TRABAJOS DE INVESTIGACION OPERATIVA
Vol. 6, núm. 1, 1991, pp. 61 a 69

EL CONJUNTO EFICIENTE EN PROBLEMAS DE LOCALIZACION CON NORMAS MIXTAS (L_p)

CARRIZOSA PRIEGO, E. J.
FERNÁNDEZ GARCÍA, F. R.
Dpto. de Estadística e I.O.
Universidad de Sevilla

RESUMEN

En el presente trabajo establecemos una nueva aproximación a la solución del problema de localización con normas mixtas a través de las *direcciones de proyección.*

Probamos que el cierre octogonal de los puntos de demanda es una buena aproximación para el conjunto de puntos eficientes cuando el problema está formulado como un problema multiobjetivo con normas mixtas tipo l_p. Demostramos que esta cota es alcanzable, dando condiciones para que ello ocurra, lo que es de gran importancia para el caso de que los patrones de distancia estén distribuidos al azar.

Palabras clave: Localización, Normas Mixtas, Puntos eficientes.
Clasificación AMS : 90B99.

SUMMARY

In this paper we give a new approach to the efficient set for multiobjective location problems with mixed norms through *projection directions.*

We show that the octogonal hull of the demand points is a good approximation for the efficient set when the norms belong to the family of l_p norms. We also show that this bound may be reached, and give conditions for that. This of great interest if distance patrons are randomly distributed.

Key words: Location, Mixed Norms, Efficient Points.

Classification AMS: 90B99.

Recibido: Febrero 1990.
Revisado: Octubre 1990.

1. INTRODUCCION

La mayor parte de los modelos de localización de un servicio pueden formularse del siguiente modo:

$$\text{Min}\,\Phi\,(f_i(x), i = 1, 2, ..., m, g(x)) \quad \text{s.a.} \ \ x \in X \tag{1}$$

donde X es el conjunto de posibles localizaciones del servicio, $f_i(\cdot)$ la función que valora la distancia del cliente i al servicio, $g(\cdot)$ una función de costo por la ubicación del servicio en x, y $\Phi(\cdot)$ una función de utilidad que nos da una valoración global de la localización del servicio en x.

En muchos modelos los clientes se consideran puntos $d_1, d_2, ..., d_m$ de $\mathbb{R}^2$ y la distancia medida por funciones norma $f_i(x) = N_i(x - d_i)$.

Clásicamente la función Φ es la función suma, lo que conduce a problemas de la *mediana*, o bien la función máximo, lo que nos lleva a los problemas del *centro*, con lo que según la forma de la función Φ se determina la localización óptima del servicio. No obstante para no imponer un criterio a priori, se puede estudiar el problema de modo independiente de la función Φ, estableciendo el problema como un problema multiobjetivo, ya que cada cliente i desea el servicio lo más cerca posible de d_i, y determinando las soluciones eficientes de este problema se tendrán todas las soluciones del problema original bajo ciertas condiciones para la función globalizadora.

Esto hace que el siguiente problema multicriterio sea muy importante en Teoría de Localización:

$$\text{(P)} \qquad \text{«Min»}\ (N_1(x - d_1), N_2(x - d_2), ..., N_m(x - d_m)) \quad x \in X \subset \mathbb{R}^2$$

Este problema ha sido estudiado en la literatura, donde se han establecido propiedades y caracterizaciones de los puntos eficientes, Wendell y Hurter (1973), Hansen y otros (1980), Durier y Michelot (1985). Pelegrín y Fernández (1988) han dado algoritmos para encontrar el conjunto de puntos eficientes para este problema en el caso de ser $X = \mathbb{R}^2$, y ser $N_i = N$ para todo i, cualquiera que sea la norma N.

En el caso de normas diferentes en cada punto, el problema se presenta más complejo. Existen en la literatura algunos resultados que determinan un *quasinúcleo débil* (White, 1982) para (P): un conjunto $K \subset \mathbb{R}^2$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}^2$ existe un cierto $y \in K$ tal que $N_i(x - d_i) \geqslant N_i(y - d_i)$ para todo i.

En este sentido, es clásico el resultado (Hansen y otros, 1980) que establece que el *cierre octogonal* es un quasinúcleo débil para (P) si todas las normas en (P) son l_p.

En el presente trabajo proponemos una nueva metodología de construcción de quasinúcleos débiles para (P). Como corolario, obtenemos el citado resultado sobre el cierre octogonal, y establecemos condiciones para que esta cota del conjunto eficiente sea alcanzable.

2. RESULTADOS BASICOS

Sea $v \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$. La recta $r_v = \{\lambda v : \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(x, y) : v_2 x - v_1 y = 0\}$ divide a $\mathbb{R}^2$ en dos semiplanos $\Gamma_v^+ = \{(x, y) : v_2 x - v_1 y \geqslant 0\}$ y $\Gamma_v^- = \{(x, y) : v_2 x - v_1 y \leqslant 0\}$.

Por comodidad, denotaremos por $\langle v \rangle$ a la recta r_v, por $\pi_v(x)$ a la proyección ortogonal de x sobre $\langle v \rangle$, y por $v^\perp$ al vector $(v_2, -v_1)$. El cambio de dirección del vector v cambiaría Γ_v^+ y Γ_v^-.

Definición 2.1

v genera una *dirección de proyección* para la norma N sii $\forall\, x \in \Gamma_v^+$, $\forall\, y \in \Gamma_v^-$,

$$N(x - y) \geqslant N(\pi_v(x) - y) \quad \text{y} \quad N(y - x) \geqslant N(\pi_v(y) - x)).$$

Definición 2.1

Sea N una norma en $\mathbb{R}^2$, $v \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$, y $x \in \mathbb{R}^2$.

Por $f_{x,N}^v$ y $g_{x,N}^v$ denotamos las funciones de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}^+$ definidas por las igualdades

$$f_{x,N}^v(\lambda) = N(\pi_v(x) + \lambda v^\perp), \quad g_{x,N}^v(\lambda) = N(\pi_v(x) - \lambda v^\perp)$$

Teorema 1

$v \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ genera una dirección de proyección para la norma N sii $f_{x,N}^v(\cdot)$ es no decreciente $\forall\, x \in \Gamma_v^+$, y $g_{y,N}^v(\cdot)$ es no decreciente $\forall\, y \in \Gamma_v^-$.

Demostración

Sea $x \in \Gamma_v^+$, λ_1 y $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ tales que $0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2$. Entonces $f_{x,N}^v(\lambda_2) = N(\pi_v(x) + \lambda_2 v^\perp) = N(\pi_v(x) + (\lambda_2 - \lambda_1)v^\perp - (-\lambda_1 v^\perp)) \geqslant$

$N(\pi_v(\pi_v(x) + (\lambda_2 - \lambda_1)v^\perp) - (-\lambda_1 v^\perp)) = N(\pi_v(x) + \lambda_1 v^\perp) = f^v_{x,N}(\lambda_1)$.

$g^v_{y,N}(\lambda_2) = N(\pi_v(y) - \lambda_2 v^\perp) = N(\pi_v(y) - (\lambda_2 - \lambda_1)v^\perp - \lambda_1 v^\perp) \geqslant N(\pi_v(\pi_v(y) - (\lambda_2 - \lambda_1)v^\perp) - \lambda_1 v^\perp)) = N(\pi_v(y) - \lambda_1 v^\perp) = g^v_{y,N}(\lambda_1)$ ■

Teorema 2

Sea N una norma en $\mathbb{R}^2$; sean $v \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$, $x \in \Gamma^+_v$, $y \in \Gamma^-_v$.

a) $f^v_{x,N}(\cdot)$ es no decreciente sii $f^v_{x,N}(\lambda) \geqslant f^v_{x,N}(0)\ \forall \lambda \geqslant 0$.

b) $g^v_{y,N}(\cdot)$ es no decreciente sii $g^v_{y,N}(\lambda) \geqslant g^v_{y,N}(0)\ \forall \lambda \geqslant 0$.

Demostración

La implicación hacia la derecha es obvia tanto en a) como en b). Para el recíproco, sean $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$. De la convexidad de N y la hipóresis, se deduce que $f^v_{x,N}(\lambda_1) = N(\pi_v(x) + \lambda_1 v^\perp) = N((\lambda_1/\lambda_2)(\pi_v(x) + \lambda_2 v^\perp) + ((\lambda_2 - \lambda_1)/\lambda_2)\pi_v(x)) \leqslant (\lambda_1/\lambda_2)N(\pi_v(x) + \lambda_2 v^\perp) + ((\lambda_2 - \lambda_1)/\lambda_2)N(\pi_v(x)) \leqslant N(\pi_v(x) + \lambda_2 v^\perp) = f^v_{x,N}(\lambda_2)$. Un razonamiento análogo prueba la implicación para b). ■

Como consecuencia de los teoremas anteriores, se tiene

Corolario 1

Sea N una norma en $\mathbb{R}^2$. $v \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ genera una dirección de proyección para N sii $N(\pi_v(x) + \lambda v^\perp) \geqslant N(\pi_v(x))\ \forall x \in \mathbb{R}^2$.

Corolario 2

Sea N una norma en $\mathbb{R}^{2\bullet} v \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ genera una dirección de proyección para N si y sólo si

$$N(\pi_v(z) + \lambda v^\perp) \geqslant 1 \quad \forall z \in \mathbb{R}^2 \quad \text{tal que} \quad N(\pi_v(z)) = 1.$$

Demostración

Es inmediata a partir del corolario 1 y del hecho de que $N(\mu x) = \mu N(x)\ \forall \mu \geqslant 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^2$. ■

Comentario

El hecho de que $N(z) \geqslant 1$ $\forall z$ tal que $N(\pi_v(z)) = 1$ quiere decir que la recta $\{\pi_v(z) + \lambda v^\perp : \lambda \in \mathbb{R}\}$ no corta al interior de la bola unidad $B_N(1)$ para la norma N.

Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto cerrado y convexo. Definimos la proyección ortogonal sobre A como la aplicación $\pi_A : \mathbb{R}^2 \to A$ tal que $\pi_A(x) = z \in A$ equivale a que $\|x - z\|_2 = \text{mín}\,\{\|x - w\|_2 : w \in A\}$.

Teorema 3

Sea N una norma, $D = \{d_1, d_2, ..., d_n\} \subset \mathbb{R}^2$, y v una dirección de proyección para N. Si A es la mínima banda de lados paralelos a v que contiene a D. Entonces,

$$N(z - d_i) \geqslant N(\pi_A(z) - d_i) \ \forall z \in \mathbb{R}^2, \quad i = 1, ..., n$$

Demostración

Las desigualdades son triviales si $z \in A$. Por otra parte, se tiene que existen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1 \leqslant \lambda_2$ tales que

$$A = \{z \in \mathbb{R}^2 : z \in [\mu v + \lambda_1 v^\perp, \mu v + \lambda_2 v^\perp] \text{ para algún } \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Estudiemos el caso $\lambda > \lambda_2$. Es evidente que $z - \lambda_2 v^\perp \in \Gamma_v^+$, y que $d_i - \lambda_2 v^\perp \in \Gamma_v^-$ ($\forall i = 1, ..., n$); además, por ser v dirección de proyección, para $i = 1, ..., n$,

$$N(z - d_i) = N((z - \lambda_2 v^\perp) - (d_i - \lambda_2 v^\perp)) \geqslant N(\pi_v(z - \lambda_2 v^\perp) - (d_i - \lambda_2) v^\perp))$$

$$= N(\pi_v(z - \lambda_2 v^\perp) + \lambda_2 v^\perp - d_i) = N(\pi_A(z) - d_i).$$

Razonando análogamente para el caso $\lambda < \lambda_1$, se tiene el resultado. ■

En el caso de que la norma N sea poliédrica, podemos caracterizar geométricamente el conjunto de direcciones de proyección asociadas.

Definición 2.3

Una norma N en $\mathbb{R}^n$ se dice poliédrica si y sólo si su bola unidad $B_N(1) = \{z : N(z) = 1\}$ es un poliedro.

Es evidente que si N es poliédrica, entonces cualquier bola es un poliedro.

Definición 2.4

Sea N una poliédrica en $\mathbb{R}^2$, y $v \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$. Se dice que $\langle v \rangle$ es una dirección de viaje para N si y sólo si todos los puntos de $B_N(1) \cap \langle v \rangle$ son puntos extremos del poliedro $B_N(1)$.

Teorema 3. (Caracterización de las direcciones de proyección en normas poliédricas).

Sea N una norma poliédrica en $\mathbb{R}^2$.

El vector no-nulo v genera una dirección de proyección sii cumple alguna de las dos condiciones siguientes:

a) $\langle v \rangle$ es dirección de viaje para N, y si $N(\lambda v) = 1$, entonces $N(\lambda v + \mu v^{\perp}) \geqslant 1$.

b) $\langle v \rangle$ es ortogonal a una cara C de $B_N(1)$, $\dim(C) = 1$, y además, $\langle v \rangle \cap C \cap B_N(1) \neq \phi$.

Demostración

La implicación hacia la derecha es una consecuencia de los corolarios 1 y 2. Recíprocamente, sea $\langle v \rangle$ una dirección de proyección; si $\langle v \rangle$ es dirección de viaje, entonces, por el corolario 2, debe satisfacer a); si no es dirección de viaje, entonces existe una cara C no degenerada de $B_N(1)$ tal que $\langle v \rangle \cap C \cap B_N(1) \neq \phi$.

Si $\langle v \rangle$ no fuera ortogonal a C, existirían $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tales que $\mu v \in C \cap B_N(1)$, y $N(\mu v + \lambda v^{\perp}) < 1$, lo que, por el corolario 2, contradice que $\langle v \rangle$ sea una dirección de proyección. Por lo tanto, se cumple b). ■

3. APLICACION A NORMAS L_P

Definición 3.1

Sea $B \subset \mathbb{R}^2$. Se llama cierre octogonal de B y se denota C.O.(B) al menor poliedro que contiene a B y cuyas caras son paralelas a los ejes coordenados o forman ángulos de $\pi/4$ con ellos.

Como aplicación de los teoremas anteriores, se tiene que el cierre octogonal del conjunto D de puntos de demanda es un quasinúcleo débil para (P) cuando las normas son l_p.

Teorema 5

Las direcciones de proyección tanto para la norma $\|\cdot\|_1$ como para la norma $\|\cdot\|_\infty$ son las generadas por los vectores $v_1 = (1,0)$, $v_2 = (0,1)$, $v_3 = (1,1)$, $v_4 = (1,-1)$.

Teorema 6

Si $x, y \in \mathbb{R}^2$ son tales que $\|x\|_1 \leqslant \|y\|_1$, $\|x\|_\infty \leqslant \|y\|_\infty$, entonces

$$\|x\|_p \leqslant \|y_p\| \quad \forall\, p \in [1, +\infty].$$

Demostración

Sean $y \in \mathbb{R}^2$, $p \in (1, +\infty)$.

Sea $v = \text{máx}\,\{\|x\|_p^p : \|x\|_1 \leqslant \|y\|_1,\ \|x\|_\infty \leqslant \|y\|_\infty\}$. Veamos que, en efecto, $v = \|y\|_p^p$. Para ello, notemos en primer lugar que, en la solución óptima x^* del problema anterior, la primera restricción debe cumplirse con igualdad: de lo contrario, $|x_1^*| + |x_2^*| < \|y\|_1 \leqslant 2 \cdot \|y\|_\infty$, por lo que existiría x_i^* (sin pérdida de generalidad podemos suponer que es x_1^*) tal que $|x_1^*| < \|y\|_\infty$.

Pero esto implica que el punto $((1 + \alpha)x_1^*, x_2^*)$ es factible para cierto $\alpha > 0$, y con mayor valor en la función objetivo que x^*, lo que contradice que x^* es óptimo por hipótesis.

Por consiguiente,

$$v = \text{máx}\,\{|x_1|^p + (\|y\|_1 - |x_1|)^p : \|y\|_1 - \|y\|_\infty \leqslant |x_1| \leqslant \|y\|_\infty\}.$$

De la convexidad de la función objetivo en la región factible se tiene que el óptimo debe alcanzarse en la frontera, esto es:

$$v = \text{máx}\,\{(\|y\|_1 - \|y\|_\infty)^p + \|y\|_\infty^p \quad , \quad \|y\|_\infty^p + (\|y\|_1 - \|y\|_\infty)^p\} = \|y\|_p^p$$

c.q.d. ∎

Teorema 7

Supongamos que, en el punto de demanda d_i, se utiliza la norma $N_i = \|\cdot\|_{p_i}$, con $p_i \in [1, +\infty]$ $\forall\, i = 1, ..., n$. Entonces,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^2 \ \exists\, y \in \text{C.O.}(\{d_1, ..., d_m\}) \quad \text{tal que} \quad N_i(x - d_i) \geqslant N_i(y - d_i) \ \forall\, i.$$

Demostración

Para $i = 1, ..., 4$, sea A_i la mínima banda que contiene a $D = \{d_1, ..., d_n\}$ y de lados paralelos a v_i, donde los v_i son los definidos en el teorema 5.

Sea $y = \pi_{A_4}\pi_{A_3}\pi_{A_2}\pi_{A_1}(x) \in \text{C.O.(D)}$. Por el teorema 3,

$$\|x - d_i\|_1 \geqslant \|y - d_i\|_1 \quad , \quad \|x - d_i\|_\infty \geqslant \|y - d_i\|_\infty \quad (i = 1, ..., n)$$

Por el teorema 6, para $i = 1, ..., n$,

$$\|x - d_i\|_{p_i} \geqslant \|y - d_i\|_{p_i}$$

y esto prueba el teorema. ■

Bajo ciertas condiciones, el cierre octogonal es de puntos eficientes; el siguiente teorema da condiciones para que esto ocurra.

Teorema 8

Supongamos que se satisfacen las condiciones siguientes:

C1) Sobre cada faceta de C.O. paralela a alguno de los ejes cartesianos de referencia, existe un punto de demanda con norma $\|\cdot\|_1$, y sobre cada faceta formando ángulo de $\pi/4$ con los ejes, existe un punto de demanda con norma $\|\cdot\|_\infty$.

C2) Sobre cada vértice de C.O. intersección de dos facetas de C.O. paralelas a los ejes cartesianos de referencia, existe un punto de demanda con norma $\|\cdot\|_1$, y sobre cada vértice intersección de dos facetas formando ángulo de $\pi/4$ con los ejes, existe un punto de demanda con norma $\|\cdot\|_\infty$.

Entonces, todos los puntos de $\partial(\text{C.O.}\{d_1, ..., d_m\})$ son eficientes.

Demostración

Sea $x_0 \in \partial(\text{C.O. } \{d_1, ..., d_m\})$. Si $x_0 \in \{d_1, ..., d_m\}$, trivialmente es eficiente, luego podemos suponer que $x_0 \notin \{d_1, ..., d_m\}$. Sea C una faceta tal que $x_0 \in C$ y sea r_C la recta ortogonal a C. Por hipótesis se tiene que exite un punto de demanda $d_i \in C \cap \{d_1, ..., d_m\}$, con norma $\|\cdot\|_1$ si C es paralela a los ejes coordenados, y $\|\cdot\|_\infty$ si C forma un ángulo de $\pi/4$ con éstos. Por convenio, diremos que d_i pertenece al semiplano negativo de r_C.

Además, es obvio que existe un punto de demanda d_k perteneciente al semiplano positivo de r_C, y tal que

$$\{z : N_i(z - d_i) \leqslant N_i(x_0 - d_i)\} \cap \{z : N_k(z - d_k) \leqslant N_k(x_0 - d_k)\} = \{x_0\},$$

lo que implica que x_0 es eficiente. ■

REFERENCIAS

[1] DURIER, R., y MICHELOT, Ch. (1985): «Geometrical properties of Weber-Fermat problem», *European Journal of Operational Research,* 20, 332-343.

[2] HANSEN. P.; PERRER, J., y THISSE, J. F. (1980): «Location Theory, Dominance and Convexity: Some further results», *Operations Reserarch,* 28, 1241-1250.

[3] PELEGRIN, B., y FERNANDEZ, F. R. (1988): «Determination of efficient point in multiple-objective location problems», *Naval Research Logistic,* 35, 693-705.

[4] PLASTRIA, F. (1984): «Localization in single facility location», *European Journal of Operational Research,* 18, 215-219.

[5] THISSE, J. F.; WARD, J. E., y WENDELL, R. E. (1984): «Some properties of location problems with block and round norms», *Operations Research,* 32, 1309-1327.

[6] WARD, J. E., y WENDELL, R. E. (1980): «A new norm for measuring distance wich yields linear location problems», *Operations Research,* 28, 836-843.

[7] WENDELL, R. E., y HURTER, A. P. (1973): «Location Theory, Dominance and Convexity», *Operations Research,* 21, 314-320.

[8] WHITE, D. J. (1982): *Optimality and Efficiency*, Wiley, 1982.