TRABAJOS DE INVESTIGACION OPERATIVA
Vol. 4. Núm. 1, 1989 pp. 39 a 51

# UNA CLASE DE PROBLEMAS DE DECISION BAJO INCERTIDUMBRE PARCIAL

SALVADOR FIGUERAS, M.
Dpto. Métodos Estadísticos
Universidad de Zaragoza

## RESUMEN

Se estudia el Problema de Decisión cuando el ambiente es de incertidumbre parcial, en el sentido de que la distribución *a priori* —que se supone absolutamente continua— sobre el espacio de estados —un intervalo real— no se conoce en su totalidad, sino que tan sólo se posee información respecto a las probabilidades de algunos subintervalos de $\Theta$ o acotaciones de éstas, así como algunas restricciones sobre los momentos y ciertas generalizaciones de éstas, dentro de este contexto.

Además de las correspondientes caracterizaciones, se dan algoritmos de resolución, los cuales son también analizados.

**Palabras clave:** Incertidumbre parcial. Criterios de decisión. Programación lineal generalizada. Método minimax.
**Clasificación AMS:** 62C99, 90B50, 90C05.

## SUMMARY

The Decision Problem when there is an environment of partial uncertainty is studied, in the sense that the a priori distribution —which is supposed as absolutely continuous— about the space of conditions —a real interval— is not completely known, but we have only got information in relation to the probabilities of some $\Theta$ subintervals, or boundaries of these, as well as some constraints about the moments, and certain extensions of these within this contexto.

Recibido, junio 1987.
Aceptado, noviembre 1988.

## 1. INTRODUCCION

En un problema de decisión $(\Theta, \Delta, \rho)$ bajo ambiente de incertidumbre parcial, el decisor no posee suficiente información sobre el espacio de estados como para fijar una distribución *a priori* sobre él, pero tampoco se encuentra totalmente desinformado pudiendo establecer un subconjunto de la clase de las distribuciones *a priori* en donde él supone que se encuentra la que más fielmente refleja la realidad. Se ha estudiado el problema cuando el espacio de estados es discreto y se conoce un preorden sobre los estados empleando el criterio minimax.

Cuando el espacio de estados es continuo, el decisor puede poseer información acerca de las acotaciones de algunos momentos de la distribución del tipo:

$$C_1 \leqslant E[\theta^k] \leqslant C_2 \quad \text{con} \quad C_1, C_2, k \in R \text{ constantes} \qquad (1)$$

También puede conocer las probabilidades de algunos subconjuntos del espacio de estados o ciertas restricciones sobre ellas (por ejemplo, que un subconjunto de $\Theta$ sea más o menos probable que otro).

Este artículo estudia el problema $(\Theta, \Delta, \rho)$ con $\Theta$ intervalo finito de $R$, cuando las distribuciones *a priori* verifican restricciones del tipo (1) o ciertas generalizaciones suyas y se conocen las probabilidades de una serie de subintervalos de $\Theta$ o acotaciones de éstas en intervalos fijos. El criterio que se aplica es el minimax transformándose el problema inicial en un problema de programación lineal generalizada y en un problema minimax sin restricciones y se dan algoritmos de resolución de dichos problemas.

## 2. DESCRIPCION DE LOS PROBLEMAS

### Notaciones y planteamiento

Sean $\Theta = [a, b]$ espacio de estados, $\Delta$ conjunto de decisiones aleatorizadas y $\Pi$ clase de las funciones de densidad con un número finito de puntos de discontinuidad en su función de distribución.

Sea $r(\theta, \delta)$, $\theta \in \Theta$, $\delta \in \Delta$ función de riesgo y

$$\rho(f, \delta) = \int_{\Theta} r(\theta, \delta) f(\theta)\, d\theta \qquad \forall\, f \in \Pi, \quad \forall\, \delta \in \Delta$$

Nuestro problema va a ser calcular

$$\inf_{\delta\in\Delta}\ \sup_{f\in\bar{K}} \rho(f, \delta), \tag{2}$$

donde $\bar{K}$ es la clase de las funciones de $\Pi$ tales que:

$$\int_{\Theta} q_k(\theta) f(\theta)\, d\theta \leqslant 0, \qquad k = \overline{1, l} \tag{3}$$

y $q_k(\theta), k = 1, l$ son funciones continuas en $\Theta$, conocidas.

Así, por ejemplo, podemos tener las restricciones del tipo

$$C_1 \leqslant E[\theta^k] \leqslant C_2 \qquad k \in N \text{ fijo}$$

Sean:

$$\begin{aligned} &\alpha_i = P\{\theta \in [a_i, a_{i+1}]\} \text{ fijas, } i = \overline{1, n}\ \alpha_i \geqslant 0\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \\ &a_1 = a,\ a_{n+1} = b,\ a_i \leqslant a_{i+1},\ i = \overline{1, n} \end{aligned} \tag{4}$$

las probabilidades que el decisor establece debido a su conocimiento parcial de la distribución *a priori*.

Sea

$$Y = \prod_{i=1}^{n} [a_i, a_{i+1}]$$

$$\forall\, y = (y_1, \ldots, y_n) \in Y, \qquad k = \overline{1, l}$$

$$q_o(y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i r(y_i, \delta) \quad , \quad q_k(y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i q_k(y_i)$$

Sean:

$$U^+ = \{\bar{u} \in R^l \ni \bar{u} = (u_1, \ldots, u_l),\ u_i \geqslant 0,\ i = \overline{1, l}\}$$

$$U_* = \{\bar{u} \in U^+ \ni \psi(\bar{u}) = \min_{u\in U^+} \psi(u)\}$$

$$\psi(u) = \max_{y\in Y} \left\{ q_o(y) - \sum_{k=1}^{l} u_k q_k(y) \right\}$$

$$Y(u) = \left\{ y \in Y \ni \psi(u) = q_o(y) - \sum_{k=1}^{l} u_k q_k(y) \right\}$$

Sean los problemas:

Encontrar $y_j \in Y$, $p_j \in R$ tales que:

$$\max \sum_{j=1}^{l+1} p_j q_o(y_j)$$

sujeto a

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{j=1}^{l+1} p_j q_k(y_j) \leqslant 0, k = \overline{1,l} \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{l+1} p_j = 1,\ p_j \geqslant 0,\ j = \overline{1,l+1}, \end{array}\right. \tag{A}$$

Encontrar $y_j \in Y$, $u_j \in R$, $u_{l+1} \in R$, $j = \overline{1,l}$ tales que

$$\min u_{l+1}$$

sujeto a

$$\left.\begin{array}{l} q_o(y_j) - \displaystyle\sum_{k=1}^{l} u_k q_k(y_j) - u_{l+1} \leqslant 0, \quad j = \overline{1,l+1} \\ u_k \geqslant 0, \quad k = \overline{1,l} \end{array}\right. \tag{B}$$

$$\min_{u \in U^+} \psi(u) \tag{C}$$

El problema (A) y su dual (B) son la discretización del problema (2) para $\delta \in \Delta$ fijo, reduciendo dicho problema a uno de programación lineal generalizada implementable utilizando los algoritmos 1 y 2 que se dan en apartados posteriores, o similares.

El problema (C) transforma el problema (2) en uno minimax sin restricciones más tratables matemáticamente.

## 3. RESOLUCION DEL PROBLEMA

Comenzaremos fijando $\delta \in \Delta$ y resolveremos

$$\sup_{f \in K} \rho(f, \delta) \tag{5}$$

El siguiente teorema relaciona las soluciones de los problemas (5), (A) y (C).

**Teorema 1**

El problema (5) es equivalente al problema (A) y si además $0 \in \text{int co } Z$ donde int es el operador interior y co $Z$ es la clausura convexa de:

$$Z = \{(q_o(y), ..., q_l(y)) \in R^{l+1}, \quad y \in Y\}$$

entonces:

*a*) Las soluciones de los problemas (A) y (C) existen y los valores óptimos de ambos problemas coinciden.

*b*) Para cualquier solución $h*$ del problema (5),

$$\exists\, u* \in U* \ni \text{soporte } h* \subseteq Y(u*)$$

*Demostración:*

Se tiene que (Salvador (1987))

$$\text{co } Z = \{(Q_o(f), ..., Q_l(f)) \ni f \in \tilde{K}\}$$

donde:

$$Q_k(f) = \int_\Theta q_k(\theta) f(\theta)\, d\theta \quad , \quad k = \overline{0, l}$$

y $\tilde{K}$ es la clase de las funciones de densidad que verifican (4). Por lo tanto, el problema (5) será equivalente a:

$$\max z_o$$

sujeto a

$$z_k \leqslant 0, \; k = \overline{1, l} \tag{6}$$

con $(z_o, ..., z_l) \in \text{co } Z$. Este problema tendrá solución al ser $Z$ compacto. Ahora bien, por el teorema de Caratheodory, el conjunto de puntos extremos de co $Z$ es:

$$\left\{\bar{z} \in R^{l+1} \ni z_k = \sum_{j=1}^{l+1} p_j q_k(\bar{y}_j),\; \bar{y}_j \in Y,\; p_j \geqslant 0,\; j = \overline{1, l+1},\; k = \overline{0, l},\; \sum_{j=1}^{l+1} p_j = 1\right\}$$

Sea $L(u, z) = z_o - \sum_{k=1}^{l} u_k z_k$ una función de Lagrange del problema (6).

Como $0 \in \text{int co } Z$ se tiene que si $z_o^*$ es una solución de (6)

$$z_o^* = \max_{z \in \text{co} Z} \max_{u \in U^+} L(u, z) = \min_{u \in U^+} \max_{z \in \text{co} Z} L(u, z)$$

Se sigue que:

$$z_o^* = \min_{u \in U^+} \max_{f \in \tilde{K}} \int_\Theta [q_o(\theta) - \sum_{k=1}^{l} u_k q_k(\theta)] f(\theta)\, d\theta$$

y de aquí se deduce *a*) y *b*).

De esta manera el problema (2) queda reducido a resolver el siguiente problema minimax sin restricciones.

Minimizar con respecto a $\delta \in \Delta$, $u \in U^\dagger$

$$\gamma(\delta, u) = \max_{y \in Y} \left[ q_o(y) - \sum_{k=1}^{l} u_k q_k(y) \right] \tag{7}$$

El siguiente resultado da una condición de optimalidad basada en el método del simplex revisado, para el problema (A) que se utilizará en los algoritmos que daremos para su resolución.

**Teorema 2**

Bajo las hipótesis del teorema anterior y si $\bar{p} = (\bar{p}_1, ..., \bar{p}_{l+1})$ es una solución para $\bar{y} = (\bar{y}_1, ..., \bar{y}_{l+1}) \in R^{l+1} x \Theta$ fijo, entonces el par $\bar{y}, \bar{p}$ es solución óptima del problema (A) si y sólo si para ȳ existe una solución $(\bar{u}_1, ..., \bar{u}_{l+1})$ del problema (B) tal que

$$q_o(y) - \sum_{k=1}^{l} u_k q_k(y) - u_{l+1} \leqslant 0 \quad \forall y \in Y$$

*Demostración:*

$\Rightarrow$) Sea $(u_1^*, ..., u_{l+1}^*)$ solución de (B) y $(\bar{u}_1, ..., \bar{u}_l)$ de (C)

$$\text{Sea } \bar{u}_{l+1} = \min_{u \in U^+} \max_{y \in Y} \left[ q_o(y) - \sum_{k=1}^{l} u_k q_k(y) \right] =$$

$$= \max_{y \in Y} \left[ q_o(y) - \sum_{k=1}^{l} u_k q_k(y) \right]$$

$$\text{Sea } \psi_1(u) = \max_{j=\overline{1, l+1}} \left[ q_o(y_j) - \sum_{k=1}^{l} u_k q_k(y_j) \right]$$

Se sigue que:

$$\psi(\bar{u}) = \min_{u \in U^+} \psi(u) = \min_{u \in U^+} \psi_1(u) = \psi_1(u^*) = u^*_{l+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \psi_1(\bar{u}) = \psi(\bar{u}) = \psi_1(u^*) \Rightarrow (\bar{u}_1, ..., \bar{u}_{l+1}) \text{ es solución de (B)}$$

$\Leftarrow$) De la dualidad entre (A) y (B) se sigue que

$$\sum_{j=1}^{l+1} \bar{p}_j q_o(\bar{y}_j) \geqslant \psi(\bar{u})$$

donde $\bar{p}$ es solución de (A). De la dualidad entre (A) y (C) se sigue que para cualquier $y_1, ..., y_{l+1}$, $p$ satisfaciendo las restricciones de (A)

$$\sum_{j=1}^{l+1} p_j q_o(y_j) \leqslant \psi(\bar{u})$$

Se sigue que:

$$\sum_{j=1}^{l+1} p_j q_o(y_j) \leqslant \sum_{j=1}^{l+1} \bar{p}_j q_o(\bar{y}_j) \Rightarrow \bar{p}, \bar{y} \text{ es solución óptima dc (A)}$$

Teniendo en cuenta este resultado se obtienen los dos algoritmos siguientes para resolver el problema (A) y, equivalentemente, resolver el problema (5)

**Algoritmo 1**

Fijamos puntos $\bar{y}_o = (\bar{y}_{o,1}, ..., \bar{y}_{o,l+1})$ y resolvemos el problema (A) para $\bar{y}_j = \bar{y}_{o,j}$, $j = \overline{1, l+1}$.

Sea $\bar{p}_o = (p^0_1, ..., p^0_{l+1})$ solución de este problema.

Sea $\bar{u}_o = (u^0_1, ..., u^0_{p+1})$ solución de (B). Si $\bar{u}_o$ satisface que

$$q_o(y) - \sum_{k=1}^{l} u^0_k q_k(y) - u^0_{l+1} \leqslant 0 \qquad \forall\, y \in Y$$

entonces el par $\bar{y}_o$, $\bar{p}_o$ es solución de (A). En caso contrario sea $\bar{y}^0 \in Y$ tal que:

$$\Delta(\bar{y}^0, \bar{u}_o) = q_o(\bar{y}^0) - \sum_{k=1}^{l} u^0_k q_k(\bar{y}^0) - u^0_{l+1} > 0$$

$$q_o(\bar{y}^o) - \sum_{k=1}^{l} u^0_k q_k(\bar{y}^0) \geqslant \max_{y \in Y} \left\{ q_o(y) - \sum_{k=1}^{l} u^0_k q_k(y) \right\} - \varepsilon_o$$

Sea $\bar{p}_1$ una solución del problema:

$$\text{Max} \sum_{j=1}^{l+1} p_j q_o(\bar{y}_j) + p q_o(\bar{y})$$

sujeto a

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{j=1}^{l+1} p_j q_k(\bar{y}_j) + p q_k(\bar{y}) \leqslant 0 \quad k = \overline{1,l} \\ \sum_{j=1}^{l+1} p_j + p = 1, p_j, p \geqslant 0 \quad j = \overline{1, l+1} \end{array}\right\} \qquad \text{(D)}$$

con $\bar{y}_j = \bar{y}_{o,j}$, $\bar{y} = \bar{y}^0$.

Sean $\bar{y}_{1,1}, ..., \bar{y}_{1,l+1}$ aquellos puntos de $\bar{y}_{o,1}, ..., \bar{y}_{o,l+1}$, $\bar{y}^0$ que corresponden a las variables básicas de $\bar{p}_1$. Con esto termina el primer paso del algoritmo.

En general, después de la $s$-ésima iteración tenemos puntos $\bar{y}_{s,1}$, ..., $\bar{y}_{s,l+1}$, una solución $\bar{p}_s$ y la solución correspondiente $\bar{u}_s$ al problema (B).

Para un $\varepsilon_s > 0$ encontrar $y^s$ tal que

$$\Delta(\bar{y}^s, \bar{u}_s) = q_o(\bar{y}^s) - \sum_{k=1}^{l} u_k^s q_k(\bar{y}^s) - u_{l+1}^s > 0$$

$$q_o(\bar{y}^s) - \sum_{k=1}^{l} u_k q_k(\bar{y}^s) \geqslant \max_{y \in Y} \left[q_o(y) - \sum_{k=1}^{l} u_k^s q_k(y)\right] - \varepsilon_s$$

Si no obtenemos $\Delta(\bar{y}^s, \bar{u}) > 0$ para valores decrecientes de $\varepsilon_s$ llegamos a una solución óptima; en caso contrario resolver el problema (D) con $\bar{y}_j = \bar{y}_{s,j}$, $\bar{y} = \bar{y}^s$.

Sean $\bar{y}_{s+1,1}, ..., \bar{y}_{s+1,l+1}$ aquellos puntos de $\bar{y}_{s,1}, ..., \bar{y}_{s,l+1}$, $\bar{y}^s$ que corresponden a las variables básicas de la solución $\bar{p}_{s+1}$ de (D).

El par $\bar{y}_{s+1} = (\bar{y}_{s+1,1}, ..., \bar{y}_{s+1,l+1})$, $\bar{p}_{s+1}$ es la nueva aproximación a la solución de (A).

Sea $I_o^s = \{k \in u_k^s = 0\}$, $I_1^s = \{k \in u_k^s > 0\}$

$$A_s^o = \{\bar{e} = (e_1, ..., e_l) \ni \|\bar{e}\| = 1, e_k > 0 \text{ si } k \in I_o^s\}$$

$$\gamma_s = \max_{\bar{e} \in A_s} \min_{j \in p_j^s > 0} \left\{ \sum_{k=1}^{l} e_k q_k(\bar{y}_{s,j}) \right\}$$

$$\psi_s(u) = \max_{j = \overline{1, l+1}} \left[ q_o(\bar{y}_{s,j}) - \sum_{k=1}^{l} u_k q_k(\bar{y}_{s,j}) \right]$$

**Teorema 3**

En las condiciones del teorema 1 y si:

*a)* $\exists\,\tau(\alpha)$ no decreciente, $\alpha \in [0, \infty)$, $\tau(0) = 0$, $\tau(\alpha) > 0$ si $\alpha > 0$ tal que $\gamma_s \leqslant -\tau(\psi(\bar{u}_s) - \psi_s(\bar{u}_s))$.

*b)* $\varepsilon_s > 0$, $\varepsilon_s \to 0$ si $s \to \infty$, entonces cualquier subsucesión convergente de $\bar{y}_s$, $\bar{p}_s$ converge a la solución del problema (A).

La demostración puede verse en ERMOLIEV y otros (1985).

Sin embargo, este algoritmo no garantiza la convergencia. El siguiente algoritmo en una modificación del anterior basada en el método de Kelley para minimizar la función $\psi(u)$ y es convergente.

**Algoritmo 2**

Elegimos una sucesión de números reales positivos $\{\mu_s\}_{s=0}^{\infty}$ ponemos $r_o = 0$ y seleccionamos puntos iniciales $\bar{y}_{o,1}, \ldots, \bar{y}_{o,l+1}$, tales que el problema (A) tiene una solución con respecto a $p$ para $\bar{y}_j = \bar{y}_{o,j}$.

Sea $\bar{p}_0$ una solución de este problema y $\bar{u}_o$ la correspondiente solución de (B). Tenemos que encontrar $\bar{y}^0$ tal que

$$q_o(\bar{y}^0) - \sum_{k=1}^{l} u_k^0 q_k(\bar{y}^0) > \psi(\bar{u}_o) - \varepsilon_o$$

donde $\varepsilon_o$ es un número positivo. Si para cualquier $\varepsilon_o$ y el correspondiente $\bar{y}^0$ tenemos:

$$\Delta(\bar{y}^0, \bar{u}_o) = q_o(\bar{y}^0) - \sum_{k=1}^{l} u_k^0 q_k(y^0) - u_{l+1}^0 \ \leqslant 0$$

entonces el par $\bar{y}^0$, $\bar{p}_o$ es solución óptima de (A).

En caso contrario seleccionamos $\varepsilon_o$, $\bar{y}^0$ tales que $\Delta(\bar{y}^0, \bar{u}_o) > 0$ y ponemos $\Delta_o = \Delta(\bar{y}^0, \bar{u}_o)$.

Suponer que después de la $s$-ésima iteración tenemos puntos $\bar{y}_{s,j}$, $j = \overline{1, l_s}$, una solución $\bar{p}_s$ del problema (A) para $\bar{y}_j = \bar{y}_{s,j}$, $j = \overline{1, l_s}$ una solución $\bar{u}_s$ de (B), un número positivo $r_s$ y otro $\Delta_s$.

Encontrar una solución aproximada $\bar{y}^s$, tal que

$$q_o\,\bar{y}^s) - \sum_{k=1}^{l} u_k^s q_k(\bar{y}^s) > \psi(\bar{u}_s) - \varepsilon_s$$

$$q_o\,\bar{y}^s) - \sum_{k=1}^{l} u_k^s q_k(\bar{y}^s) - u_{l+1}^s = \Delta(\bar{y}^s, \bar{u}_s) > 0$$

Si esto no es posible $\forall\, \varepsilon_s > 0$ hemos llegado a una solución. De otra forma, considerar los 2 casos siguientes:

*a)* $\Delta(\bar{y}^s, \bar{u}_s) \leqslant (1 - \mu_{r_s})\Delta_s$

En este caso tomar $\Delta_{s+1} = \Delta(\bar{y}^s, \bar{u}_s)$, $l_{s+1} = l + 1$, $r_{s+1} = r_s + 1$ y $\bar{y}_{s+1,1}, \ldots, \bar{y}_{s+1,l+1}$ aquellos puntos de $\bar{y}_{s,1}, \ldots, \bar{y}_{s,l}$, $\bar{y}$ que corresponden a las variables básicas de la solución $\bar{p}_{s+1}$.

*b)* $\Delta(\bar{y}^s, \bar{u}_s) > (1 - \mu_{r_s})\Delta_s$.

En este caso tomar $\Delta_{s+1} = \Delta_s$, $l_{s+1} = l_s + 1$, $r_{s+1} = r_s$, $\bar{y}_{s+1,j} = \bar{y}_{s,j}$, $j = \overline{1, l_s}$, $\bar{y}_{s+1,l_s+1} = \bar{y}^s$.

Encontrar una solución de (A) para $\bar{y}_j = \bar{y}_{s,j}$, $j = \overline{1, l_s}$, $\bar{y}_{l_s+1} = \bar{y}^s$ y las correspondientes soluciones duales $\bar{u}_{s+1}$ y proceder a la siguiente iteración.

**Teorema 4**

Si se satisfacen las condiciones del teorema 1 y

*a)* $\varepsilon_s > 0$, $\varepsilon_s \overset{s\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $\mu_s > 0$, $\sum\limits_{s=0}^{\infty} \mu_s = \infty$.

*b)* $\varepsilon_s/\mu_s \longrightarrow 0$ si $s \longrightarrow \infty$, entonces $\sum\limits_{i=1}^{l_s} p_i^s q_o(\bar{y}_{s,i})$ converge al valor óptimo de (A).

## 4. ACOTACION DE PROBABILIDADES

Si a las funciones de $\bar{K}$ se les exige que presenten 2 trozos $[a_1, a_2]$, $[a_2, a_3]$ con $P[\theta \in [a_1, a_2]] \in [e, f]$ y $[e, f] \subseteq [0, 1]$ fijo, son válidos los resultados anteriores con

$$Y = [a_1, a_2] \times [a_2, a_3] \times [e, f]$$

$$q_o(\theta_1, \theta_2, \alpha) = \alpha r(\theta_1, \delta) + (1 - \alpha) r(\theta_2, \delta)$$

$$q_k(\theta_1, \theta_2, \alpha) = \alpha q_k(\theta_1) + (1 - \alpha) q_k(\theta_2) \qquad k = \overline{1, l}$$

Sin embargo, en este caso, el problema (A) puede simplificarse. Este problema tiene la forma:

Encontrar $\theta_j \in [a_1, a_2]$, $\theta'_j \in [a, a_3]$, $\alpha_j \in [e, f]$, $p_j \in R$, $j = \overline{1, l+1}$ tales que:

$$\text{Max} \sum_{j=1}^{l+1} p_j(\alpha_j q_o(\theta_j) + (1 - \alpha_j) q_o(\theta'_j))$$

sujeto a:

$$\sum_{j=1}^{l+1} p_j(\alpha_j q_k(\theta_j) + (1-\alpha_j)q_k(\theta'_j)) \leqslant 0 \qquad k = \overline{1,l}$$

$$\sum_{j=1}^{l+1} p_j = 1,\ p_j \geqslant 0,\ j = \overline{1,l+1}$$

Si hacemos el cambio de variable $p'_j = p_j \cdot \alpha_j$, $j = \overline{1,l+1}$ el problema se transforma en:

Encontrar $\theta_j \in [a_1, a_2]$, $\theta'_j \in [a_2, a_3]$, $p_j, p'_j \in R$, $j = \overline{1,l+1}$ tales que:

$$\text{Max} \sum_{j=1}^{l+1} p_j q_o(\theta'_j) + \sum_{j=1}^{l+1} p'_j(q_o(\theta_j) - q_o(\theta'_j))$$

sujeto a:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{l+1} p_j q_k(\theta'_j) + \sum_{j=1}^{l+1} p'_j(q_k(\theta_j) - q_k(\theta'_j)) \leqslant 0 \qquad k = \overline{1,l} \\
&\sum_{j=1}^{l+1} p_j = 1,\ p_j \geqslant 0 \qquad j = \overline{1,l+1} \\
&p'_j - bp_j \leqslant 0 \qquad j = \overline{1,l+1} \\
&ap_j - p'_j \leqslant 0 \qquad j = \overline{1,l+1} \\
&p'_j \geqslant 0 \qquad j^2 = \overline{1,l+1}
\end{aligned} \tag{E}$$

problema más tratable matemáticamente que el anterior pues desaparece la no linealidad en $\alpha_1, ..., \alpha_{l+1}$.

Su problema dual será:

$$\text{Min } u_{3l+3}$$

sujeto a

$$\begin{aligned}
&q_o(\theta'_j) - \sum_{k=1}^{l} u_k q_k(\theta'_j) + fu_{l+j} - eu_{2l+j+1} - u_{3l+3} \leqslant 0 \\
&q_o(\theta_j) - q_o(\theta'_j) - \sum_{k=1}^{l} u_k(q_k(\theta_j) - q_k(\theta'_j)) - u_{l+j} + u_{2l+j+1} \leqslant 0\ j = \overline{1,l+1} \\
&u_k \geqslant 0, \qquad k = \overline{1,3l+2}
\end{aligned} \tag{F}$$

El siguiente resultado establece la condición de optimalidad para el problema (E).

**Teorema 5**

Si $\bar{p}, \bar{p}'$ es una solución óptima del problema (E) para $\bar{\theta}, \bar{\theta}'$ fijos, entonces el par $(\bar{\theta}, \bar{\theta}')$, $(\bar{p}, \bar{p}')$ es una solución óptima de (E) si y sólo si para $\bar{\theta}, \bar{\theta}'$ existe una solución $(\bar{u}_1, ..., \bar{u}_{3l+3})$ del problema (F) tal que $\forall\, \theta \in [a_1, a_2], \theta' \in [a_2, a_3]$

$$\max_{\lambda = e, f} \left\{ \lambda q_o(\theta) + (1-\lambda) q_o(\theta') - \sum_{k=1}^{l} u_k(\lambda q_k(\theta) + (1-\lambda) q_k(\theta')) \right\} - \\ - \bar{u}_{3l+3} \leqslant 0$$

*Demostración:*

$\Rightarrow$) Si $(\bar{\theta}. \bar{\theta}')$, $(\bar{p}, \bar{p}')$ es una solución óptima de (E) entonces

$$\forall\, \theta \in [a_1, a_2],\ \theta' \in [a_2, a_3],\ u, u' \geqslant 0$$

$$q_o(\theta') - \sum_{k=1}^{l} \bar{u}_k q_k(\theta') + fu - eu' - \bar{u}_{3l+3} \leqslant 0$$

$$q_o(\theta) - q_o(\theta') - \sum_{k=1}^{l} u_k[q_k(\theta) - q_k(\theta')] - u + u' \leqslant 0$$

de donde se sigue que

$$q_o(\theta) + f(q_o(\theta) - q_o(\theta')) - \sum_{k=1}^{l} \bar{u}_k[f(q_k(\theta) - q_k(\theta')) + \\ + q_k(\theta')] + (f-e)u' - \bar{u}_{3l+3} \leqslant 0$$

$$q_o(\theta) + e(q_o(\theta) - q_o(\theta')) - \sum_{k=1}^{l} u_k[e(q_k(\theta) - q_k(\theta')) + \\ + q_k(\theta')] + (f-e)u - \bar{u}_{3l+3} \leqslant 0$$

Tomando $u = u' = 0$ sale la condición.

$\Leftarrow$) Se sigue que $(\bar{u}_1, ..., \bar{u}_l, \bar{u}_{3l+3})$ es solución de (B) y es óptima, al ser (A) y (E) equivalentes y (E) y (F) duales se sigue la tesis.

Por lo tanto, se podrán aplicar los algoritmos 1 y 2 para resolver los problemas (E) y (F) y se tendrán resultados análogos a los teoremas 3 y 4.

Un estudio análogo se haría si en lugar de ser dos los subintervalos, fueran $n$.

## 5. CONCLUSION

Hemos planteado un problema de decisión en ambiente de incertidumbre parcial (5) que hemos transformado en tres problemas: dos de ellos, los problemas (A) y (B), de programación lineal generalizada, y el tercero, el problema (C), un problema tipo minimax sin restricciones, y hemos dado 2 algoritmos para resolver los problemas (A) y (B).

El problema inicial (2) queda reducido a un problema de minimizar en $\delta \in \Delta$ las soluciones calculadas por el algoritmo 2, o bien, a resolver el problema (7) que es un problema tipo minimax sin restricciones.

## BIBLIOGRAFIA


BEN-TAL, A., y HOCHMANN, E. (1976): «Stochastic programs with incomplete information», *Operations Research,* vol. 24, n.º 2, pp. 336-347.

COOK, W. D., FIELD, C. A., y KIRBY, M. J. L. (1975): «Infinite Linear Programming in games with partial information», *Operations Research,* vol. 23, n.º 5, pp. 996-1010.

ERMOLIEV, Y.; GAIVORONNSKI, A., y NEDEVA, C. (1985): «Stochastic Optimization problems with incomplete information in distribution functions», *Siam J. Control and Optimizations,* vol. 23, n.º 5, Society for Industrial and Applied Mathematics, pp. 697-716.

FEL'DBAUM, A. A. (1965): «Optimal Control Systems», *Mathematics in Science and Engineering,* vol. 22, Academic Press.

KEMPERMAN, J. H. B. (1968): «The General moment problem. A geometric approach», *The Annals of Mathematical Statistics, vol. 39, pp. 93-122.*

KMIETOWICZ, Z. W., y PEARMAN, A. D. (1982): *Decision Theory and Incomplete Knowledge,* Editorial Gower, Pub. Comp. Ltd. England.

SALVADOR, M. (1987): «Decisión bajo información de monotonías de densidades y razones de fallo de la distribución a priori sobre los estados», Tesis doctoral, Zaragoza.

TOPKIS, D. (1970): «Cutting-plane methods without nested constraint sets», *Operations Research,* vol. 18, pp. 404-413.

TOPKIS, D. (1970): «A note on cutting-plane methods without nested constraint sets», *Operations Research,* vol. 18, pp. 1216-1220.