TRABAJOS DE INVESTIGACION OPERATIVA
Vol. 3. Núm. 1, 1988 pp. 87 a 102

UN PROBLEMA DE BUSQUEDA DE UNA RECTA

Noemí Zoroa Alonso
Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad de Murcia

RESUMEN

En este trabajo se estudia el problema de la búsqueda de una recta de entre n tangentes a una circunferencia. Se da un método para calcular la longitud media óptima del camino recorrido hasta encontrar la recta. Se obtienen ecuaciones que determinan la trayectoria solución de este problema.

Palabras clave: búsqueda, optimización.

Clasificación AMS: 90B40.

Title: A problem of search for a line

SUMMARY

In this paper a problem of search for a line among n tangents to a circle is studied. A method is given to calculate the optimum average length of the path until detecting the line. We present equations to describe the trayectory which is the solution to this problem.

Key words: search, optimization.

AMS subjects classifications: 90B40.

Recibido: Febrero 1987.

1. INTRODUCCION

En términos muy generales un problema de búsqueda de una recta en el plano puede plantearse como sigue.

En un plano se da un punto O y una familia de rectas X. De esta familia se toma una recta r con arreglo a una distribución de probabilidad determinada. Si se fija una curva s del plano considerado, que parte de O y corta a todas las rectas de X se puede calcular la longitud media del arco de s que parte de O y termina en la intersección de s con la recta aleatoria r. En estas condiciones se plantea el problema de elegir s de modo que resulte mínima dicha longitud esperada.

Una situación de esta naturaleza es la siguiente. Una barca ha quedado extraviada en la niebla a una distancia conocida de una costa rectilínea. El piloto puede controlar la forma de la trayectoria que seguirá la barca en busca de la costa. El problema consiste en determinar la dirección inicial y la forma de la trayectoria que debe seguir la barca para que sea mínimo el recorrido esperado hasta encontrar la costa.

Esta situación correspondería, en el planteamiento inicial, al caso en que X fuese el conjunto de las rectas tangentes a una circunferencia, el punto O fuese el centro de la circunferencia y la distribución sobre X fuese la uniforme.

Una solución aproximada a este problema puede verse en Gluss (1961a).

No conocemos la solución exacta de este problema. Por ello puede tener algún interés tratar la versión discreta cuyo enunciado concretamos del siguiente modo.

Problema. Se tiene en un plano el conjunto X de las tangentes a una circunferencia de centro O y radio unidad en los vértices de un polígono regular de n lados inscrito en la circunferencia. Se trata de buscar una trayectoria s que parta de O, vaya a un vértice del polígono considerado y corte a las rectas de X de modo que resulte mínimo el recorrido esperado sobre la parte de la trayectoria s que va desde O hasta cortar a una recta de X elegida con una distribución uniforme.

Parece claro que el recorrido esperado en el problema discreto sea algo inferior al del caso continuo ya que la información acerca de la recta aleatoria se hace menos precisa al crecer n, pero la solución del caso discreto se aproximará a la del caso continuo conforme n crece.

2. PLANTEAMIENTO MATEMATICO

Sea n un entero positivo dado.

Denotaremos por T_k, $k = 0, ..., n - 1$, los puntos del plano euclídeo dados por

$$T_k = (\cos kc, \operatorname{sen} kc) \quad , \quad c = 2\pi/n$$
$$k = 0, ..., n - 1$$

que constituyen los vértices de un polígono regular de n lados inscrito en una circunferencia de centro el origen (0, 0) y radio igual a la unidad.

Las rectas tangentes a dicha circunsferencia en estos puntos son

$$r_k = \{P : \overrightarrow{T_k P} = (-u \operatorname{sen} kc, u \cos kc), u \in \mathbb{R}\}$$
$$k = 0, ..., \mathrm{n} - 1$$

Sea m un entero positivo menor que n y fijemos los $m + 1$ puntos $P_m, ..., P_0$ tomados, respectivamente, en las rectas $r_m, ..., r_0$.

Al elegir al azar una recta de entre $r_0, ..., r_{m-1}$ obtendremos la recta aleatoria r_α. La longitud de la quebrada aleatoria $P_m P_{m-1} \cdots P_\alpha$ resulta ser una variable aleatoria que depende de los puntos $P_i (i = m, ..., 0)$ y su esperanza matemática es función de dichos puntos

$$M_m(P_m, P_{m-1}, ..., P_0) = E(P_m P_{m-1} \cdots P_\alpha)$$

Con $P_m P_{m-1} \cdots P_0$ representamos la quebrada de vértices $P_0 \ldots P_m$ o su longitud según el contexto.

La expresión anterior puede ponerse en la forma

$$\begin{aligned} M_m(P_m, P_{m-1}, ..., P_0) &= \sum_{0 \leq k \leq m-1} \frac{1}{m} P_m P_{m-1} \cdots P_k = \\ &= \frac{1}{m} \sum_{1 \leq j \leq m} j P_j P_{j-1} \end{aligned} \tag{1}$$

La relación que liga M_m con M_{m-1} es

$$M_m(P_m, P_{m-1}, ..., P_0) = P_m P_{m-1} + \frac{m-1}{m} M_{m-1}(P_{m-1}, ..., P_0) \tag{2}$$

A cada punto $P_k \in r_k$ le haremos corresponder su abscisa o parámetro u_k tal que

$$\overrightarrow{T_kP_k} = (-u_k \text{ sen } kc, \ u_k \cos kc)$$
$$k = 0, ..., m$$

Si en (1) mantenemos P_m fijo con $u_m \geqslant 0$ resulta M_m dependiente de los puntos P_{m-1}, ..., P_0. Así pues para cada P_m se puede calcular el mínimo de M_m respecto de los restantes puntos P_i como se enuncia a continuación.

Problema auxiliar. Con las notaciones anteriores, fijado $P_m \in r_m$ con $1 \leqslant m < n$ y $u_m \geqslant 0$ se pide calcular

$$L_m(P_m) = \min_{P_i, 0 \leq i \leq m-1} M_m(P_m, P_{m-1}, ..., P_0) = M_m(P_m, \bar{P}_{m-1}, ..., \bar{P}_0) \qquad (3)$$

Una vez resuelto este problema auxiliar abordaremos el problema planteado en la introducción.

Para llegar a una solución de este problema seguiremos los siguientes pasos. En el Lema 1 se prueba la existencia de una solución. El Lema 2 da una relación de recurrencia respecto de m. En el Lema 3 se asegura la unicidad y una propiedad de paralelismo de las soluciones correspondientes a distintos valores de u_m. Seguidamente el Teorema 1 da un procedimiento para el cálculo del valor mínimo L_m, el cual resulta ser lineal en u_m.

El Teorema 2 sirve para definir la forma de la trayectoria óptima y el Teorema 3 nos da las coordenadas cartesianas de los vértices de la trayectoria.

Esto se aplicará a la resolución del problema planteado al principio. Se darán para el caso $n = 20$, las coordenadas de los vértices de la trayectoria y un gráfico para mostrar la forma de dicha trayectoria.

3. ESTUDIO DEL PROBLEMA

Lema 1

Para cada $P_m \in r_m$ fijo la función M_m de $P_{m-1}, ..., P_0$ tiene un mínimo conforme con la expresión (3), donde $\bar{P}_{m-1}$, ..., $\bar{P}_0$ pueden depender de P_m, $\bar{P}_i = \bar{P}_i(P_m)$, $i = 0, 1, ..., m-1$.

Demostración

Sean $P'_{m-1}, ..., P'_0$ puntos cualesquiera de $r_{m-1}, ..., r_0$ y llamaremos $A = M_m(P_m, P'_{m-1}, ..., P'_0)$.

Tomemos un círculo cerrado C con centro el origen y radio R bastante grande para que contenga en su interior el círculo de centro P_m y radio $2mA$.

Es fácil ver que dentro de este círculo quedan contenidos los puntos $P'_{m-1}, ..., P'_0$.

Sea ahora $P_m \cdots P_0$ ($P_k \in r_k$, $0 \leqslant k \leqslant m$) cualquier quebrada tal que algún vértice P_h se sale de círculo C, por lo que $OP_h > R$, y, por tanto, $P_mP_h > 2mA$.

Entonces

$$M_m(P_m, ..., P_0) \geqslant \frac{1}{m} P_m \cdots P_h \geqslant \frac{1}{m} P_mP_h \geqslant 2A$$

Por consiguiente

$$\inf_{\text{algún } P_h \notin C} M_m(P_m, ..., P_0) \geqslant 2A > A \tag{4}$$

Además las partes de las rectas r_k que caen dentro de C se reducen a segmentos cerrados por lo que resulta M_m continua en un compacto (dentro de C) luego M_m alcanza su mínimo en C

$$\begin{aligned} L_m(P_m) &= \min_{P_i \in C} M_m(P_m, ..., P_0) = \\ &= M_m(P_m, \bar{P}_{m-1}, ..., \bar{P}_0) \leqslant \\ &\leqslant M_m(P_m, P'_{m-1}, ..., P'_0) = A \end{aligned} \tag{5}$$

y de (4) y (5) resulta (3).

Lema 2

Si $\bar{P}_j \in r_j$, $j = m - 1, ..., 0$ satisfacen (3) también con los mismos puntos $\bar{P}_j$, $j = m - 2, ..., 0$ vale

$$L_{m-1}(\bar{P}_{m-1}) = M_{m-1}(\bar{P}_{m-1}, ..., \bar{P}_0) \tag{6}$$

y, por tanto,

$$L_m(P_m) = P_m\bar{P}_{m-1} + \frac{m-1}{m} L_{m-1}(\bar{P}_{m-1})$$

Demostración

De (3) y (2) se sigue que vale para todo $P_i \in r_i$, $i = m - 2, ..., 0$

$$P_m\bar{P}_{m-1} + \frac{m-1}{m} M_{m-1}(\bar{P}_{m-1}, P_{m-2}, ..., P_0) \geqslant$$

$$\geqslant P_m\bar{P}_{m-1} + \frac{m-1}{m} M_{m-1}(\bar{P}_{m-1}, ..., \bar{P}_0)$$

que prueba (6).

Lema 3

Fijado $P_m \in r_m$ los puntos $\bar{P}_i$, $i = 0, ..., m - 1$ de (3) son únicos. Además la dirección de $P_m\bar{P}_{m-1}$ y las de $\bar{P}_j\bar{P}_{j-1}$ ($j = m - 1, ..., 0$) quedan determinadas, es decir, si $P_m \neq P'_m \in r_m$ y

$$L_m(P'_m) = M_m(P'_m, \bar{P}'_{m-1}, ..., \bar{P}'_0)$$

los segmentos $P_m\bar{P}_{m-1}$ y $P'_m\bar{P}'_{m-1}$, así como los $\bar{P}_j\bar{P}_{j-1}$ y $\bar{P}'_j\bar{P}'_{j-1}$, $j = 0, ..., m - 1$ son paralelos.

Demostración

Por inducción, comprobemos, en primer lugar, la validez del Lema con $m = 1$; en este caso para $P_1 \in r_1$

$$\min_{P_0 \in r_0} M_1(P_1, P_0) = \min_{P_0} P_1P_0 = P_1\bar{P}_0$$

donde $\bar{P}_0$ es forzosamente el pie de la perpendicular a r_0 desde P_1 lo cual determina de modo único $\bar{P}_0$ (fijado P_1) y también queda determinada la dirección de $P_1\bar{P}_0$ lo que prueba el Lema para $m = 1$.

Supongamos cierto el enunciado para las quebradas que parten de los puntos P_{m-1} de r_{m-1}. Partiendo de las igualdades (3) y por el Lema anterior

$$L_m(P_m) = P_m\bar{P}_{m-1} + \frac{m-1}{m} M_{m-1}(\bar{P}_{m-1}, \ldots, \bar{P}_0) =$$

$$= P_m\bar{P}_{m-1} + \frac{m-1}{m} L_{m-1}(\bar{P}_{m-1})$$

luego por la hipótesis de inducción todos los segmentos $\bar{P}_j\bar{P}_{j-1}$, $j = m-1, \ldots, 0$ tienen direcciones determinadas. También se puede escribir para cualquier $P_{m-1} \in r_{m-1}$

$$L_m(P_m) = P_m\bar{P}_{m-1} + \frac{m-1}{m} \bar{P}_{m-1}\bar{P}_{m-2} +$$

$$+ \frac{m-2}{m} L_{m-2}(\bar{P}_{m-2}) \leqslant P_m P_{m-1} +$$

$$+ \frac{m-1}{m} P_{m-1}\bar{P}_{m-2} + \frac{m-2}{m} L_{m-2}(\bar{P}_{m-2})$$

Esta última relación prueba, poniendo $v_1 = 1$, $v_2 = m/(m-1)$, que vale

$$\min_{P_{m-1} \in r_{m-1}} \left(\frac{P_m P_{m-1}}{v_1} + \frac{P_{m-1}\bar{P}_{m-2}}{v_2} \right) = \frac{P_m\bar{P}_{m-1}}{v_1} + \frac{\bar{P}_{m-1}\bar{P}_{m-2}}{v_2}$$

de donde se sigue, llamando i_1, i_2 a los ángulos que forman con la normal a r_{m-1} los segmentos $P_m\bar{P}_{m-1}$ y $\bar{P}_{m-1}\bar{P}_{m-2}$ que

$$\frac{\text{sen } i_1}{v_1} = \frac{\text{sen } i_2}{v_2} \tag{7}$$

debiendo estar además P_m y $\bar{P}_{m-2}$ separados por la normal a r_{m-1} trazada por $\bar{P}_{m-2}$. En el caso en el que el segmento $P_m\bar{P}_{m-2}$ corte a la recta r_{m-1} la igualdad (7) es la conocida «Ley de la refracción de Snell».

Esto prueba que el ángulo i_1 tiene un valor determinado por las condiciones del problema y, por tanto, la dirección $P_m\bar{P}_{m-1}$ está determinada, con lo que la demostración queda completa.

En el Teorema siguiente h y u_k están definidos por

$$\begin{aligned} \overrightarrow{T_k\bar{P}_k} &= u_k(-\text{sen } kc, \cos kc),\ k = m-1, ..., 0 \\ \overrightarrow{T_m P_m} &= u_m(-\text{sen } mc, \cos mc) \\ h &= \text{tg}(c/2) \end{aligned}$$

Teorema 1

Supongamos que $1 \leqslant m < n$, $u_m > 0$. Entonces existen constantes a_m, b_m tales que

$$L_m(P_m) = a_m u_m + b_m \tag{8}$$

Además las sucesiones

$$a_0 = 0, a_1, ..., a_m \quad ; \quad b_0 = 0, b_1, ..., b_m$$

pueden obtenerse por las fórmulas recurrentes

$$\begin{aligned} a_k &= A_{k-1} \cos c + (1 - A_{k-1}^2)^{1/2} \text{sen } c \\ b_k &= (a_k + A_{k-1})h + (k-1)b_{k-1}/k \end{aligned} \tag{9}$$

donde

$$A_{k-1} = \frac{k-1}{k} a_{k-1}$$

y, si $n \geqslant 20$, vale

$$0 < A_k < \frac{n-1}{n} < \cos c \quad \text{para} \quad c \leqslant k \leqslant m \tag{10}$$

y

$$u_k > h\ , \quad \text{para} \quad 0 \leqslant k \leqslant m-1 \tag{11}$$

Demostración

Para demostrar el Teorema por inducción supongamos válida la tesis cambiando m por $m-1$.

Por el Lema 2 se tiene

$$L_m(P_m) = \min_{P_{m-1}} \left(P_m P_{m-1} + \frac{m-1}{m} L_{m-1}(P_{m-1}) \right) =$$
$$= \min_{P_{m-1}} \left(P_m P_{m-1} + \frac{m-1}{m} a_{m-1} u_{m-1} + \frac{m-1}{m} b_{m-1} \right) \tag{12}$$

Sustituyendo en la anterior

$$P_m P_{m-1} = ((u_{m-1} - h)^2 + (u_m + h)^2 - 2(u_{m-1} - h)(u_m + h)\cos c)^{1/2} =$$
$$= ((u_{m-1} - h - (u_m + h)\cos c)^2 + (u_m + h)^2 \operatorname{sen}^2 c)^{1/2}$$

se obtiene una función de u_{m-1} cuya derivada vale

$$\frac{u_{m-1} - h - (u_m + h)\cos c}{P_m P_{m-1}} + A_{m-1}$$

Igualada a cero esta derivada resulta una ecuación de la que se sigue

$$P_m P_{m-1} = \frac{\operatorname{sen} c}{(1 - A_{m-1}^2)^{1/2}} (u_m + h)$$
$$u_{m-1} - h = \frac{(1 - A_{m-1}^2)^{1/2} \cos c - A_{m-1} \operatorname{sen} c}{(1 - A_{m-1}^2)^{1/2}} (u_m + h) \tag{13}$$

Con estos valores, poniendo en (12) todo en función de u_m, se llega al mínimo

$$L_m(P_m) = (A_{m-1} \cos c + (1 - A_{m-1}^2)^{1/2} \operatorname{sen} c)(u_m + h) +$$
$$+ A_{m-1} h + (m-1) b_{m-1}/m$$

y llamando

$$a_m = A_{m-1} \cos c + (1 - A^2_{m-1})^{1/2} \operatorname{sen} c$$

$$b_m = (a_m + A_{m-1})h + (m-1)b_{m-1}/m$$

resultan las (9) con $k = m$.

La desigualdad de Schwarz permite obtener de (9)

$$A_m = \frac{m}{m+1} a_m \leqslant \frac{m}{m+1}(A^2_{m-1} +$$

$$+ (1 - A^2_{m-1}))^{1/2}(\operatorname{sen} c + \cos^2 c)^{1/2} = \frac{m}{m+1} \leqslant \frac{n-1}{n}$$

Evidentemente a_m y A_m son positivos en cuanto A_{m-1} lo sea. Así pues para completar las (10) sólo falta ver que $\frac{n-1}{n} < \cos c$.

Esta se reduce sucesivamente a

$$1 - \cos \frac{2\pi}{n} < \frac{1}{n}$$

$$2 \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{n} < \frac{1}{n}$$

$$2 \frac{\pi^2}{n^2} < \frac{1}{n}$$

y esta es válida para $n \geqslant 20$ que es una hipótesis del Teorema.

Para probar (11) introduzcamos el ángulo α definido por

$$A_{m-1} = \frac{m-1}{m} a_{m-1} = \cos \alpha \quad , \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

con lo cual de (13) se obtiene

$$u_{m-1} - h = \frac{\operatorname{sen}(\alpha - c)}{\operatorname{sen} \alpha}(u_m + h) \tag{14}$$

y solo faltará probar que $\alpha > c$ lo cual resultará cierto por ser

$$\cos\alpha = A_{m-1} < \frac{n-1}{n} < \cos c$$

Para acabar la demostración por inducción sólo falta comprobar la validez del enunciado para $m = 1$.

Como $L_1(P_1) = (u_1 + h)\,\text{sen}\, c$ resulta $a_1 = \text{sen}\, c$, $b_1 = h\,\text{sen}\, c$ con lo que se obtiene inmediatamente la validez del enunciado para $m = 1$, y el Teorema queda demostrado.

En los Teoremas siguientes supondremos que $P_m \cdots P_0$ es una quebrada con $u_m \geqslant 0$, que nos da el mínimo $L_m(P_m)$ de M_m. Utilizaremos los valores a_k y A_k del Teorema 1 y los ángulos $d_k =$ ángulo $(\overrightarrow{P_kT_k}, \overrightarrow{P_kP_{k-1}})$.

Teorema 2

Sea $n \geqslant 20$, $m < n$, a_k y d_k como se han definido anteriormente; entonces, partiendo de $a_0 = 0$, se pueden obtener

$$d_1, a_1, d_2, a_2, ..., d_m, a_m$$

mediante las fórmulas

$$\begin{aligned} \cos(c + d_k) &= \frac{k-1}{k} a_{k-1} \\ a_k &= \cos d_k \\ 1 \leqslant\ & k \leqslant m \end{aligned} \tag{15}$$

donde los ángulos d_k son agudos.

Demostración

Supongamos que cambiando m por $m - 1$ el enunciado anterior es válido. Solo habrá que probar que d_m es agudo y que

$$\begin{aligned} \cos(c + d_m) &= A_{m-1} \\ a_m &= \cos d_m \end{aligned} \tag{16}$$

Utilizaremos la relación (7) vista en el Lema 3. El ángulo

$$\operatorname{ang}(\overrightarrow{P_{m-1}T_{m-1}}\,,\ \overrightarrow{P_{m-1}P_{m-2}}) = d_{m-1} = \frac{\pi}{2} - i_2$$

es agudo, y resulta también agudo

$$\operatorname{ang}(\overrightarrow{T_{m-1}P_{m-1}}\,,\ \overrightarrow{P_{m-1}P_m}) = \frac{\pi}{2} - i_1$$

pero este último vale $c + d_m$ por ser un ángulo exterior del triángulo $TP_{m-1}P_m$ donde T es la intersección de $T_{m-1}P_{m-1}$ con T_mP_m. Esto prueba que d_m es agudo. Ahora la relación (7) nos da

$$\cos(c + d_m) = \frac{m-1}{m} a_{m-1} = A_{m-1}$$

que es la primera de las (16); sustituyendo esta última en la primera de las (9) con $k = m$ se obtiene la segunda de las (16). Para $m = 1$ la validez del Teorema es inmediata con lo que queda acabada la demostración.

Teorema 3

Con las mismas hipótesis del Teorema anterior, sean $a_0 = 0$, d_1, a_1, $d_2, a_2, ..., d_n, a_n$ calculados por (15) y seguidamente

$$u_m \geqslant 0,\ u_{m-1},\ ...,\ u_0$$

calculados por

$$u_{k-1} = h + \frac{\operatorname{sen} d_k}{\operatorname{sen}(c + d_k)}(u_k + h) \tag{17}$$

Entonces los puntos P_k de la quebrada que parte de P_m y corresponde al mínimo $L_m(P_m)$ tiene de coordenadas cartesianas

$$\begin{aligned} x_k &= \cos kc - u_k \operatorname{sen} kc \\ y_k &= \operatorname{sen} kc + u_k \cos kc \\ & 0 \leqslant k \leqslant m \end{aligned} \tag{18}$$

Demostración

Observese que si en la (14) cambiamos m por k el ángulo α vale $c + d_k$ y resulta la (17). La (18) resulta de $\overrightarrow{OP_k} = \overrightarrow{OT_k} + \overrightarrow{T_kP_k}$, lo que termina la demostración del Teorema.

Volviendo al problema planteado en la introducción, vamos a determinar la quebrada $O P_m P_{m-1} \cdots P_0$ que hace mínimo el recorrido esperado desde O hasta encontrar a la recta aleatoria buscada.

Para ello supongamos que partimos del origen O y nos dirigimos a un vértice T_q, $(3n/4 \leqslant q \leqslant n - 1)$ continuando por la recta OT_q hasta la intersección de OT_q con r_{n-1}, punto en que también concurre r_m con $m = 2q + 1 - n$. Llamaremos P_m a este punto de intersección de r_m, r_{n-1} y OT_q. A partir de este punto P_m el mínimo del recorrido esperado atravesando $r_{m-1}, \ldots, r_0$ que termina en r_0 es $L_m(P_m)$ que viene dado por (8). Por consiguiente el recorrido esperado total con la quebrada $OP_mP_{m-1} \cdots P_0$ es

$$\begin{aligned} E_q &= \frac{1}{n} + \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{q-m} \sec jc + \frac{m}{n}\sec(q-m)c + \\ &+ \frac{m}{n}\left(a_m \operatorname{tg}(q-m)c + b_m\right) \\ &(m = 2q + 1 - n) \end{aligned}$$

El Teorema 1 permite calcular los valores a_m, b_m y la expresión anterior permite determinar el valor de q para el cual E_q sea mínimo.

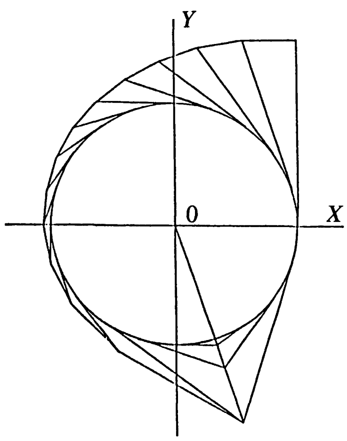
Por ejemplo, para $n = 20$ resulta $q = 16$, $E_2 = 3{,}2536999$, para $n = 100$, $q = 86$, $E_q = 3{,}3389182$, para $n = 360$, $q = 311$, $E_q = 3{,}3569449$.

Una vez determinado q, los Teoremas 2 y 3 permiten calcular las coordenadas cartesianas de los vértices de la quebrada $OP_m \cdots P_0$.

Para terminar diremos que, el cambio en este problema de la familia de rectas X por las tangentes a un arco dado, o la sustitución de las rectas por circunferencias, como se hace en Gluss (1961b), dará lugar a problemas que creemos podrían ser tratados por el método aquí seguido.

TABLA

k	x_k	y_k
0	1	1,4987792
1	0,56447935	1,4987792
2	0,19069643	1,4388305
3	−0,13123182	1,3314135
4	−0,40718714	1,1837653
5	−0,63952213	1
6	−0,82718592	0,78269323
7	−0,9657141	0,53443561
8	−1,0474805	0,25956843
9	−1,0626612	−0,034466846
10	−1	−0,33865674
11	−0,83926832	−0,65306568
12	−0,4940158	−1,0213472
13	0,52573111	−1,618034



BIBLIOGRAFIA

GLUSS, B. (1961a): «An alternative solution to the "Lost at sea" problem», *Naval Res. Logist. Quart.*, 8.

GLUSS, B. (1961b): «The minimax path in a search for a circle in the plane», *Naval Res. Logist. Quart.*, 8.

RUCKLE, W. (1979): «Geometric games of search and ambusch», *Mathematics Magazine*, 52.

WEGENER, I. (1983): «Discrete sequential search with positive switch cost», *Methods Oper. Res.*, 45.

ZOROA ALONSO, N. (1986): «Contribuciones a la teoría de los jugos geométricos». Tesis. Universidad de Murcia.