TRABAJOS DE INVESTIGACION OPERATIVA
Vol. 3. Núm. 1, 1988 pp. 43 a 54

TRANSFORMACION DE PRINCIPIOS DE CONSISTENCIA ALEATORIOS EN DETERMINISTICOS

MIGUEL SÁNCHEZ
Estad. e I.O. Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad de La Laguna. Tenerife

ANTONIO PÉREZ
Estad. e I.O. Facultad de Ciencias
Universidad de Zaragoza

M.ª JOSEFA DOMENCH
Economía Aplicada. Facultad de Empresariales
Universidad de Zaragoza

RESUMEN

En la Teoría de la Decisión en Grupo, cuando los expertos emiten su información sobre los objetos de una manera probabilística, se pueden construir Principios de Consistencia que satisfagan los cinco axiomas de racionalidad y no sean dictatoriales [ver Sánchez-Pérez-Domench (1986)].

Partiendo de esta situación, en el presente artículo se analizan y proponen diferentes métodos y algoritmos para transformar relaciones sociales aleatorias en determinísticas, continuando y completando así investigaciones anteriores.

Palabras clave: elección en grupo, matrices aleatorias, principios de consistencia, algoritmos.

Clasificación AMS 1980: 90A07, 15A51, 90A08, 90A99.

SUMMARY

Title: Transformation of stochastics consistency principles in deterministics

In Theory of Group Choice, when the information expressed by experts is stated in probabilistics terms, it is possible to build consistency principles that

Revisado: Diciembre 1987.

satisfy the five rationality axioms and they are not dictatorial [see Sánchez-Pérez-Domench (1986)].

Starting from this situation, several methods and algorithms are analysed and proposed for the transformation of social relations stochastics in deterministics, going on and completing in this way previous researchs.

Key words: group choice, stochastic matrices, consistency principles, algorithms.

1980 *AMS classification*: 90A07, 15A51, 90A08, 90A99.

1. INTRODUCCION

El problema central de la Teoría de Decisión en Grupo radica en construir un Principio de Consistencia (PC) o Regla de Decisión en Grupo que asocie a cada m-tupla $(R_1, R_2, ..., R_m)$ de relaciones, dadas por los m expertos o miembros del grupo $\mathcal{G} = \{G_1, G_2, ..., G_m\}$ sobre el conjunto $\mathcal{O} = \{O_1, O_2, ..., O_n\}$ de objetos, una relación de Grupo R, a partir de la cual se decida el orden final global entre los objetos de $\mathcal{O}$. Se supone, obviamente, que la Relación Individual R_i, suministrada por el experto $\mathcal{G}_i$ recoge las preferencias ordinales de dicho experto sobre el conjunto de objetos $\mathcal{O}$.

El Teorema de Imposibilidad de ARROW [ver Mirkin (1979), Domench (1986)] afirma que no existe ningún PC que verifique los cinco axiomas de racionalidad (Universalidad del Conjunto de Relaciones, Independencia de Alternativas Irrelevantes, Monotonía, Condición de No Imposición de la Decisión de Grupo y Principio de Pareto) cuando se exige además que la Relación de Grupo R sea transitiva.

En Domench (1986) y Sánchez-Pérez-Domench (1986) se muestra la existencia y construcción de PC que satisfacen los axiomas de imposibilidad de ARROW cuando los expertos emiten su información de manera probabilística sobre el espacio de posibles relaciones.

Teniendo en cuenta estos resultados, en el presente trabajo se exponen y analizan diferentes métodos y algoritmos para transformar relaciones sociales aleatorias en relaciones determinísticas. Estos métodos se pueden englobar en dos grupos diferentes: el grupo primero con los dos métodos del parágrafo 3, y el segundo con los tres métodos del parágrafo 4.

La matriz básica para construir los dos primeros métodos es $T_1(P)$, cuyo elemento ij-ésimo representa la probabilidad de que el elemento O_i ocupe la posición j-ésima dentro de la decisión de grupo determinada por la relación aleatoria. Ambos métodos se establecen en base al significado de la matriz $T_1(P)$.

Los tres métodos del segundo grupo han sido diseñados en función de una matriz $T(P)$, cuyo elemento ij-ésimo representa la esperanza matemática de una variable aleatoria $\alpha_{ij}(\omega)$ que, a su vez, pretende medir las preferencias de O_i sobre O_j en la ordenación representada por ω. El método de las permutaciones se basa en una idea utilizada por Marcotorchino-Michaud (1979) para obtener una regla de decisión de grupo determinística, cuando los decisores establecen sus preferencias por comparación de pares de objetos. El método de las matrices positivas se basa en el utilizado por Berge (1973) en una aplicación del problema del camino de longitud extrema en un grafo, para determinar el «índice de poder de un jugador dentro de un torneo». Finalmente, el método de los umbrales ha sido especialmente construido para el objetivo propuesto en este artículo.

2. TERMINOLOGIA Y CONCEPTUALIZACION

Se denota por

$$\mathbf{\Omega} = (\omega/\omega \text{ es un orden estricto sobre los elementos del conjunto } \mathcal{O}\} = \\ = \{\omega = (O_{i(1)} > O_{i(2)} > \cdots > O_{i(n)})/\{i(1), i(2), ..., i(n)\} \text{ es una permutación de } \{1, 2, ..., n\}\}$$

y como σ-álgebra sobre $\mathbf{\Omega}$ se toma el conjunto de las partes de $\mathbf{\Omega}$, $\mathbb{Q} = P(\mathfrak{Z})$.

Se supone que la relación de grupo es aleatoria y viene dada por una probabilidad P, definida sobre el espacio probabilístico $(\Omega, \mathbb{Q})$.

El objetivo del presente artículo consiste en construir, partiendo de la probabilidad P que se supone conocida, una relación de grupo R que sea reflexiva y transitiva.

2.1. Se definen sobre $\mathbf{\Omega}$, n funciones $f_1, f_2, ..., f_n$ de la manera siguiente

$$f_j(\omega) = f_j(O_{i(1)} > O_{i(2)} > \cdots > O_{i(n)}) = O_{i(j)} \qquad \forall j = 1, 2, ..., n$$

es decir, la función f_i, $\forall j$, asocia al elemento $\omega \in \mathbf{\Omega}$ el objeto $O_{i(j)}$ que ocupa el lugar j-ésimo en el orden estricto ω. Sean

$$\begin{aligned} {}^1\Omega_{ij} &= \{\omega \in \Omega / \text{ el elemento que ocupa el lugar } j\text{-ésimo en } \omega \\ &\qquad \text{es } O_i\} = \{\omega \in \Omega / f_j(\omega) = O_i\} \\ {}^1p_{ij} &= P({}^1\Omega_{ij}) = \sum_{\omega \in {}^1\Omega_{ij}} P(\omega) \end{aligned}$$

y, la matriz $n \times n$

$$T_1(P) = ({}^1p_{ij})$$

donde

$$i = 1, 2, ..., n \quad ; \quad j = 1, 2, ..., n$$

Puesto que tanto $({}^1\Omega_{i1}, {}^1\Omega_{i2}, ..., {}^1\Omega_{in})$ como $({}^1\Omega_{1j}, {}^1\Omega_{2j}, ..., {}^1\Omega_{nj})$ son particiones del conjunto Ω, resulta que la matriz $T_1(P)$ es doblemente estocástica:

$$\Sigma_i {}^1p_{ij} = 1 = \Sigma_j {}^1p_{ij} \qquad \forall j, \forall i$$

Esta matriz va a ser básica para la construcción de la relación R del método 1 que se propone en el parágrafo 3.

2.2. Sean ahora

$$\begin{aligned} {}^2\Omega_{ij} &= \{\omega \in \Omega / \text{en } \omega, O_i \text{ va delante de } O_j\} \\ {}^2p_{ij} &= P({}^2\Omega_{ij}) = \sum_{\omega \in {}^2\Omega_{ij}} P(\omega) \end{aligned}$$

y, la matriz $n \times n$,

$$T_2(P) = ({}^2p_{ij})$$

donde

$$i = 1, 2, ..., n \quad ; \quad j = 1, 2, ..., n$$

2.3. Y sean

$$\alpha_{ij}(\omega) = \begin{cases} k \text{ si en } \omega,\ O_i \text{ va } k \text{ lugares delante de } O_j \\ 0 \text{ si en } \omega,\ O_i \text{ no va delante de } O_j \end{cases}$$

$$^3p_{ij} = \Sigma_{\omega\in\Omega}\, \alpha_{ij}(\omega)\, P(\omega)$$

y, la matriz $n \times n$,

$$T_3(P) = (^3p_{ij})$$

donde

$$i = 1, 2, ..., n \quad ; \quad j = 1, 2, ..., n$$

Es inmediato que si, en este último caso, se definiese la función $\alpha_{ij}(\omega)$ de un modo diferente, aunque consistente con el orden, se obtendría una metodología general para la construcción de la relación R.

Obsérvese, además, que si

$$\alpha_{ij}(\omega) = \begin{cases} 1 \text{ si en } \omega,\ O_i \text{ va delante de } O_j \\ 0 \text{ si en } \omega,\ O_i \text{ no va delante de } O_j \end{cases}$$

entonces, se tiene que

$$^2p_{ij} = P(^2\Omega_{ij}) = \sum_{\omega\in {}^2\Omega_{ij}} P(\omega) = \Sigma_{\omega\in\Omega}\, \alpha_{ij}(\omega)\, P(\omega) = {}^3p_{ij}$$

y como consecuencia, coincidirán con otra abstracta las metodologías que construyan la relación R a partir de las matrices $T_2(P)$ y $T_3(P)$ de los casos **2.2** y **2.3**, respectivamente. Esta metodología abstracta coincide a su vez con la que construye la relación R a partir de la matriz $T(P)$ del siguiente apartado:

2.4. Finalmente, se puede también definir

$$\forall\, i \neq j \qquad \alpha_{ij}(\omega) = \begin{cases} -k \text{ si en } \omega,\ O_j \text{ va } k \text{ lugares delante de } O_i \\ \ \ k \text{ si en } \omega,\ O_i \text{ va } k \text{ lugares delante de } O_j \end{cases}$$

y en este caso, la matriz cuadrada correspondiente es

$$T(P) = (p_{ij})$$

donde

$$i = 1, 2, ..., n \quad ; \quad j = 1, 2, ..., n$$

siendo

$$p_{ij} = \Sigma_{\omega \in \Omega} \alpha_{ij}(\omega) P(\omega), \ \forall i \neq j \quad ; \quad p_{ii} = 0 \ \forall i$$

Obsérvese que ahora $T(P)$ resulta una matriz antisimétrica:

$$p_{ij} = -p_{ji} \quad \forall i, \forall j$$

3. CONSTRUCCION DE R A PARTIR DE LA MATRIZ $T_1(P)$

3.1. Método 1

La idea fundamental de este primer método se basa en la definición de una aplicación g del conjunto $\mathcal{O}$ de objetos en el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales

$$g: \mathcal{O} \to \mathbb{R}$$

para, a partir de dicha función, construir la relación de grupo R_g, de forma general, como sigue:

$$(O_i, O_j) \in R_g \Leftrightarrow g(O_i) \geqslant g(O_j)$$

En realidad, no se va a definir aquí una única función g, ya que ésta va a depender de la matriz $T_1(P)$ y de un vector paramétrico $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ al cual, por otro lado, se va a exigir que verifique la siguiente condición:

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_n \geqslant 0$$

Bajo esta última hipótesis, se puede definir $g \equiv g_\alpha$ como sigue

$$g_\alpha(O_i) = \Sigma_1^n \alpha_j \, {}^1p_{ij} = \Sigma_j \alpha_j P({}^1\Omega_{ij})$$

de modo que las siguientes propiedades de R_α (donde $R_\alpha \equiv R_g$, $g \equiv g_\alpha$) son inmediatas:

$R.1)$ $\forall \alpha$, R_α es un orden débil y, en consecuencia, es una relación reflexiva y transitiva.

$R.2)$ Si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ forman una progresión aritmética, entonces R_α permanece inalterable.

Con este procedimiento se obtienen relaciones determinísticas que son reflexivas y transitivas, consiguiéndose así el objetivo buscado.

3.2. Método 2

Sea $\pi = \{i(1), i(2), \ldots, i(n)\}$ una permutación arbitraria de $\{1, 2, \ldots, n\}$ y $\alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_n \geqslant 0$ números reales.

Asociada con la permutación π y con el vector $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, se define la siguiente función objetivo:

$$F_1[\alpha, \pi] = \Sigma_j \alpha_j [\Sigma_{t \leqslant j} \, {}^1p_{i(j)t} + \Sigma_{t \leqslant j-1} \, {}^1p_{i(t)j}]$$

La relación R_α, para α fijo, que se construye mediante este método es la correspondiente a la permutación $\pi_0 = \{i^0(1), i^0(2), \ldots, i^0(n)\}$ que maximiza la función objetivo F_1; es decir,

$$(O_i, O_j) \in R_\alpha \Leftrightarrow i = i^0(t),\ j = i^0(s) \quad \text{con} \quad t \leqslant s$$

siendo, además, π_0 tal que

$$F_1[\alpha, \pi_0] \geqslant F_1[\alpha, \pi]$$

para toda $\pi = \{i(1), i(2), \ldots, i(n)\}$ permutación del conjunto de índices $\{1, 2, \ldots, n\}$.

La relación determinística R_α obtenida con este segundo método es trivialmente reflexiva y transitiva.

Observación

La función objetivo del método 2 se puede sustituir por

$$F_2[\alpha, \pi] = \Sigma_j\{\alpha_j[\Sigma_{t \leq n+1-j}\, {}^1p_{i(t)t+1-j} + \Sigma_{t \leq n+1-j}\, {}^1p_{i(t+1-j)t}] - \alpha_1\, {}^1p_{i(j)j}\}$$

y construir la relación R_α, para α fijo, a partir de la permutación π_0 que maximice esta nueva función.

Es inmediato que, una vez fijado α, se verifica $F_2[\alpha,\pi] \geqslant F_1[\alpha,\pi]$ $\forall\, \pi$, aunque se adapta mejor al objetivo del problema F_1 que F_2.

Por otro lado, con el método 1 se obtiene una permutación $\pi = \{i(1), i(2), ..., i(n)\}$ del conjunto de índices $\{1, 2, ..., n\}$ tal que $g[O_{i(t)}] \leqslant g[O_{i(s)}]$ $\forall\, t < s$, es decir, cuyo vector $(g[O_{i(1)}, ..., g[O_{i(n)}])$ *es el* lexicográficamente mayor. Además, se tiene que

$$\Sigma_t g[O_{i(t)}] = \Sigma_t \Sigma_j \alpha_j\, {}^1p_{i(t)j} = \Sigma_j \alpha_j \Sigma_t\, {}^1p_{i(t)j} \geqslant F_1[\alpha, \pi] \;\forall\, \pi$$

4. CONSTRUCCION DE *R* A PARTIR DE LA MATRIZ *T*(*P*)

Cada elmento p_{ij} de la matriz $T(P)$ se calcula por la fórmula siguiente

$$p_{ij} = \Sigma_{\omega \in \Omega}\, \alpha_{ij}(\omega)\, P(\omega)$$

donde $\alpha_{ij}(\omega)$ es una cualquiera de las funciones definidas en el parágrafo 2, apartados 2.3 y 2.4.

4.1. Método 1 (Método de las Permutaciones)

El objetivo consiste en hallar una permutación $\pi_0 = \{i^0(1), i^0(2), ..., i^0(n)\}$ que maximice la siguiente función objetivo:

$$F[\pi] = F[\{i(1), i(2), ..., i(n)\}] = \Sigma_{j \geq 2}\, \Sigma_{t \leq j-1}\, [p_{i(t)\, i(j)} - p_{i(j)\, i(t)}]$$

El algoritmo heurístico que se propone a continuación proporciona una buena solución al problema anterior:

Algoritmo de las Permutaciones

Se denota por

$$^{A}p_{jk} = p_{jk} \qquad \forall j, k$$

Paso 1: Colocar $j = 1,\ s = n$.

Paso 2: Calcular el índice $j(0), j \leqslant j(0) \leqslant s$, que maximice la función $\Sigma_{k \geq j}[p_{jk} - p_{kj}]$.

Paso 3: Realizar las siguientes transformaciones:

- para $k = 1, 2, ..., n$ y $j \leqslant r < j(0)$, se coloca $^{N}p_{jk} = {}^{A}p_{j(0)k}$ y $^{N}p_{r+1k} = {}^{A}p_{rk}$; además, $^{N}p_{r'k} = {}^{A}p_{r'k}$ si $r' > j(0)$ y $^{N}p_{r'k} = {}^{A}p_{r'k}$ si $r' < j$
- para $k = 1, 2, ..., n$ y $1 \leqslant r \leqslant n$ se coloca $^{A}p_{kr} = {}^{N}p_{kr}$
- para $k = 1, 2, ..., n$ y $j \leqslant r < j(0)$ se coloca $^{N}p_{kj} = {}^{A}p_{kj(0)}$ y $^{N}p_{kr+1} = {}^{A}p_{kr}$; además, se pone $^{N}p_{kr'} = {}^{A}p_{kr'}$ si $r' > j(0)$ y se coloca $^{N}p_{r'k} = {}^{A}p_{r'k}$ si $r' < j$
- finalmente, para $k = 1, 2, ..., n$ y $1 \leqslant r \leqslant n$ se coloca $^{A}p_{kr} = {}^{N}p_{kr}$.

Paso 4:

- si $j < n$ se coloca $i(j) = j(0)$, $j = j + 1$ y se vuelve al Paso 2.
- si $j = n$, el algoritmo acaba.

Una vez finalizado el algoritmo, la permutación buscada viene dada por $\pi_0 = \{i(1), i(2), ..., i(n)\}$, que es una solución aproximada para el problema de maximización de la función F.

Ahora, basta definir R de modo que

$$(O_i, O_j) \in R \Leftrightarrow i = i(t),\ j = i(s) \quad \text{con} \quad t \leqslant s$$

para que la relación determinística R satisfaga las condiciones exigidas a toda relación de grupo.

Observación

El significado del Paso 3, en el algoritmo anterior, es el siguiente:

1.º La fila $j(0)$ se lleva al lugar j.

2.º Las filas que van desde la j hasta la $j(0) - 1$, se deslizan un lugar; es decir, la fila j pasa a ser la $j + 1$, hasta la fila $j(0) - 1$ que pasa a ser la $j(0)$.

3.º Las filas anteriores a la j y las posteriores a la $j(0)$, no se alteran.

En la matriz que se obtiene después de efectuar estos cambios, se vuelven a realizar los siguientes:

4.º La columna $j(0)$ se lleva al lugar de la columna j.

5.º Las columnas que van desde la j hasta la $j(0) - 1$ se deslizan un lugar hacia adelante.

6.º Las columnas anteriores a la j y las posteriores a la $j(0)$, no se alteran.

4.2. **Método 2** (Método de las Matrices Positivas)

Nótese, previamente, que si se suma una cantidad constante a las funciones $\alpha_{ij}(\omega)$ resulta que las matrices correspondientes $T(P)$ aparecen también transformadas por la suma de otra cantidad constante, lo que no afecta de manera esencial a dicha matriz. En consecuencia, sin pérdida de generalidad, se puede suponer que

$$\alpha_{ij}(\omega) > 0 \qquad \forall\, i, j \text{ y } \forall\, \omega$$

Bajo la hipótesis anterior, es inmediato que la matriz $T(P)$ tiene todos sus elementos positivos y, por el teorema de PERRON [ver Gantmacher (1965)], existe un vector propio $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ asociado con el valor propio de máximo valor absoluto de la matriz $T(P)$, de modo que λ tiene todas sus componentes positivas.

Ahora, se puede definir la función

$$g\colon \mathcal{O} \to \mathbb{R} \text{ de modo que } g(O_i) = \lambda_i \ \forall\, i = 1, 2, ..., n$$

y utilizar esta función para construir un orden débil R_g sobre el conjunto $\mathcal{O}$ de objetos:

$$(O_i, O_j) \in R_g \Leftrightarrow g(O_i) \geqslant g(O_j)$$

en consecuencia, R_g es reflexiva y transitiva, además de determinística.

4.3. **Método 3** (Método de los Umbrales)

Se entiende por *umbral U* cualquier número real utilizado como cota inferior.

Para cada umbral U_1 se construye la siguiente relación

$$R(U_1) = \{(O_i, O_j)/p_{ij} - p_{ji} \geqslant U_1\}$$

Suponiendo que $\forall i$, $\forall j$ es $p_{ij} \geqslant 0$, resulta inmediato que

- si $U_1 > \text{máx}\,\{p_{ij}\}$ entonces se tiene que $R(U_1) = \varnothing$
- si $U_1 < \text{mín}\,\{-p_{ij}\}$ entonces se tiene que $R(U_1) = \mathcal{O} \times \mathcal{O}$.

Puesto que ambas relaciones son transitivas, se puede afirmar que existen valores de U_1 para los cuales la relación $R(U_1)$ es también transitiva.

Obsérvese que si $U_1^* = \text{máx}\,\{p_{ij}\}$, tiene sentido considerar la relación $R(U_1)$ para cualquier valor de U_1 comprendido entre $-U_1^*$ y U_1^*.

Por otro lado, es evidente que si $U_1^0 < U_1^1$, entonces $R(U_1^0) \supset R(U_1^1)$; en este sentido, se puede afirmar que la relación R es decreciente.

Así pues, el problema a resolver consiste en determinar el máximo del conjunto $\mathcal{V}$ siguiente

$$\mathcal{V} = \{U/-U_1^* \leqslant U \leqslant U_1^* \text{ y } R(U) \text{ es una relación transitiva y completa}\}$$

donde por completa se entiende que

$$\forall\, O_i, O_j \text{ se verifica o bien que } (O_i, O_j) \in R(U)$$
$$\text{o bien que } (O_j, O_i) \in R(U)$$

Es inmediato que el problema anterior tiene siempre solución; en consecuencia, puesto que cada elemento U del conjunto $\mathcal{V}$ proporciona una relación $R(U)$ transitiva y completa, en particular el máximo de dicho conjunto proporciona también una tal relación que sirve, pues, como solución al objetivo propuesto de encontrar una relación determinística, reflexiva y transitiva.

AGRADECIMIENTOS

Se agradecen las oportunas sugerencias, realizadas por dos referees anónimos, que han contribuido a la mejora de este trabajo.

REFERENCIAS

ARROW, K. (1974): *Elección Social y Valores Individuales*, Instituto de Estudios Fiscales, Ministerio de Hacienda, Madrid.

BERGE, C. (1973): *Graphs and Hipergraphs*, North-Holland.

DOMENCH, M. J. (1986): *Cuestiones Notables en Teoría de Decisión en Grupo*, Tesis Doctoral, Universidad de La Laguna, Tenerife.

FISHBURN, P. C. (1972): *The Theory of Social Choice*, Princenton University Press.

GANTMACHER, F. R. (1965): *The Theory of Matrices*, Chelsea Publishing Company (vol. II).

MARCOTORCHINO-MICHAUD (1979): *Optimisation en Analyse Ordinale des Données*, Mason.

MIRKIN, B. G. (1979): *Group Choice*, editado por FISHBURN, P. C. (Winston and Sons. John Wiley and Sons).

SANCHEZ, M.; PEREZ, A.; DOMENCH, M. J. (1986): *Principios de Consistencia en Modelos Aleatorios*, Actas XVI Reunión Nacional de la SEIO, Málaga (pendiente de publicación).

SEN, A. K. (1970): *Collective Choice and Social Welfare*, Oliver and Boyd. Holden-Day, Inc.