduciremos en este apartado algunas consecuencias del Teorema 4.1

Definición 5.1

Se denomina punto extremo de P_E a toda cara de dimensión 0 y arista a toda cara de dimensión 1. Se dice que dos puntos extremos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ son adyacentes si $W = \{\mathbf{z} : \mathbf{z} = \alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{y},\ 0 < \alpha < 1\}$ es una arista.

Observación 8:

Como consecuencia del Teorema 2.1, $\mathbf{x} \in P_E$ es un punto extremo si y sólo si $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{y} + (1-\alpha)\mathbf{y}$, $0 < \alpha < 1$, $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in P_E$ implica $\mathbf{x} = \mathbf{y} = \mathbf{z}$ o, equivalentemente, si y sólo si $P_E \backslash \{\mathbf{x}\}$ es un conjunto convexo.

Corolario 5.1 Murty (1971) y (1983)

a) Un punto $\mathbf{x}$ de P_E es punto extremo si y sólo si el conjunto de vectores columna $\{\mathbf{A}_j : x_j > 0\}$ es linealmente independiente.

b) Un punto $\mathbf{x}$ de P_E pertenece a una arista de P_E si y sólo si el rango de $\{\mathbf{A}_j : x_j > 0\}$ es inferior en una unidad a su cardinal.

Demostración:

a) Es el caso particular del Teorema 4.1 en el que $k = 0$. Si $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, es decir, si P_E es un cono convexo poliédrico, necesitamos usar el supuesto hecho en la Definición 4.2 de que el vacío es un conjunto linealmente independiente.

b) Es el caso particular del Teorema 4.1 en el que $k = 1$.

A continuación matizaremos la parte b) del corolario anterior.

Corolario 5.2 Murty (1983), pág. 126; Murty (1971).

Sea $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ puntos extremos de P_E, $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ y $W = \{\mathbf{z} : \mathbf{z} = \alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{y},\ 0 < \alpha < 1\}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

a) $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ son adyacentes.

b) $\mathbf{x}' \in W$, $\mathbf{x}' = \alpha\mathbf{y}' + (1-\alpha)\mathbf{z}'$, $0 < \alpha < 1$, $\mathbf{y}', \mathbf{z}' \in P_E$ implica $\mathbf{y}', \mathbf{z}' \in \bar{W}$.

c) El rango de $\{\mathbf{A}_j : x_j > 0 \text{ o } y_j > 0\}$ es inferior en una unidad a su cardinal.

Demostración:

La equivalencia entre a) y b) se sigue del Teorema 2.1 y entre a) y c) es consecuencia del Teorema 4.1.

Definición 5.2

Se dice que $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ es una dirección de $S \subseteq \mathbb{R}^n$, $S \neq \phi$ si $\mathbf{x} \in S$, $\lambda \geqslant 0$ implica $\mathbf{x} + \lambda\mathbf{d} \in S$. Representaremos por $\operatorname{rec}(S)$ el conjunto de todas las direcciones de S.

Observación 9:

El vector $\mathbf{0}$ es dirección de cualquier conjunto S y $\operatorname{rec}(S)$ es un cono convexo. Si S es un poliedro, entonces $\operatorname{rec}(S)$ es un cono convexo poliédrico. Concretamente $\operatorname{rec}(P) = \{\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{Ad} \leqslant \mathbf{0}\}$ y, en particular, $\operatorname{rec}(P_E) = \{\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{Ad} = \mathbf{0},\ \mathbf{d} \geqslant \mathbf{0}\}$.

Corolario 5.3 Murty (1983), pág. 132.

Sea $\mathbf{x}$ un punto extremo de P_E, $\mathbf{d} \in \operatorname{rec}(P_E)$, $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$ y $W = \{\mathbf{x} + \lambda\mathbf{d} : \lambda > 0\}$. Entonces:

A) Las siguientes condiciones son equivalentes:

a) W es una arista de P_E.

b) $\mathbf{x}' \in W$, $\mathbf{x}' = \alpha\mathbf{y}' + (1-\alpha)\mathbf{z}'$, $0 < \alpha < 1$, $\mathbf{y}', \mathbf{z}' \in P_E$ implica $\mathbf{y}', \mathbf{z}' \in \bar{W}$.

c) El rango de $\{\mathbf{A}_j : x_j > 0 \text{ o } d_j > 0\}$ es inferior en una unidad a su cardinal.

B) Las siguientes condiciones son equivalentes:

d) $\{\lambda\mathbf{d} : \lambda > 0\}$ es una arista de $\operatorname{rec}(P_E)$.

e) $\mathbf{d} = \mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2$, $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2 \in \operatorname{rec}(P_E)$ implica $\mathbf{d}_1 = t_1\mathbf{d}$, $\mathbf{d}_2 = t_2\mathbf{d}$, $t_1, t_2 \geqslant 0$.

f) El rango de $\{\mathbf{A}_j : d_j > 0\}$ es inferior en una unidad a su cardinal.

C) Cualquiera de las condiciones de A) implica cada una de las de B).

Demostración:

A) Se razona como en el Corolario 5.2.

B) Es el caso particular de A) apliado a $\operatorname{rec}(P_E)$, tomando $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ y teniendo en cuenta que, en esta situación, b) y e) son equivalentes.

C) Si $\{\lambda\mathbf{d} : \lambda > 0\}$ no es arista de $\operatorname{rec}(P_E)$, entonces $\mathbf{d}$ pertenece a una cara de dimensión $\geqslant 2$. Por el Teorema 4.1, se tiene:

cardinal $\{\mathbf{A}_j : d_j > 0\}$ − rango $\{\mathbf{A}_j : d_j > 0\} \geqslant 2$ y cardinal $\{\mathbf{A}_j : x_j > 0\} =$ rango $\{\mathbf{A}_j : x_j > 0\}$. En consecuencia, cardinal $\{\mathbf{A}_j : x_j > 0 \text{ o } d_j > 0\} \geqslant 2$ y, por tanto, W no es arista de P_E (contradicción).

Observaciones:

10. Es claro que, en general, d) (o sus equivalentes) no implica a) (o sus equivalentes).

11. Cualquiera de las condiciones de B) sirve para definir dirección extrema de P_E [Bazaraa-Shetty (1979), Bazaraa-Jarvis (1981), García Laguna (1989)].

6. APLICACION A LA PROGRAMACION LINEAL MULTIOBJETIVO

Un Problema de Programación Lineal Multiobjetivo (PPLM) admite la siguiente formulación:

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar} \quad \mathbf{Cx} \\ &\text{Sujeta a} \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ &\qquad\qquad\quad \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}, \end{aligned}$$

donde **A** y **b** son los definidos anteriormente y **C** es una matriz $k \times n$. Su resolución consiste en hallar todas las caras eficientes maximales.

El concepto de cara dado en la Definición 2.1 puede ser de utilidad para resolver este problema, si se tiene en cuenta el siguiente resultado de PPLM:

Sea F_J una cara de P_E caracterizada por los vectores $\{\mathbf{A}_j\}_{j \in J}$ (Teorema 4.1). Si $\mathbf{x}_0 \in F_J$ es eficiente, entonces F_J es eficiente. Contrastar si $\mathbf{x}_0$ es eficiente equivale a resolver el problema:

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar} && \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i \\ &\text{Sujeta a} && \sum_{j \in N} c_{ij} x_j - \varepsilon_i = \sum_{j \in J} c_{ij} x_{0j} \quad \text{para} \quad i = 1, ..., k \\ & && \sum_{j \in N} \mathbf{A}_j x_j = \mathbf{b}, \quad x_j \geqslant 0 \quad \forall j \in J, \quad \varepsilon_i \geqslant 0 \quad \forall i \\ & && M = \{1, 2, ..., n\} \end{aligned}$$

y comprobar que $\varepsilon_i = 0$ para todo i. Si existe algún $\varepsilon_i > 0$ o el problema es no acotado, entonces la cara F_J no es eficiente. Este hecho facilita la resolución de un PPLM cuando empleamos el concepto de cara dado en la Definición 2.1.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco las sugerencias hechas por dos referees anónimos que han contribuido a la mejora de este trabajo, así como las del editor.

REFERENCIAS

BAZARAA, M. S., y SHETTY, C. M. (1979): *Nonlinear Programming*, Wiley.

BAZARAA, M. S., y JARVIS, J. J. (1981): *Programación Lineal y Flujo en Redes*, Limusa.

GARCIA LAGUNA, J. (1989): «Nota sobre direcciones extremas», *XVIII Reunión Nacional de Est. e I.O.* (Santiago de Compostela), pp. 201-205.

GOLDMAN, A. J., y TUCKER, A. W. (1956): «Polyhedral convex cones», *Ann. of Math. Studies*, 38, Princeton, pp. 19-40.

GRÜNBAUM, B. (1967): *Convex polytopes,* Wiley-Interscience.

MARTINI, H. (1989): «Determinig classes of convex bodies by restricted sets of Steiner symetrizations», *Geometriae Dedicata,* 30, pp. 247-254.

McMULLEN, P., y SHEPARD, G. C. (1971): *Convex polytopes and the upper bound conjecture,* Lec. Not. Ser. 3, Cambridge University Press.

MURTY, K. G. (1971): «Adjacency on convex polyhedra», *Siam Review,* vol. 13, núm. 3, pp. 377-386.

MURTY, K. G. (1983): *Linear Programming,* Wiley.

STOER, J., y WITZGALL, C. (1970): *Convexity and optimization in finite dimension I,* Springer-Verlag.