TRABAJOS DE INVESTIGACION OPERATIVA
Vol. 5. Núm. 1, 1990 pp. 61 a 71

UN NUEVO RESULTADO SOBRE LA COMPLEJIDAD DEL PROBLEMA DEL *P*-CENTRO

JOSÉ MORENO
Departamento de Estadística e IO
Facultad de Matemáticas
Universidad de La Laguna (Tenerife)

RESUMEN

Sea G un grafo no dirigido con n vértices y m aristas. Un *p-Centro* de G es un conjunto de p puntos en el que se minimiza la distancia al vértice más lejano. Esta distancia mínima es el *p-Radio* de G. Un *Centro Local* es un punto c a la misma distancia (llamada rango del centro local) de un conjunto no vacío de vértices que no son todos accesibles a través de un mismo vértice adyacente a c. Todo p-radio es el rango de algún centro local, por tanto, para resolver el problema del p-centro basta encontrar el menor rango r tal que existe un conjunto de p puntos que cubren a todos los vértices dentro de una distancia r. Este valor r es el p-radio y el correspondiente conjunto es un p-centro. Para encontrar estos conjuntos basta considerar los *r-Extremos*, puntos a distancia r de algún vértice. En este trabajo se utilizan los r-extremos para construir un sencillo algoritmo de complejidad $O(m^p \cdot n^{p+1} \cdot \log n)$ que es comparado experimentalmente con el procedimiento de relajación de Handler (1979).

Palabras claves: Localización. Grafos. Minimax.
Clasificación AMS: 90C35, 90B99.

ABSTRACT

Let G be an undirected graph with n vertices and m edges. A *p-Center* of G is a set of p points that minimizes the distance to the farthest vertex. This minimum is the *p-Radius*. A *Local Center* is a point c at the same distance (the *Range* of the local center) to the vertices of a nonempty set that are not all of them optimally reachable from c through the same adjacent vertex. Every p-radius is the range of a local center then we only need to find the least range r such that there is a set of p points that covers all the vertices within a distance

Recibido, abril 1988.
Revisado, diciembre 1988.

r. This value of r is the p-radius and the corresponding set is a p-center. By considering the r-*Extremes* (the points that are at distance r from any vertex) is enough to find these sets. In this paper, by using r-extremes, we give an $O(m^P \cdot n^{P+1} \cdot \log n)$ simple algorithm that is experimentally compared with the Handler relaxation algorithm.

Key words: Location. Graph. Minimax.
AMS Classification: 90C35, 90B99.

1. FORMULACION DEL PROBLEMA

El problema del p-centro en un grafo no dirigido consiste en dado un conjunto finito de puntos de demanda (usualmente un conjunto de vértices) establecer la localización de p puntos sobre el grafo en los que se deben establecer los servicios para minimizar la máxima distancia entre un punto de demanda y el punto de servicio más próximo. El **p**-centro es esta localización óptima. Este problema fue formulado por Hakimi (1965) quien dio el primer procedimiento de solución. Minieka (1970) introdujo el concepto de centro local que, junto con los vértices, constituyen un conjunto finito de puntos entre los que encontrar el p-centro. Kariv y Hakimi (1979) probaron que el problema del p-centro en un grafo no dirigido es NP-completo aportando un algoritmo de complejidad $O(m^P \cdot n^{2(P-1)} \cdot \log n)$ que es el de menor complejidad aparecido hasta entonces. Mediante la utilización de un nuevo tipo de puntos, los r-extremos, construimos un sencillo algoritmo de complejidad $O(m^P \cdot n^{P+1} \cdot \log n)$. Combinando ambos procedimientos y con unas estructuras de datos dinámicas muy eficientes Tamir ha rebajado la complejidad hasta $O(m^P \cdot n^{P-1} \cdot \log^3 n)$.

Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido. V consiste en n puntos llamados vértices y E contiene m *aristas*. Cada arista es un conjunto continuo y lineal de puntos enlazando dos vértices de V. Junto con el grafo G hay una función de *longitud* positiva t sobre *las aristas* de E.

Supongamos que en E no existen bucles (aristas uniendo un vértice consigo mismo) ni aristas múltiples (dos o más aristas uniendo el mismo par de vértices). Denotamos por $[i,j] = [j,i]$ una arista uniendo los vértices i y j (que son los *extremos* de la arista) y por $t(i,j) = t(j,i)$ su longitud.

Un punto x de la arista $[i,j]$ que no sea i ni j es un punto *interior* a $[i,j]$. La *inserción* del punto x en el grafo G lo transforma en el grafo $G \cdot x = (V', E')$, donde x es un nuevo vértice en $G \cdot x$ ($V' = V \cup \{x\}$)

y la arista $[i, j]$ se divide en dos subaristas: $[i, x]$ consistente en los puntos entre i y x, y $[x, j]$ consiste en los puntos entre x y j; la arista $[i, j]$ es reemplazada por las dos aristas $[i, x]$ y $[x, j]$ en el grafo $G \cdot x (E' = (E - \{[i, j]\}) \cup \{[i, x], [x, j]\})$. La inserción de un vértice i no produce ningún cambio en el grafo $(G \cdot i = G)$.

Dos puntos son *adyacentes* si pertenecen a una misma arista. Denotamos $\mathrm{Ady}(x)$ el conjunto de vértices adyacentes al punto x. Para un punto x interior a la arista $[i, j]$ es $\mathrm{Ady}(x) = \{i, j\}$, pero para un vértice i es $\mathrm{Ady}(i) = \{j \in V/[i, j] \in E\}$.

Un punto interior a una arista está determinado por la longitud de una de las subaristas producidas por su inserción (la longitud de la otra subarista es la diferencia a la longitud total de la arista). Denotamos por $x = p([i, j], t)$, $0 \leqslant t \leqslant t(i, j)$, el punto de $[i, j]$ tal que $t(i, x) = t$. Si $t = 0$ el punto $p([i, j], t)$ es el vértice i y si $t = t(i, j)$ el punto $p([i, j], t)$ es el vértice j.

La inserción de puntos interiores transforma un grafo no dirigido genérico con longitudes positivas en un grafo equivalente sin bucles ni aristas múltiples. Por tanto no supone restricción ninguna la inexistencia de bucles ni aristas múltiples.

Dados dos vértices u y v del grafo G con función de longitud $t(.,.)$, la distancia $d(u, v)$ se define como la longitud del camino de longitud mínima o camino mínimo entre u y v (ver, por ejemplo, Gondran y Minoux (1984)). Para cualesquiera dos puntos x e y de G la distancia $d(x, y)$ es la distancia entre los vértices x e y del grafo $(G \cdot x) \cdot y$; por tanto, la función de distancia $d(.,.)$ (así como el concepto de camino mínimo) es aplicable a cualquier par de puntos de G. El conjunto de los puntos de G con la distancia $d(.,.)$ es un espacio métrico compacto y, por tanto, el mínimo de cualquier función continua se alcanza en él (ver Moreno (1985)).

La distancia de entre un conjunto finito de puntos X y un vértice u es $d(X, u) = \min \{d(x, u) : x \in X\}$. Consideremos un conjunto U de vértices del grafo G.

Definición 1

La *Separación*, con respecto a U, de un conjunto finito de puntos X es:

$$S_U(X) = \max \{d(X, u) : u \in U\}$$

Definición 2

El *Problema del p-Centro* de U consiste en encontrar el conjunto X^* donde se alcance el mínimo:

$$\min \{S_U(X) : |X| \leqslant p\}.$$

Entonces X^* es un *p-Centro* de U y $S_U(X^*)$ *es el p-Radio.*

Definición 3

El *Problema del r-Cubrimiento* de U consiste en encontrar el conjunto X^* donde se alcance el mínimo:

$$\min \{|X| : S_U(X) \leqslant r\}.$$

Entonces X^* es un *r-Cubrimiento* de U y $|X^*|$ es la *r-Dominación* de U.

Para cualquier positivo r, siempre existe un r-cubrimiento de U. Puesto que la separación es una función continua y el conjunto de los puntos del grafo es compacto también existe siempre un p-centro de U.

Frecuentemente el conjunto de vértices U es todo el conjunto V de vértices del grafo. Entonces hablamos simplemente de p-centro y de r-cubrimiento, denotamos por $r(p)$ y $p(r)$ el p-radio y la r-dominación de V y por $S(X)$ la separación con respecto a V.

El problema del p-centro fue formulado por Hakimi (1965), quien dio un procedimiento finito para resolver el problema del 1-centro examinando la función de separación sobre las aristas. El problema del p-centro quedaba resuelto porque siempre hay un p-centro constituido por 1-centros de los p conjuntos de una partición del conjunto de vértices. Minieka (1970) dio un procedmiento para resolver el problema del p-centro consistente en resolver problemas de r-cubrimiento, disminuyendo r hasta encontrar el menor valor de r tal que el r-cubrimiento tenga más de p puntos.

Evidentemente $r < r(p)$ si y sólo si $p < p(r)$. Por tanto, $r(p)$ es el menor valor r tal que $p(r) \leqslant p$ y entonces si $r = r(p)$ cualquier r-cubrimiento es un p-centro. Por tanto, el problema del p-centro se puede resolver determinando r-cubrimientos: si la r-dominación es superior a p se aumenta r, en otro caso se disminuye r. Basta asegurar que se pueda acceder al valor exacto de $r(p)$ mediante la solución de un número finito de problemas de r-cubrimiento, y para ello es necesario el concepto de centro local.

2. CONJUNTO FINITO DOMINANTE

Un conjunto de puntos es *dominante* para un problema si se puede encontrar siempre una solución del problema en dicho conjunto. Las dominaciones sólo toman valores en un conjunto finito, el de los números enteros entre 1 y n. Determinando un conjunto finito dominante de puntos para el problema del p-centro podemos obtener un conjunto finito de valores para los radios. Entonces se obtiene un p-centro resolviendo problemas de r-cubrimiento para dichos valores de r.

Definición 4

Un punto x es un *Centro Local* de U con *Rango* r si y sólo si U tiene un subconjunto no vacío U' tal que:

i) Para cada $u \in U'$:

$$d(x, u) = r$$

ii) Para cada $v \in \mathrm{Ady}(x)$, existe $u \in U'$:

$$r < t(x, v) + d(v, u).$$

Nótese que si x es interior a una arista la condición ii) sólo afecta a los extremos de la arista. Por tanto, un punto x interior a $[i, j]$ es un centro local con rango r si y sólo si existen dos vértices u y v de U tales que:

i) $r = t(x, i) + d(i, u)$ y $r = t(x, j) + d(j, v$.
ii) $r < t(x, j) + d(j, u)$ y $r < t(x, i) + d(i, v)$.

Minieka (1970) definió los centros locales en el interior de las aristas demostrando que los centros locales y los vértices constituyen un conjunto dominante para el problema del p-centro. Handler (1979) definió el rango de un centro local como la distancia común a los vértices correspondientes y extendió el concepto a los vértices considerando que un vértice i es un centro local con rango r si existen vértices u y v tales que:

i) $d(i, u) = d(i, v) = r$.
ii) Para ningún $j \in \mathrm{Ady}\,(i)$:

$$d(j, u) = d(j, v) = r - t(i, j).$$

Handler (1979) (también Handler y Mirchandani (1979)) dio una versión relajada del procedimiento de Minieka que es muy eficiente para valores bajos de p. La principal idea consiste en que, generalmente, el p-centro es también un p-centro de algún pequeño subconjunto de vértices muy distantes. Por tanto, se busca un p-centro de un conjunto relajado de vértices muy distantes consistente en centros locales de dicho conjunto relajado. Además el p-radio es el máximo rango de los centros locales que forman el p-centro.

Sin embargo, para probar formalmente este resultado se necesita la definición 4 en vez de la utilizada por Handler. Existen grafos planares sencillos en los que el 1-centro es un vértice que es un centro local cuya separación es su rango usando dicha definición pero no la usada por Handler (ver Moreno (1986)). El procedimiento de relajación propuesto por Handler tuvo que ser revisado en Moreno (1985) corrigiendo la definición de centro local en los vértices pero sin perjudicar su eficiencia.

El algoritmo de relajación y el propuesto por Minieka son ambos de complejidad $O(m^P \cdot n^{2P})$. Kariv y Hakimi (1979) dieron un algoritmo de complejidad $O(m^P \cdot n^{2(P-1)} \cdot \log n)$ que es el de menor complejidad aparecido hasta el momento. Este algoritmo consiste en, para cada conjunto de $p - 1$ centros locales, determinar un 1-centro de los vértices no cubiertos por estos $p - 1$ centros locales dentro de una distancia menor o igual que su rango. Uno de estos 1-centros, obtenido por un algoritmo $O(m \cdot n \cdot \log n)$, y los $p - 1$ centros locales correspondientes forman un p-centro.

A continuación obtenemos un conjunto de puntos finito y dominante para los problemas de r-cubrimiento de menor tamaño que el conjunto de los centros locales. Usando dichos puntos se obtiene un sencillo algoritmo de complejidad $O(m^P \cdot n^{P+1} \cdot \log n)$ para resolver el problema del p-centro. Este algoritmo se deriva también del procedimiento original de Minieka.

Para cada valor positivo r, el nuevo conjunto finito dominante está constituido por los r-extremos.

Definición 5

El punto x es un *r-Extremo* de U si y sólo si existe un vértice u de U tal que $d(x, u) = r$.

Lema

Existen $O(m \cdot n^2)$ centros locales del conjunto de vértices V y, para cada r positivo, existen $O(m \cdot n)$ r-extremos del conjunto de vértices V.

Demostración. Si en el interior de la arista $[i, j]$ existe un centro local de los vértices u y v, el valor del rango es: $(d(i, u) + t(i, j) + d(j, v))/2$ o $(d(i, v) + t(i, j) + d(j, u))/2$. El rango de un centro local en un vértice es la distancia a algún otro vértice. Por tanto, el tamaño del conjunto de centros locales de V, y el conjunto de valores de sus rangos, es $O(m \cdot n^2)$.

Por otro lado, dado r positivo, para cada vértice v hay, a lo más, dos puntos a distancia r en cada arista $[i, j]$ que serían: $p([i, j], r - d(i, v))$ y $p([i, j], t(i, j) - r + d(j, v))$. Por tanto hay, a lo sumo, $2n$ r-extremos en cada arista y $2m \cdot n$ en todo el grafo.

Teorema 1

Para cualquier número positivo r, no mayor que $r(1)$, existe un r-cubrimiento de V consistente en r-extremos.

Demostración. Sea $X = \{x_1, ..., x_p\}$ un r-cubrimiento de V y denotemos por $V_i = \{v \in V / d(x_i, v) \leqslant r\}$, para $i = 1, ..., p$. Para cada x_i, sea z_i un punto del grafo tal que $d(z_i, v) \geqslant r$ para algún v de V_i; este punto existe porque $r \leqslant r(1)$. Sea y_i el punto más cercano a x_i del camino mínimo de z_i a x_i tal que $d(y_i, v) = r$ para algún v de V_i. Este punto existe por la continuidad de las funciones de distancia $d(., v)$. Entonces, para todo $v \in V_i$ es $d(y_i, v) \leqslant r$ y para algún $v_i \in V_i$ es $d(y_i, v_i) = r$; por tanto, y_i es un r-extremo del vértice v_i.

Sea el conjunto $Y = \{y_i, ..., y_p\}$. Puesto que Y tiene p puntos y $S(Y) \leqslant r$, Y es un r-cubrimiento de V. Finalmente observamos que el conjunto Y está constituido por r-extremos.

3. EL ALGORITMO

El procedimiento propuesto para resolver el problema del p-centro utiliza los centros locales para obtener una lista finita de posibles valores del p-radio y los r-extremos para resolver los problemas de r-cubrimiento. Los posibles valores del p-radio son los $O(m \cdot n^2)$ posibles rangos distintos. El valor r recorre la lista de rangos y el p-radio es el menor de estos valores tal que existe un r-cubrimiento con p puntos. Para cada valor de r, se busca un r-cubrimiento constituido por r-extremos. Este algoritmo determina un p-centro de un conjunto cualquiera de vértices U del grafo G mediante los siguientes pasos:

Algoritmo EXTREMO

1. *Inicializaciones:*

   1.1. Calcular las distancias entre los pares de vértices.
   1.2. Determinar los rangos distintos de los centros locales de U e introducirlos ordenadamente en una lista L.

2. *Iteraciones:*

   Repetir, hasta que la lista esté vacía, las operaciones:

   2.1. Sea r el rango situado en la posición media de la lista L. Determinar el conjunto E de los r-extremos de U.
   2.2. Buscar un conjunto X de p puntos del conjunto E tal que: $d(X,u) \leqslant r$, para cualquier $u \in U$.
   2.3. Si existe el conjunto X eliminar de la lista L a los valores mayores o iguales a r. En otro caso, eliminar de la lista L los valores menores o iguales a r.

3. *Solución*

   El último conjunto X obtenido en 2.2 es p-centro de U.

En virtud del teorema 1 y de que el último valor de r para el que se ha podido encontrar el conjunto X es el p-radio, dicho conjunto es un p-centro de U.

Teorema 2

El algoritmo EXTREMO aplicado al conjunto de vértices V es de complejidad $O(m^p \cdot n^{p+1} \cdot \log n)$ para cualquier $p > 1$.

Demostración. Las distancias entre todos los pares de vértices pueden ser calculadas con $O(m \cdot n \cdot \log n)$ operaciones (ver, por ejemplo, Gondran y Minoux (1984) o Tarjan (1983)). Determinar todos los posibles rangos r de los centros locales de V en el interior de las aristas lleva $O(m \cdot n^2)$ operaciones. Los valores posibles de los rangos son $O(m \cdot n^2 \cdot \log n)$ operaciones. Por tanto el paso 1 significa $O(m \cdot n^2 \cdot \log n)$.

El número de ejecuciones de los pasos 2.1, 2.2 y 2.3 es $O(\log n)$.

Dado un valor positivo r, los r-extremos se determinan calculando, para cada arista $[i,j]$ y cada vértice u, los valores $t_1 = r - d(i,u)$ y $t_2 = t(i,j) - r + d(j,v)$. Si $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant t(i,j)$ entonces los puntos $p([i,j], t_1)$ y $p([i,j], t_2)$ son r-extremos. Esto significa $O(m \cdot n)$ operaciones.

Por el lema anterior, existen $O((m \cdot n)^P)$ conjuntos de p r-extremos y determinar si alguno de estos conjuntos cubre al conjunto U dentro de una distancia r, lleva $O(n)$ operaciones. Por tanto el número de operaciones necesario para determinar el conjunto X, por una búsqueda exhaustiva, es $O(m^P \cdot n^{P+1})$ operaciones.

Cada ejecución del paso 2.3 se puede realizar en un tiempo acotado, es decir, en $O(1)$ operaciones. Entonces el paso 2 significa $O(m^P \cdot n^{P+1} \cdot \log n)$ operaciones, en el peor de los casos.

Por tanto, el algoritmo obtiene un p-centro en un tiempo $O(m^P \cdot \cdot n^{P+1} \cdot \log n)$, para $p > 1$.

El problema que hay que resolver en 2.2 es, en esencia, el problema usual de cubrimiento. Este problema es NP-completo y, por tanto, se deben emplear heurísticas para su solución (véanse, por ejemplo, Balas y Ho (1980) o Vasko y Wilson (1984)).

4. COMPARACION EXPERIMENTAL

Para la comparación experimental del algoritmo se generaron aleatoriamente grafos planares por el siguiente procedimiento. Dados el número n de vértices y el número m de aristas se generan aleatoriamente n puntos en un cuadro que constituyen los vértices. Los segmentos rectilíneos uniendo cada par de vértices se consideran posibles aristas del grafo. Tomando como grafo de partida el árbol generador mínimo se introducen sucesivamente las aristas de menor longitud que no cortan a las ya introducidas hasta obtener las m aristas deseadas.

La comparación se realizó con el algoritmo de relajación de Handler (1979) con las modificaciones dadas en Moreno (1985). Desde el punto de vista práctico el algoritmo de relajación es más eficiente que el propuesto por Kariv y Hakimi (1979) siendo muy eficiente para valores bajos de p.

Para la resolución de los problemas de cubrimiento se implementó el procedimiento de enumeración implícita propuesto en Syslo, Deo y Kowalik (1983) adaptado para la búsqueda de cubrimiento factible de p conjuntos con función de coste homogénea. Para el proceso enumerativo se aplica la regla heurística de seleccionar para la solución parcial el centro local que cubre más vértices del conjunto relajado aún no cubiertos.

Los procedimientos se implementaron en TURBO PASCAL 4.1 y se ejecutaron en un ordenador personal compatible-IBM AT (12Mhz). Tanto el algoritmo de enumeración implícita para resolver los problemas de cubrimiento como en los algoritmos de relajación y Extremo se implementaron mediante estructuras de datos dinámicas de listas enlazadas.

Para la manipulación de la lista de los rangos de los centros locales en el algoritmo EXTREMO se utilizó un árbol binario balanceado (ver Aho, Hopcroft y Ullman (1983)). Las distancias en el algoritmo de relajación sólo se calculan desde los vértices de conjunto relajado aplicando el algoritmo de Dijkstra utilizando las estructuras dinámicas montículos o Heaps propuestas por Tarjan (1983).

Para realizar la comparación se tomaron como números de vértices múltiplos de 10 desde 40 a 80 y como número de aristas el doble de este número. Se generaron aleatoriamente los diferentes grafos denotados $G(n, m)$. En la tabla siguiente se muestran los tiempos en segundos empleados por el algoritmo EXTREMO y por el algoritmo de relajación (RELAJADO) en resolver en ellos los problemas del p-centro para $p = 6$, 7, 8, 9 y 10. Los tiempos empleados por el algoritmo por EXTREMO se mantienen alrededor de un valor acotado independientemente del valor de p, mientras que el tiempo del algoritmo de relajación crece muy rápidamente con p.

$G(40, 80)$	$p = 6$	$p = 7$	$p = 8$	$p = 9$	$p = 10$
EXTREMO	33.7	49.4	39.1	34.8	33.5
RELAJADO	29.9	53.4	68.7	87.2	179.0
$G(50, 100)$	$p = 6$	$p = 7$	$p = 8$	$p = 9$	$p = 10$
EXTREMO	60.2	77.0	45.1	61.0	89.9
RELAJADO	7.9	36.2	64.8	128.8	253.3
$G(60, 120)$	$p = 6$	$p = 7$	$p = 8$	$p = 9$	$p = 10$
EXTREMO	81.5	107.0	234.4	140.5	129.0
RELAJADO	60.5	124.5	161.4	181.2	392.2
$G(70, 140)$	$p = 6$	$p = 7$	$p = 8$	$p = 9$	$p = 10$
EXTREMO	115.1	232.6	132.7	163.4	229.4
RELAJADO	96.0	111.0	369.1	422.0	564.1
$G(80, 160)$	$p = 6$	$p = 7$	$p = 8$	$p = 9$	$p = 10$
EXTREMO	114.7	150.8	136.5	133.4	124.6
RELAJADO	24.5	37.7	63.7	194.5	285.7

REFERENCIAS

AHO, A. V.; HOPCROFT, J. E., y ULLMAN, J. D. (1983): *Data Structures and Algorithms*, Addison-Wesley.

BALAS, E., y HO, A. (1980): «Set Covering Algorithms Using Cutting Planes, Heuristics and Subgradient Optimization: A Computational Study», *Math. Prog.*, 12, 37-60.

GONDRAN, M., y MINOUX, M. (1984): *Graphs and Algorithms*, John Wiley.

HAKIMI, S. L. (1965): «Optimum Distribution of Switching Centers in a Communication Network and Some Related Graph-Theoretic Problems», *Oper. Res.*, 13, 462-475.

HANDLER, G. Y. (1979): «Complexity and Efficiency in Minimax Network Location», *Combinatorial Optimization* (N. Christofides y Mingozzi, eds.), New York, John Wiley, 281-325.

HANDLER, G. Y., y MIRCHANDANI, P. B. (1979): *Location on Networks: Theory and Algorithms*, Matsachussets, M.I.T. Press.

KARIV, O., y HAKIMI, S. L. (1979): «An Algorithmic Approach to Network Location Problems. Part I: The *p*-Centers», *SIAM, J. of App. Math.*, 37, 3, 513-538.

MINIEKA, E. (1970): «*The m*-Center Problem», *SIAM Review*, 12, 138-139.

MORENO, J. (1985): «A Correction to the Definition of Local Center», *Eur. J. of Oper. Res.*, 20, 382-386.

MORENO, J. (1986): *Localización Minimax en Grafos Mixtos*, Tesis Doctoral, Universidad Complutense de Madrid.

SYSLO, M. M.; DEO, N., y KOWALIK, J. S. (1983): *Discrete Optimization Algorithms with Pascal Programs*, New Jersey, Prenticel-Hall.

TAMIR, A. (1987): «Improved Complexity Bounds for Center Location Problems on Networks by Using Dynamic Data Structures», Presentado a ISOLDE IV, Namur, Bélgica.

TARJAN, R. E. (1983): *Data Structures and Network Algorithms*, New Jersey, Society for Industrial and Applied Mathematics.

VASKO, F. J., y WILSON, G. R. (1984): «An Efficient Heuristic for Large Set Covering Problems», *Naval Research Logistic Quarterly*, 31, 163-171.