TRABAJOS DE INVESTIGACION OPERATIVA
Vol. 3. Núm. 1, 1988 pp. 71 a 86

JUEGOS SOBRE CONJUNTOS FINITOS SIN ESTRUCTURA

Noemí Zoroa Alonso
Departamento de Matemáticas y Estadística
Facultad de Ciencias Químicas y Matemáticas
Universidad de Murcia

RESUMEN

En este trabajo estudiamos algunos juegos en los que las estrategias son subconjuntos de un conjunto finito y la función de pago depende de los cardinales de dichas estrategias.

Para resolver estos juegos resolvemos previamente un juego auxiliar.

Presentamos un esquema que muestra la relación de dependencia que existe entre los juegos tratados.

Palabras clave: juegos geométricos, juegos finitos.

Clasificación AMS: 90D05.

Title: Games on finite sets without structure

SUMMARY

It this work we study some games in which the strategies are subsets of a finite set and the payoff functions depends on the cardinal of these strategies.

In order to solve these games we solve previously an auxiliar game.

An scheme is given to show the relationship existing between the games we have studied.

Key words: geometric games, finite games.

AMS subjects classifications: 90D05.

Recibido: Diciembre 1986.

1. INTRODUCCION

En este trabajo vamos a estudiar juegos geométricos sobre un conjunto finito L sin estructura.

Denotaremos un juego rectangular G en la forma $G = (X, Y, M)$ donde X, Y son los conjuntos de las estrategias de los jugadores I y II y M: $X \times Y \to \mathbb{R}$, es la función de pago que representa la ganancia del jugador I y la pérdida del jugador II.

Un juego geométrico sobre un conjunto finito L sin estructura, es un juego rectangular $G = (X, Y, M)$ en el que los elementos de X y de Y son subconjuntos del conjunto L, $X \subset \mathbb{P}(L)$, $Y \subset \mathbb{P}(L)$ y la función de pago M se define apoyándose en la medida natural que existe en el conjunto finito L que asigna a cada subconjunto de L su cardinal.

Para denotar el cardinal de un conjunto C escribiremos $|C|$.

En lo que sigue adoptaremos como conjunto L el conjunto de números naturales $L = \{1, 2, ..., N\}$ con lo cual no se restringe la generalidad de nuestro estudio.

Pueden verse tres juegos de este tipo en la obra de W. H. Ruckle (1983) con los nombres:

— simple inspection game (SIG), es decir, juego de inspección simple,

— simple point catcher game (SPCG), o sea, juego de captura simple,

— greedy game (GG), es decir, juego del avaro.

Nuestro objeto es tratar de sistematizar el estudio de los juegos geométricos sobre conjuntos finitos sin estructura.

Con este fin se han introducido varios juegos más generales (contienen una función arbitraria) con individualidad propia.

Existe una relación de inclusión entre estos juegos que queda reflejada en el esquema que aparece al final de este trabajo.

2. JUEGO GENERAL SOBRE CONJUNTOS FINITOS (JGF)

En el juego general sobre conjuntos finitos (JGF) que consideramos a continuación los conjuntos de estrategias de los jugadores I y II son

$$X = \{A : A \subset L \ , \ |A| \in H\}$$

$$Y = \{B : B \subset L \ , \ |B| \in K\}$$

donde H y K son dos conjuntos de enteros dados.

Por ejemplo, las limitaciones para A y B pueden venir dadas por acotaciones del tipo

$$h_1 \leqslant |A| \leqslant k_1 \qquad h_2 \leqslant |B| \leqslant k_2$$

La función de pago M en este juego viene dada por

$$M(A, B) = f(|A|, |B|, |A \cap B|) \qquad A \in X, \ B \in Y$$

donde f es una función conocida

$$f : H \times K \times P \to \mathbb{R}$$

siendo P un conjunto de enteros conveniente.

En general es más cómodo especificar la función anterior con un dominio más simple, así

$$f : \{0, 1, ..., N\}^3 \to \mathbb{R}$$

o si M sólo dependiese de dos o uno de los cardinales $|A|$, $|B|$, $|A \cap B|$ tomar

$$f : \{0, 1, ..., N\}^2 \to \mathbb{R}$$

o bien

$$f : \{0, 1, ..., N\} \to \mathbb{R}$$

Con esto la definición del juego JGF $= (X, Y, M)$ queda completa.

A partir de los datos que intervienen en la definición del juego JGF podemos introducir una función auxiliar

$$g : H \times K \to \mathbb{R}$$

de modo que

$$g(p,q) = \sum_r f(p,q,r)\binom{q}{r}\binom{N-q}{p-r}\Big/\binom{N}{p} =$$

$$= \sum_r f(p,q,r)\binom{p}{r}\binom{N-p}{q-r}\Big/\binom{N}{q}$$

donde la suma está extendida a los enteros r tales que

$$\text{máx}\,\{0, p+q-N\} \leqslant r \leqslant \text{mín}\,\{p,q\}$$

Teorema 2.1

Con las notaciones anteriores, sean α y β estrategias mixtas óptimas de los jugadores I y II, respectivamente, en el juego auxiliar (H, K, g) de conjuntos de estrategias H, K y función de pago g.

Las estrategias mixtas ζ^*, η^* de los jugadores I y II del juego JGF definidas por

$$\zeta^*(A) = \frac{\alpha(|A|)}{\binom{N}{|A|}}, \quad A \in X$$

$$\eta^*(B) = \frac{\beta(|B|)}{\binom{N}{|B|}}, \quad B \in Y$$

son óptimas y el valor del juego es $g(\alpha, \beta)$.

Demostración

Se tiene, para cualquier $B \in Y$, con $|B| = q$,

$$M(\zeta^*, B) = \sum_{A \in X} M(A, B)\frac{\alpha(|A|)}{\binom{N}{|A|}} =$$

$$= \sum_{A \in X} f(|A|, |B|, |A \cap B|) \frac{\alpha(|A|)}{\binom{N}{|A|}} =$$

$$= \sum_{p \in H} \sum_{|A| = p} f(p, q, |A \cap B|) \frac{\alpha(p)}{\binom{N}{p}} =$$

$$= \sum_{p \in H} \alpha(p) \sum_{r} \sum_{\substack{|A| = p \\ |A \cap B| = r}} f(p, q, r) \Big/ \binom{N}{p} =$$

$$= \sum_{p \in H} \alpha(p) \sum_{r} f(p, q, r) \binom{q}{r} \binom{N-q}{p-r} \Big/ \binom{N}{p} =$$

$$= \sum_{p \in H} \alpha(p) g(p, q) = g(\alpha, q) \geqslant g(\alpha, \beta)$$

y queda probada una parte de nuestro enunciado.

Para demostrar el resto tomemos cualquier $A \in X$ con $p = |A| \in H$, y se tiene, con cálculos análogos a los anteriores

$$M(A, \eta^*) = \sum_{B \in Y} M(A, B) \frac{\beta(|B|)}{\binom{N}{|B|}} =$$

$$= \sum_{q \in K} \beta(q) g(p, q) = g(p, \beta) \leqslant g(\alpha, \beta)$$

y la demostración queda completa. # #

Los tres juegos siguientes concretan más la función f con lo que la solución del juego queda determinada directamente por f.

3. JUEGO DE PAGO DECRECIENTE RESPECTO DE LA INTERSECCION (JPD)

Una interpretación intuitiva del juego que vamos a exponer es la siguiente: El jugador I oculta ciertos elementos valiosos en un conjunto de lugares A elegidos por él de un conjunto dado L.

El jugador II elige un conjunto $B \subset L$ de lugares para registrarlos.

La ganancia del jugador I disminuye conforme aumenta la parte $A \cap B$ hallada por el jugador II.

Formalmente este juego de pago decreciente respecto de la intersección, $JPD = (X, Y, M)$ está definido por los conjuntos X, Y de estrategias

$$X = \{A : A \subset L \quad , \quad |A| \geqslant p\}$$
$$Y = \{B : B \subset L \quad , \quad |B| \leqslant q\}$$

siendo p y q dos enteros positivos no superiores a N, y la función de pago M viene dada por

$$M(A, B) = f(|A \cap B|) \quad , \quad A \in X, \; B \in Y$$

donde

$$f : \{0, 1, 2, ..., N\} \to \mathbb{R}$$

es una función monótona decreciente conocida

$$f(r) \geqslant f(s) \quad si \quad r \leqslant s$$

Con esto queda completa la definición del juego JPD.

Llamaremos

$$P = \{A : A \in X \quad , \quad |A| = p\}$$
$$Q = \{B \; B \in Y \quad , \quad |B| = q\}$$

Se prueba fácilmente que en el juego JPD $= (X, Y, M)$ los conjuntos P y Q son clases completas de estrategias para los jugadores I y II.

Teorema 3.1

En el juego JPD las estrategias mixtas de los jugadores I y II ζ^* y η^* definidas por

$$\zeta^*(A) = \frac{1}{\binom{N}{p}} \qquad \text{si} \quad |A| = p$$

$$\zeta^*(A) = 0 \quad \text{si} \quad |A| > p$$

$$\eta^*(B) = \frac{1}{\binom{N}{q}} \quad \text{si} \quad |B| = q$$

$$\eta^*(B) = 0 \quad \text{si} \quad |B| < q$$

son óptimas y el valor del juego es

$$v = \sum f(r) \frac{\binom{q}{r}\binom{N-q}{p-r}}{\binom{N}{p}}$$

donde la suma está extendida a

$$\text{máx}\,\{0, p + q - N\} \leqslant r \leqslant \text{mín}\,\{p, q\}$$

Demostración

Para la demostración basta considerar el juego (P, Q, M) cuyos conjuntos de estrategias son las clases completas P y Q y la función de pago es la misma M (restringida a $P \times Q$).

Como el juego (P, Q, M) es un caso particular del juego general finito (JGF) podemos aplicarle el Teorema 2.1, pero el juego auxiliar (H, K, g) que se utiliza en dicho Teorema 2.1 es en este caso muy sencillo ya que H y K quedan reducidos a conjuntos unitarios

$$H = \{p\} \quad , \quad K = \{q\}$$

con lo cual se obtienen inmediatamente las estrategias óptimas ζ^* y η^* y el valor del juego v dados en el enunciado del Teorema. # #

4. JUEGO DE PAGO CRECIENTE RESPECTO DE LA INTERSECCION (JPC)

El significado intuitivo del juego de pago creciente respecto de la intersección (JPC) es simétrico del anterior.

El jugador I debe buscar los elementos que el jugador II oculta en el conjunto L. Para ello el jugador I inspecciona un subconjunto que elige en L y su ganancia crece con la parte hallada.

Formalmente el juego $JPC = (X, Y, M)$ se define tomando

$$X = \{A : A \subset L \quad , \quad |A| \leqslant p\}$$
$$Y = \{B : B \subset L \quad , \quad |B| \geqslant q\}$$

donde p y q son dos enteros no superiores a N y la función de pago M viene dada por

$$M(A, B) = f(|A \cap B|)$$

donde

$$f : \{0, 1, ..., N\} \to \mathbb{R}$$

es una función creciente

$$f(r) \leqslant f(r') \quad \text{si} \quad r < r'$$

Teorema 4.1

Las estrategias ζ^*, η^* consideradas en el juego anterior son óptimas en el juego de pago creciente con la intersección (JPC) y el valor del juego es

$$v = \sum f(r) \frac{\binom{q}{r}\binom{N-q}{p-r}}{\binom{N}{p}}$$

donde el índice r de sumación cumple máx $\{0, p + q - N\} \leqslant r \leqslant$ mín $\{p, q\}$.

Demostración

Similar a la del juego de pago decreciente respecto de la intersección. # #

5. JUEGO DEPENDIENTE DE LA INTERSECCION (JDI)

El juego JDI es análogo a los anteriores con las modificaciones siguientes

$$X = \{A : A \subset L \quad , \quad |A| = p\}$$
$$Y = \{B : B \subset L \quad , \quad |B| = q\}$$
$$M(A, B) = f(|A \cap B|)$$

siendo en este caso la función f arbitraria.

Teorema 5.1

Con las mismas notaciones anteriores en el juego JDI ζ^* y η^* son estrategias óptimas y el valor del juego viene dado igualmente por la expresión

$$v = \sum f(r) \frac{\binom{q}{r}\binom{N-q}{p-r}}{\binom{N}{p}}$$

donde el índice r de sumación cumple máx $\{0, p + q - N \leqslant r \leqslant$ mín $\{p, q\}$.

Demostración

Similar a la del juego de pago decreciente respecto de la intersección. # #

Como un subproducto de los juegos anteriores resulta esta propiedad de carácter exclusivamente matemático.

Teorema 5.2

Sea N un entero positivo y las funciones

$$f : \{1, 2, ..., N\} \to \mathbb{R}$$
$$g : \{1, 2, ..., N\}^2 \to \mathbb{R}$$

relacionadas por

$$g(p, q) = \sum_r f(r) \binom{q}{r} \binom{N-q}{p-r} \Big/ \binom{N}{p}$$

donde el índice r va de

$$\text{máx}\,\{0, p + q - N) \quad \text{a} \quad \text{mín}\,\{p, q\}$$

Entonces si f es monótona creciente (decreciente) g también lo es respecto a sus variables p y q.

6. JUEGO DE INSPECCION SIMPLE (SIG)

En este juego se supone que los conjuntos de estrategias de los jugadores I y II son

$$X = \{A : A \subset L \quad , \quad |A| \geqslant p\}$$
$$Y = \{B : B \subset L \quad , \quad |B| \leqslant q\}$$

y la función de pago

$$M(A, B) = \langle A, B \rangle$$

donde la expresión $\langle A, B \rangle$ está definida así

$$\langle A, B \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad A \cap B = \varnothing \\ 0 & \text{si} \quad A \cap B \neq \varnothing \end{cases}$$

Este juego de inspección simple es un caso particular del juego con pago decreciente respecto de la intersección (JPD) pues se obtiene tomando en este último f de modo que

$$f(0) = 1, f(r) = 0 \quad \text{para} \quad r = 1, 2, \ldots$$

Aplicando el Teorema 3.1 resultan inmediatamente las estrategias óptimas ζ^* y η^* definidas por

$$\zeta^*(A) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |A| > p \\ \dfrac{1}{\binom{N}{p}} & \text{si} \quad |A| = p \end{cases}$$

$$\eta^*(B) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |B| < q \\ \dfrac{1}{\binom{N}{q}} & \text{si} \quad |B| = q \end{cases}$$

y el valor del juego es

$$v = \binom{N-q}{p} \Big/ \binom{N}{p}$$

Juego de captura simple (*SPCG*). En el juego de captura simple (SPCG) los conjuntos de estrategias son

$$X = \{A : A \subset L \quad , \quad |A| \leqslant p\}$$
$$Y = \{B : B \subset L \quad , \quad |B| \geqslant q\}$$

y la función de pago está definida por

$$M(A, B) = |A \cap B|$$

Este juego es un caso particular del juego de pago creciente con la intersección (JPC), pues resulta al tomar f de modo que

$$f(r) = r$$

En este juego de captura simple (SPCG) son óptimas las estrategias ζ^*, η^* definidas por

$$\zeta^*(A) = \begin{cases} \dfrac{1}{\binom{N}{p}} & \text{si} \quad |A| = p \\ 0 & \text{si} \quad |A| \neq p \end{cases}$$

$$\eta^*(B) = \begin{cases} \dfrac{1}{\binom{N}{q}} & \text{si} \quad |B| = q \\ 0 & \text{si} \quad |B| \neq q \end{cases}$$

y el valor del juego resulta ser

$$\begin{aligned} v &= \sum r \binom{q}{r}\binom{N-q}{p-r} \bigg/ \binom{N}{p} = \\ &= \sum q \binom{q-1}{r-1}\binom{N-q}{p-r} \bigg/ \binom{N}{p} = \\ &= q\binom{N-1}{p-1} \bigg/ \binom{N}{p} = \frac{pq}{N} \end{aligned}$$

cumpliendo el índice r de las sumas las acotaciones

$$\text{máx}\,\{1, N-p-q\} \leqslant r \leqslant \text{mín}\,\{p, q\}$$

7. JUEGO DEL ARRIESGADO (JA)

En este juego (JA) los conjuntos de las estrategias son

$$X = \mathbb{P}(L) \qquad Y = \{B : B \subset L \quad , \quad |B| \leqslant q\}$$

y la función de pago

$$M(A, B) = h(|A|) < A, B >$$

donde

$$h: \{0, 1, ..., N\} \rightarrow \mathbb{R}$$

es una función positiva $h(p) > 0$, $p = 0, 1, ..., N$ y

$$<A, B> = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad A \cap B = \emptyset \\ 0 & \text{si} \quad A \cap B \neq \emptyset \end{cases}$$

En este juego se demuestra fácilmente que el conjunto

$$Q = \{B : B \subset Y \quad , \quad |B| = q\}$$

es una clase de estrategias completa para el jugador II, por lo que para resolverlo basta resolver el juego (X, Q, M).

Ahora este juego (X, Y, M) es un caso particular del juego general finito (JGF) donde

$$\begin{aligned} f(p, q, r) &= h(p) \quad \text{si} \quad r = 0 \\ f(p, q, r) &= 0 \quad\quad \text{si} \quad r > 0 \end{aligned}$$

El juego auxiliar (H, K, g) asociado a (X, Q, M) que se utiliza en el Teorema 2.1 tiene el conjunto K unitario $K = \{q\}$ y la función g está dada por

$$\begin{aligned} g(p, q) &= \sum_r f(p, q, r) \binom{q}{r} \binom{N-q}{p-r} \bigg/ \binom{N}{p} = \\ &= f(p, q, 0) \binom{N-q}{p} \bigg/ \binom{N}{p} = \\ &= h(p) \binom{N-q}{p} \bigg/ \binom{N}{p} \quad \text{si } p \leqslant N - q \\ g(p, q) &= 0 \quad \text{si} \quad p > N - q \end{aligned}$$

Al tener K un solo elemento queda reducido el problema de encontrar la solución de (H, K, g) al de encontrar p_0 de modo que

$$g(p_0, q) = \max_p g(p, q)$$

o sea

$$h(p_0)\binom{N-q}{p_0}\Big/\binom{N}{p_0} = \max_p h(p)\binom{N-q}{p}\Big/\binom{N}{p}$$

Teorema 7.1

En el juego JA las estrategias óptimas ζ^*, η^* están definidas por

$$\zeta^*(A) = \begin{cases} \dfrac{1}{\binom{N}{p_0}} & \text{si} \quad |A| = p_0 \\ 0 & \text{si} \quad |A| \neq p_0 \end{cases}$$

$$\eta^*(B) = \begin{cases} \dfrac{1}{\binom{N}{q}} & \text{si} \quad |B| = q \\ 0 & \text{si} \quad |B| \neq q \end{cases}$$

y el valor del juego es

$$v = h(p_0)\binom{N-q}{p_0}\Big/\binom{N}{p_0}$$

donde p_0 satisface la relación anterior.

Demostración

Es una consecuencia de las consideraciones previas al enunciado del Teorema. # #

Juego del avaro (*GG*). En el juego del avaro (GG) el conjunto X de las estrategias del jugador I está formado por todos los subconjuntos de L, $X = \mathbb{P}(L)$ y el conjunto Y de las estrategias del jugador II está formado por todos los subconjuntos de L de cardinal $\leqslant q$.

La función de pago de este juego viene dada por

$$M(A, B) = |A| < A, B >$$

Este juego es, por tanto, el caso particular del JA en que $h(p) = p$.

Para resolver este juego, según lo visto en el estudio del JA, hay que determinar p_0 de modo que

$$p_0 \binom{N-q}{p_0} \Big/ \binom{N}{p_0} = \max_p g(p)$$

donde

$$g(p) = p\binom{N-q}{p} \Big/ \binom{N}{p} = p \; \frac{(N-q)(N-q-1)\cdots(N-q-p+1)}{N(N-1)\cdots(N-p+1)}$$

Teniendo en cuenta el valor del cociente

$$\frac{g(p)}{g(p-1)} = \frac{p(N-q-p+1)}{(p-1)(N-p+1)} = 1 + \frac{N+1-p(q+1)}{(p-1)(N-p+1)} =$$

$$= 1 + \frac{q+1}{(p-1)(N-p+1)}\left(\frac{N+1}{q+1} - p\right)$$

resulta que

$$p < \frac{N+1}{q+1} \Rightarrow g(p-1) < g(p)$$

$$p = \frac{N+1}{q+1} \Rightarrow g(p-1) = g(p)$$

$$p > \frac{N+1}{q+1} \Rightarrow g(p-1) > g(p)$$

Así pues, con

$$p_0 = \left[\frac{N+1}{q+1}\right]$$

se obtiene el valor máximo buscado

$$g(p_0) = p_0\binom{N-q}{p_0} \Big/ \binom{N}{p_0}$$

que es el valor del juego GG.

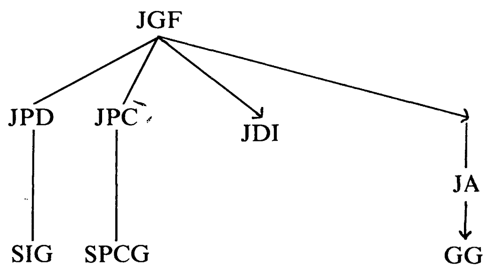
En el caso en que el cociente

$$\frac{N+1}{q+1} = p_0 \geqslant 2$$

sea un entero el máximo se alcanza en $p_0 - 1$ y p_0 ya que valdrá

$$g(p_0 - 1) = g(p_0)$$

Terminaremos mostrando en un esquema la relación de inclusión que existe entre los juegos que hemos tratado.



BIBLIOGRAFIA

ANDERSON, E. J. (1981): «Mazes: Search games on unknown networks», *Networks*, 11.

GAL, S. (1980): «Search games», *Mathematics in Science and Engineering*, 149, Academic Press, Inc.

OWEN, G. (1968): *Game Theory*, W. B. Saunders Company.

PRADHAN, B. K. (1982): «Solution of finite two-person games when it is not solved by relation of dominance», *Math. Educ., Sect.*, A 16.

RUCKLE, W.; FENNEL, R.; HOLMES, P. T., y FENNEMORE, C. (1976): «Ambushing random walks I: Finite models», *Opns. Res.*, 24.

RUCKLE, W. (1980): «On the constructability of solution to a pair of two person search games», *Int. J. of Game Theory*, 8.

RUCKLE, W. (1983): *Geometric games and their applications*, Pitman Advanced Publishing Program.

ZOROA ALONSO, N. (1986): «Contribuciones a la teoría de los juegos geométricos». Tesis. Universidad de Murcia.