TRABAJOS DE INVESTIGACION OPERATIVA
Vol. 4. Núm. 1, 1989 pp. 11 a 19

UN REFINAMIENTO DEL CONCEPTO DE EQUILIBRIO PROPIO DE MYERSON*

IGNACIO GARCÍA JURADO
Dpto. de Estadística e I.O.
Universidad de Santiago

ABSTRACT

In this paper we review Myerson's proper equilibrium concept and introduce a strict refinement of it; we also demonstrate the existence of at least one of our solutions in every finite non-cooperative n-person normal form game.

Key words: Nash equilibrium; proper equilibrium; perfectly proper equilibrium.
AMS Classification (1985): 90D10.

1. INTRODUCCION

El concepto de equilibrio de Nash (1951), uno de los más importantes de la teoría de juegos, nos proporciona combinaciones de estrategias que se «autoimponen», en el sentido de que, una vez acordadas, ningún jugador tiene motivos para no actuar conforme a ellas.

Selten (1975) observó que, en contextos en los que los jugadores pueden cometer errores aunque sea con una probabilidad ínfima, algunos equilibrios de Nash podían perder esa capacidad de autoimponerse. Por ello introdujo el concepto de equilibrio perfecto, que refina el concepto de Nash y discrimina aquellas soluciones que no son estables (que dejan de autoimponerse) ante cualquier tendencia al error de los jugadores.

Myerson (1978) fue más lejos e indicó que, ya que los jugadores actúan racionalmente, también debe haber una cierta racionalidad en sus errores, en el sentido de que cada jugador debe tender a equivocarse más hacia lo que le cuesta menos. En consecuencia, dio el concepto de

* Cuarto Premio de Investigación Fundación «Ramiro Melendreras» (XVII Reunión Nacional de la SEIO, Benidorm, abril 1988).

equilibrio propio que desecha los equilibrios de Nash que no son estables frente a cualquier tendencia racional al error por parte de los jugadores.

En este artículo seguiremos la línea de Myerson y consideraremos no sólo que los jugadores tenderán a equivocarse con más probabilidad hacia lo que menos les cueste, sino que, además, tenderán a equivocarse más aquellos jugadores a los que les cueste menos, por lo que introduciremos el concepto de equilibrio perfectamente propio que discriminará los equilibrios de Nash que no sean estables frente a cualquier tendencia racional al error de los jugadores, entendiendo la racionalidad en el último sentido mencionado. Probaremos también la existencia de, al menos, un equilibrio perfectamente propio en cualquier juego n-personal finito en forma normal.

2. PRELIMINARES

Indicaremos a continuación la notación que usaremos en este artículo y expondremos los refinamientos del concepto de equilibrio de Nash dados por Selten y Myerson como antecedentes del que introduciremos nosotros.

Consideraremos desde ahora juegos en forma normal. Γ es un juego n-personal finito en forma normal si

$$\Gamma = (\Phi_1, ..., \Phi_n, H_1, ..., H_n)$$

donde, para cada i, Φ_i es el conjunto de estrategias puras del jugador i y H_i es la función de pago a dicho jugador definida de $\Phi_1 \times \cdots \times \Phi_n$ en $\mathbb{R}$.

Para cada i llamaremos S_i al conjunto de estrategias mixtas del jugador i, es decir:

$$S_i = \{s_i \in \mathbb{R}^{\Phi_i} / \sum_{\phi_i \in \Phi_i} s_i(\phi_i) = 1,\ s_i(\phi_i) \geqslant 0 \ \ \forall\, \phi_i \in \Phi_i\}$$

Llamaremos combinación de estrategias a cada $s = (s_1, ..., s_n)$ perteneciente a $S = S_1 \times \cdots \times S_n$.

Obsérvese que podemos considerar $\Phi_i \subset S_i$ $\forall\, i$, puesto que podemos identificar cada $\tilde{\phi}_i \in \Phi_i$ con $\tilde{s}_i \in S_i$ tal que $\tilde{s}_i(\tilde{\phi}_i) = 1$, $\tilde{s}_i(\phi_i') = 0$ $\forall\, \phi_i' \in \Phi_i \backslash \{\tilde{\phi}_i\}$.

Definido S_i para cada i, podemos extender H_i del siguiente modo:

$$H_i(s_1, ..., s_n) = \sum_{(\phi_1, ..., \phi_n) \in \Phi_1 \times \cdots \times \Phi_n} H_i(\phi_1, ..., \phi_n) \prod_{j=1}^{n} s_j(\phi_j)$$

Si $s = (s_1, ..., s_n) \in S$ y $s_i^* \in S_i$, denotaremos la combinación de estrategias $(s_1, ..., s_{i-1}, s_i^*, s_{i+1}, ..., S_n)$ por $s \backslash s_i^*$.

$\phi_i^* \in \Phi_i$ es una mejor respuesta pura del jugador i a $s \in S$ si cumple que $H_i(s \backslash \phi_i^*) = \max_{\phi_i \in \Phi_i} H_i(s \backslash \phi_i)$. Denotaremos por $B_i(s)$ al conjunto de mejores respuestas puras del jugador i a s.

$s_i^* \in S_i$ es una mejor respuesta del jugador i a $s \in S$ si cumple que $H_i(s \backslash s_i^*) \geqslant H_i(s \backslash s_i) \ \forall s_i \in S_i$. $s^* = (s_1^*, ..., s_n^*) \in S$ es una mejor respuesta a $s \in S$ si s_i^* es una mejor respuesta del jugador i a s $\forall i$.

$s \in S$ es un equilibrio de Nash si es una mejor respuesta a sí mismo.

$s_i \in S_i$ es completamente mixta si $s_i(\phi_i) > 0 \ \forall \phi_i \in \Phi_i$. $s = (s_1, ..., s_n) \in S$ es completamente mixta si s_i lo es $\forall i$.

$s = (s_1, ..., s_n) \in S$ es un equilibrio ε-perfecto si es completamente mixto y verifica que

$$H_i(s \backslash \phi_i) < H_i(s \backslash \phi_i') \Rightarrow s_i(\phi_i) \leqslant \varepsilon \qquad \forall \phi_i, \phi_i' \in \Phi_i \qquad \forall i \in \{1, ..., n\}$$

$s = (s_1, ..., s_n) \in S$ es un equilibrio perfecto si existe un par de sucesiones $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{s_k\}_{k=1}^{\infty} = \{(s_1^k, ..., s_n^k)\}_{k=1}^{\infty}$ tales que

— $\varepsilon_k > 0 \ \forall k$
— $\lim_{k \to \infty} \varepsilon_k = 0$
— s_k es ε_k-perfecto $\forall k$
— $\lim_{k \to \infty} s_i^k(\phi_i) = s_i(\phi_i) \ \forall \phi_i \in \Phi_i, \ \forall i \in \{1, ..., n\}$

Selten demostró que todo equilibrio perfecto es un equilibrio de Nash y que el recíproco no se verifica.

$s = (s_1, ..., s_n) \in S$ es un equilibrio ε-propio si es completamente mixto y verifica que

$$H_i(s \backslash \phi_i) < H_i(s \backslash \phi_i') \Rightarrow s_i(\phi_i) \leqslant \varepsilon s_i(\phi_i') \qquad \forall \phi_i, \phi_i \in \Phi_i \qquad \forall i \in \{1, ..., n\}$$

$s = (s_1, ..., s_n) \in S$ es un equilibrio propio si existe un par de sucesiones $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{s_k\}_{k=1}^{\infty} = \{(s_1^k, ..., s_n^k)\}_{k=1}^{\infty}$ tales que

— $\varepsilon_k > 0 \ \forall k$
— $\lim_{k \to \infty} \varepsilon_k = 0$
— s_k es ε_k-propio $\forall k$

— $\lim\limits_{k \to \infty} s_i^k(\phi_i) = s_i(\phi_i) \ \forall \phi_i \in \Phi_i, \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$

Myerson probó que todo equilibrio propio es perfecto y el recíproco no se verifica.

Por último, enunciemos el siguiente resultado, bien conocido y de demostración inmediata:

Proposición 2.1. Si s es un equilibrio propio y $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ son dos sucesiones en las condiciones de la definición anterior, entonces $\exists\, N \in \mathbb{N}$ tal que s es una mejor respuesta a s_k $\forall k \geqslant N$.

3. EQUILIBRIO PERFECTAMENTE PROPIO

En su tesis doctoral, Van Damme (1983) señala el hecho, para él indeseable, de que añadiendo estrategias estrictamente dominadas puede aumentar el conjunto de equilibrios propios de un juego. Para demostrarlo utiliza el ejemplo siguiente:

Γ_1

	α_1^2	α_2^2
α_1^1	1, 1, 1	0, 0, 1
α_2^1	0, 0, 1	0, 0, 1

En Γ_1 participan tres jugadores aunque el tercero no tiene ninguna decisión que tomar y además recibe el mismo pago hagan lo que hagan los otros dos. Es inmediato comprobar que el único equilibro propio de Γ_1 es (α_1^1, α_1^2). Considérese el juego Γ_2 que se obtiene de añadir una estrategia estrictamente dominada del tercer jugador al juego Γ_1.

Γ_2

α_1^3:

	α_1^2	α_2^2
α_1^1	1, 1, 1	0, 0, 1
α_2^1	0, 0, 1	0, 0, 1

α_2^3:

	α_1^2	α_2^2
α_1^1	0, 0, 0	0, 0, 0
α_2^1	0, 0, 0	1, 1, 0

En Γ_2 son equilibrios propios $(\alpha_1^1, \alpha_1^2, \alpha_1^3)$ y $(\alpha_2^1, \alpha_2^2, \alpha_1^3)$.

A nosotros esta propiedad del equilibrio propio no nos parece tan indeseable puesto que desde el momento en que se admite que, aunque remotamente, los jugadores pueden equivocarse, habrá que esperar que todas las estrategias, aun las estrictamente dominadas, jueguen un papel en el desarrollo del juego. Sin embargo, no nos parece adecuado que la combinación de estrategias $(\alpha_2^1, \alpha_2^2, \alpha_1^3)$ sea considerada estable, pues para ello necesitamos suponer que el jugador 3 va a tender a equivocarse hacia α_2^3 con más probabilidad que los jugadores 1 y 2 hacia α_1^1 y α_1^2, respectivamente, supuesto muy poco intuitivo si observamos las matrices de pago, ya que 3 tiene mucho más que perder que 1 y 2 al cometer su error. Por todo lo anteriormente expuesto se hace necesario introducir un nuevo refinamiento del concepto de Nash en el sentido que indicábamos en la introducción de este artículo.

Definición. Decimos que s es un equilibrio ε-perfectamente propio si y sólo si:

a) s es completamente mixto.

b) Si $H_i(s\backslash\phi_i) - H_i(s\backslash\phi_i') < H_j(s\backslash\phi_j) - H_j(s\backslash\phi_j')$ con $\phi_i \in B_i(s)$, $\phi_j \in B_j(s)$, entonces $s_j(\phi_j') \leqslant \varepsilon.\ s_i(\phi_i')$

$$\forall\, \phi_i' \in \Phi_i, \quad \forall\, \phi_j' \in \Phi_j \quad \forall\, i,j \in \{1, ..., n\}$$

Decimos que s es un equilibrio perfectamente propio si y sólo si existe un par de sucesiones $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{s_k\}_{k=1}^{\infty} = \{(s_1^k, ..., s_n^k)\}_{k=1}^{\infty}$ tales que

— $\varepsilon_k > 0 \quad \forall\, k$

— $\lim\limits_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$

— s_k es ε_k-perfectamente propio $\forall\, k$.

— $\lim\limits_{k\to\infty} s_i^k(\phi_i) = s_i(\phi_i)\ \forall\, \phi_i \in \Phi_i,\ \forall\, i \in \{1, ..., n\}$

Obsérvese que es inmediato que la definición que hemos dado de equilibrio ε-perfectamente propio es equivalente a la siguiente.

Decimos que s es ε-perfectamente propio si y sólo si:

a) s es completamente mixto.

b) s es ε-propio.

c) Si $H_i(s\backslash\phi_i) - H_i(s\backslash\phi_i') < H_j(s\backslash\phi_j) - H_j(s\backslash\phi_j')$ con $\phi_i \in B_i(s)$, $\phi_j \in B_j(s)$, entonces $s_j(\phi_j') \leqslant \varepsilon.\, s_i(\phi_i')$

$$\forall\, \phi_i' \in \Phi_i, \quad \forall\, \phi_j' \in \Phi_j, \quad \forall\, i,j \in \{1, ..., n\}, \quad i \neq j$$

con lo que obviamente todo equilibrio perfectamente propio es propio. Sin embargo, el recíproco no se verifica.

En efecto, en Γ_2 tal como habíamos indicado $(\alpha_2^1, \alpha_2^2, \alpha_1^3)$ es propio. (Basta tomar $\varepsilon_k = \frac{1}{k+3}$ $\forall k \in \mathbb{N}$, $s_k = (s_1^k, s_2^k, s_3^k)$ con $s_1^k(\alpha_1^1) = \frac{1}{(k+3)^5}$, $s_1^k(\alpha_2^1) = 1 - \frac{1}{(k+3)^5}$, $s_2^k(\alpha_1^2) = \frac{1}{(k+3)^5}$, $s_2^k(\alpha_2^2) = 1 - \frac{1}{(k+3)^5}$, $s_3^k(\alpha_1^3) = 1 - \frac{1}{(k+3)^2}$, $s_3^k(\alpha_2^3) = \frac{1}{(k+3)^2}$, $\forall k \in \mathbb{N}$.) Sin embargo, $(\alpha_2^1, \alpha_2^2, \alpha_1^3)$ no es perfectamente propio. Supongamos que lo fuera. En tal caso existirán $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ tales que

— $0 < \varepsilon_k < 1$ $\forall k$

— $\lim_{k \to \infty} \varepsilon_k = 0$

— s_k es ε_k-perfectamente propio $\forall k$

— $\lim_{k \to \infty} s_1^k(\alpha_1^1) = 0$, $\lim_{k \to \infty} s_1^k(\alpha_2^1) = 1$ (3.1)

$\lim_{k \to \infty} s_2^k(\alpha_1^2) = 0$, $\lim_{k \to \infty} s_2^k(\alpha_2^2) = 1$ (3.2)

$\lim_{k \to \infty} s_3^k(\alpha_1^3) = 1$, $\lim_{k \to \infty} s_3^k(\alpha_2^3) = 0$ (3.3)

En virtud de la proposición 2.1 y teniendo en cuenta que si s_k es ε_k-perfectamente propio, entonces es ε_k-propio, existirá $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall k \geqslant N_1$, $(\alpha_2^1, \alpha_2^2, \alpha_1^3)$ será una mejor respuesta a s_k.

Por otro lado, obsérvese que

$$
\begin{aligned}
H_1(s_k \backslash \alpha_2^1) &= s_2^k(\alpha_2^2) \cdot s_3^k(\alpha_2^3) \\
H_1(s_k \backslash \alpha_1^1) &= s_2^k(\alpha_1^2) \cdot s_3^k(\alpha_1^3) \\
H_2(s_k \backslash \alpha_2^2) &= s_1^k(\alpha_2^1) \cdot s_3^k(\alpha_2^3) \\
H_2(s_k \backslash \alpha_1^2) &= s_1^k(\alpha_1^1) \cdot s_3^k(\alpha_1^3) \\
H_3(s_k \backslash \alpha_1^3) &= 1 \\
H_3(s_k \backslash \alpha_2^3) &= 0
\end{aligned}
$$

y que entonces, en virtud de (3.1), (3.2) y (3.3):

$$\lim_{k\to\infty} H_1(s_k\backslash\alpha_2^1) = \lim_{k\to\infty} H_1(s_k\backslash\alpha_1^1) = \lim_{k\to\infty} H_2(s_k\backslash\alpha_2^2) =$$
$$= \lim_{k\to\infty} H_2(s_k\backslash\alpha_1^2) = \lim_{k\to\infty} H_3(s_k\backslash\alpha_2^3) = 0$$
$$\lim_{k\to\infty} H_3(s_k\backslash\alpha_1^3) = 1$$

y, por lo tanto, existirá $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall k \geqslant N_2$,

$$H_1(s_k\backslash\alpha_2^1) - H_1(s_k\backslash\alpha_1^1) < H_3(s_k\backslash\alpha_1^3) - H_3(s_k\backslash\alpha_2^3) \qquad (3.4)$$
$$H_2(s_k\backslash\alpha_2^2) - H_2(s_k\backslash\alpha_1^2) < H_3(s_k\backslash\alpha_1^3) - H_3(s_k\backslash\alpha_2^3) \qquad (3.5)$$

Tomando $N = \text{máx}\,\{N_1, N_2\}$ tendremos que las expresiones (3.4) y (3.5) serán ciertas y que $\alpha_2^1 \in B_1(s_k)$, $\alpha_2^2 \in B_2(s_k)$, $\alpha_1^3 \in B_3(s_k)$ para todo $k \geqslant N$, en cuyo caso, por ser s_k ε_k-perfectamente propio $\forall k$, habrá de ser cierto que

$$s_3^k(\alpha_2^3) \leqslant \varepsilon_k \cdot s_1^k(\alpha_1^1)$$
$$s_3^k(\alpha_2^3) \leqslant \varepsilon_k \cdot s_2^k(\alpha_1^2) \qquad \forall k \geqslant N$$

pero entonces, $\forall k \geqslant N$,

$$H_1(s_k\backslash\alpha_2^1) = s_2^k(\alpha_2^2)\cdot s_3^k(\alpha_2^3) < s_2^k(\alpha_2^2)\cdot s_2^k(\alpha_1^2) < s_3^k(\alpha_1^3)\cdot s_2^k(\alpha_1^2) = H_1(s_k\backslash\alpha_1^1)$$

$$H_2(s_k\backslash\alpha_2^2) = s_1^k(\alpha_2^1)\cdot s_3^k(\alpha_2^3) < s_1^k(\alpha_2^1)\cdot s_1^k(\alpha_1^1) < s_3^k(a_1^3)\cdot s_1^k(\alpha_1^1) = H_2(s_k\backslash\alpha_1^2)$$

lo cual contradice el hecho de que $\alpha_2^1 \in B_1(s_k)$, $\alpha_2^2 \in B_2(s_k)$ $\forall k \geqslant N_1$.

En consecuencia, hemos demostrado que el concepto de equilibrio perfectamente propio es un refinamiento estricto del concepto de equilibrio propio.

Obsérvese que, en Γ_2, $(\alpha_1^1,\ \alpha_1^2,\ \alpha_1^3)$ es un equilibrio perfectamente propio. (Tómese $\varepsilon_k = \dfrac{1}{k+3}$ $\forall k$ y $s_k = (s_1^k,\ s_2^k,\ s_3^k)$ con $s_1^k(\alpha_1^1) = 1 - \left(\dfrac{1}{k+3}\right)^2$, $s_1^k(\alpha_2^1) = \dfrac{1}{(k+3)^2}$, $s_2^k(\alpha_1^2) = 1 - \dfrac{1}{(k+3)^2}$, $s_2^k(\alpha_2^2) = \dfrac{1}{(k+3)^2}$, $s_3^k(\alpha_1^3) = 1 - \dfrac{1}{(k+3)^3}$, $s_3^k(\alpha_2^3) = \dfrac{1}{(k+3)^3}$ $\quad \forall k \in \mathbb{N}$).

Pasaremos ahora a probar que Γ_2 no es un caso aislado, sino que todo juego n-personal finito en forma normal posee al menos un equilibrio perfectamente propio.

4. EXISTENCIA DEL EQUILIBRIO PERFECTAMENTE PROPIO

Teorema. Todo juego Γ n-personal finito en forma normal posee al menos un equilibrio perfectamente propio.

Demostración

Probaremos que $\forall\, \varepsilon_k \in (0, 1)\, \exists\, s_k$ un equilibrio ε_k-perfectamente propio. Tomando entonces una sucesión $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $\lim\limits_{k \to \infty} \varepsilon_k = 0$ encontraremos una sucesión $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ de equilibrios ε_k-perfectamente propios en S. Por ser S compacto existirá una subsucesión de $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ que convergerá a un cierto $s \in S$, que, en consecuencia, será un equilibrio perfectamente propio de Γ.

Sea, pues, $\varepsilon_k \in (0, 1)$. Si $m_i = |\Phi_i|$, sea $\gamma = \dfrac{\varepsilon_k^{\sum_{i=1}^{n} m_i}}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$

Sea $S_i(\gamma) = \{s_i \in S_i \;/\; s_i\,(\phi_i) \geqslant \gamma \quad \forall\, \phi_i \in \Phi_i\}\ \forall_i = 1, ..., n$ y sea $S(\gamma) = S_1(\gamma) \times \cdots \times S_n(\gamma)$.

Definimos ahora F de $S(\gamma)$ en $P(S(\gamma))$ del siguiente modo:

$$F(s) = \{\sigma \in S(\gamma) / \text{ si } H_i(s\backslash\phi_i) - H_i(s\backslash\phi_i') < H_j(s\backslash\phi_j) - H_j(s\backslash\phi_j')$$
$$\text{con } \phi_i \in B_i(s),\ \phi_j \in B_j(s), \text{ entonces}$$
$$\sigma_j(\phi_j') \leqslant \varepsilon_k \cdot \sigma_i(\phi_i')\ \forall\, \phi_i' \in \Phi_i,\ \forall\, \phi_j' \in \Phi_j,\ \forall\, i, j\}$$

Es inmediato que $S(\gamma)$ es convexo, compacto y no vacío y que $F(s)$ es compacto y convexo $\forall\, s \in S(\gamma)$.

Además, $\forall\, s \in S(\gamma)$, $F(s)$ es no vacío. Efectivamente, si definimos

$$A(s, \phi_i') = \sum_{j=1}^{n} |\{\phi_j' \in \Phi_j / H_j(s\backslash\phi_j) - H_j(s\backslash\phi_j') < H_i(s\backslash\phi_i) - H_i(s\backslash\phi_i')$$
$$\text{con } \phi_j \in B_j(s),\ \phi_i \in B_i(s)\}|$$
$$\forall\, \phi_i' \in \Phi_i\ \forall\, i \in \{1, ..., n\}$$

y $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_n)$ tal que para cada i:

$$\sigma_i(\phi_i) = \frac{\varepsilon_k^{A(s, \phi_i)}}{\sum_{i=1}^{n} \sum_{\Phi_i' \in \Phi_i} \varepsilon_k^{A(s, \Phi_i')}} \qquad \forall\, \phi_i \notin B_i(s)$$

$$\sigma_i(\phi_i) = \frac{1 - \sum_{\phi'_i \notin B_i(s)} \sigma_i(\phi'_i)}{|B_i(s)|} \qquad \forall\, \phi_i \in B_i(s)$$

entonces $\sigma \in F(s)$ y esto para cualquier $s \in S(\gamma)$.

Obsérvese por último que F es semicontinua superiormente, con lo que podemos aplicar el teorema del punto fijo de Kakutani (1941) y, por tanto, F tendrá un punto fijo que es un equilibrio ε_k-perfectamente propio de Γ.

Observación

Tal como hemos definido el equilibrio perfectamente propio, hemos supuesto implícitamente que los pagos a los distintos jugadores vienen expresados en las mismas unidades. Para los casos en los que esta suposición no pueda hacerse es preciso dar un concepto alternativo que, conservando la filosofía del ya introducido, compare pagos de alguna manera normalizados. Para ello se sugiere considerar $0_i = \max_{\phi} H_i(\phi) - \min_{\phi} H_i(\phi)$ y, suponiendo que no hay jugadores con $0_i = 0$ (lo cual en el fondo no supone ninguna restricción), definir para cada jugador i la nueva función de pago $H'_i(s) = H_i(s)/0_i$. Si ahora introducimos el equilibrio perfectamente propio normalizado como el perfectamente propio en 3 pero considerando H'_i en vez de H_i para cada i, obtenemos el concepto alternativo que buscábamos. $(\alpha_2^1, \alpha_2^2, \alpha_1^3)$ en Γ_2 tampoco es perfectamente propio normalizado, luego dicho concepto es un refinamiento estricto del propio. La existencia para el perfectamente propio normalizado se obtiene de modo absolutamente análogo al empleado en 4 para probar la del perfectamente propio.

REFERENCIAS

DAMME, E. E. C. van (1983): *Refinements of the Nash equilibrium concept*, Ph. D. Thesis Eindhoven University of Technology, Eindhoven.

KAKUTANI, S. (1941): «A Generalization of Brower's fixed point theorem», *Duke Mathematical Journal*, 8, 457-459.

MYERSON, R. B. (1978): «Refinements of the Nash equilibrium concept», *Int. J. Game Theory*, 7, 73-80.

NASH, J. F. (1951): «Non-cooperative games», *Annals of Mathematics*, 54, 286-295.

SELTEN, R. (1975): «Reexamination of the perfectness concept for equilibrium points in extensive games», *Int. J. Game Theory*, 4, 25-55.