TRABAJOS DE INVESTIGACION OPERATIVA
Vol. 3. Núm. 1, 1988 pp. 29 a 42

DUALIDAD EN LA PROGRAMACION LINEAL EN SUBCONJUNTOS DIFUSOS

J. Llena Sitjes
Escuela Univ. de Ing. Téc. Ind. de Bilbao

RESUMEN

La programación lineal sobre subconjuntos difusos, problema definido por Zimmermann, se desarrolla en estrecha relación con la definición de las pertinentes funciones de pertenencia. Se estudia la dualidad difusa, ligada a la dualidad en los problemas de programación lineal con multicriterios.

Palabras clave: dualidad, subconjuntos difusos, programación con multicriterios, programación difusa.

ASM clasificación matemática: 90C05, 54A40, 90C31.

ABSTRACT

Linear programming, defined by Zimmermann, is presented in connection with membership functions. Fuzzy duality, similar to duality in multiobjective programming problems, is stated.

INTRODUCCION

En la vida humana son comunes expresiones tales como «beneficios satisfactorios», «calidad aceptable», «ventas prometedoras», que escapan al ámbito determinista considerado tradicionalmente por las matemáticas en una concepción idealizada de la realidad. De igual manera

Revisado: Junio 1986.

eluden la teoría de la probabilidad por estar basadas en sentimientos y preferencias personales sobre las que no es posible definir un espacio de probabilidad. En teoría de la decisión se han propuesto diversos métodos, «Programación por objetivos», «Funciones de utilidad», entre otros, tratando de manejar dichas expresiones. Métodos que en muchos casos no se adaptan a la realidad y que en otros muchos son deficientes desde el punto de vista de cálculo numérico cuando se trata de problemas de tamaño considerable.

Una herramienta para manejar dichos conceptos fue proporcionada por Zadeh con la introducción de los subconjuntos difusos.

En una decisión difusa las funciones objetivo y/o las restricciones no son «rígidas» sino subconjuntos difusos caracterizados por su función de pertenencia. La función de pertenencia de la intersección de subconjuntos difusos es el mínimo de las respectivas funciones de pertenencia siendo la decisión a tomar, aquella que maximice dicha función. Es posible así mismo considerar el operador producto en la intersección de subconjuntos difusos, el cual carece de alguna de las propiedades que posee el mín que lo hace preferible.

PROGRAMACION LINEAL EN SUBCONJUNTOS DIFUSOS

Zimmerman define un problema de programación lineal en subconjuntos difusos (PLD) como un problema del tipo:

$$\begin{aligned} \max\ & Z \simeq CX \\ \text{s. a}\ \ & AX \simeq B \\ & X \geqslant 0 \end{aligned}$$

en el que la(s) función(es) objetivo y/o las restricciones no son «rígidas» sino subconjuntos de difusos caracterizados por su función de pertenencia (fp). Siguiendo a Zimmermann se supondrá que para todas las funciones objetivo están determinados unos niveles b' a los que se «aspira». Si A' es la matriz (C/A) y B' el(los) nivel(es) a los que se aspira en la(s) función(es) objetivo, el problema se plantea:

$$A'X \simeq B_1$$

donde $B_1 = (B'/B)$.

Si $f_i[(A'X)_i]$ designa la *fp* de la *i*-ésima fila de la matriz ampliada, la *fp* de la decisión es:

$$f_d(X) = \underset{i}{mín}\,\{f_i[(A'X)_i]\}$$

y la decisión óptima es aquélla que proporciona el

$$\underset{x}{\text{máx}}\, f_d(X) = \underset{x}{\text{máx}}\ \underset{i}{\text{mín}}\ \{f_i[(A'X)_i]\}$$

El que éste problema sea nuevamente lineal depende de la *fp*. Zimmermann propone para funciones objetivo y restricciones del tipo

$$\sum a_{ij} \leqslant b'_i$$

funciones lineales a trozo

$$f_i[(A'X)_i] = \begin{cases} 1 & \text{si } (A'X)_i \leqslant b'_i \\ 1 - \dfrac{[(A'X)_i - b'_i]}{p_i} & \text{si } b'_i < (A'X)_i \leqslant b'_i + p'_i \\ 0 & \text{si } (A'X)_i > b'_i + p'_i \end{cases}$$

con p'_i constantes arbitrarias mayores que cero llamadas «niveles de proximidad»

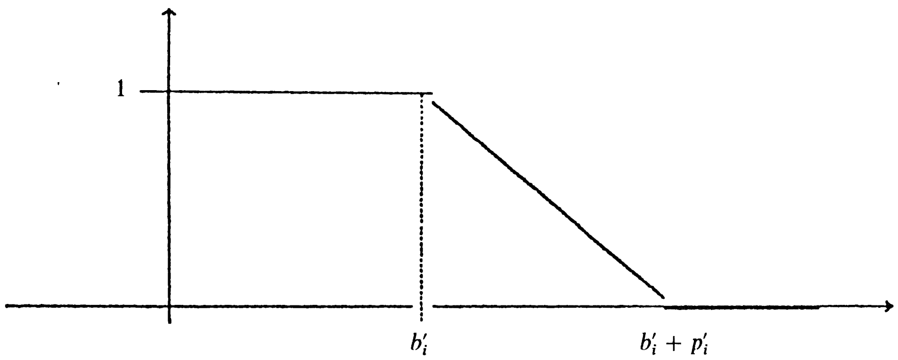

Fig. 1

Bajo las anteriores condiciones el PLD es equivalente al problema de programación lineal clásico (PL).

$$\begin{aligned} &\max \lambda \\ &\text{s. a } \; \lambda p'_i + (A'X)_i \leqslant b'_i + p'_i \\ &\qquad \lambda, X \geqslant 0 \end{aligned} \qquad [1]$$

donde $\lambda = \min_i \{f_i[(A'X)_i]\}$.

A esta formulación dada por Zimmermann debe adjuntarse la restricción $\lambda \leqslant 1$ por ser $f_i(X) \leqslant 1$.

Sin embargo y puesto que se desea «aproximar» el óptimo de cada función objetivo, parece lógico considerar las anteriores fp, en el caso en que las funciones objetivo sean a minimizar, considerando para el caso de maximización las fp.

$$f_i[(A'X)_i] = \begin{cases} 0 & \text{si } (A'X)_i \leqslant b'_i - p'_i \\ 1 + \dfrac{[(A'X)_i - b'_i]}{p_i} & \text{si } b'_i - p'_i < (A'X)_i \leqslant b'_i \\ 1 & \text{si } (A'X)_i > b'_i \end{cases}$$

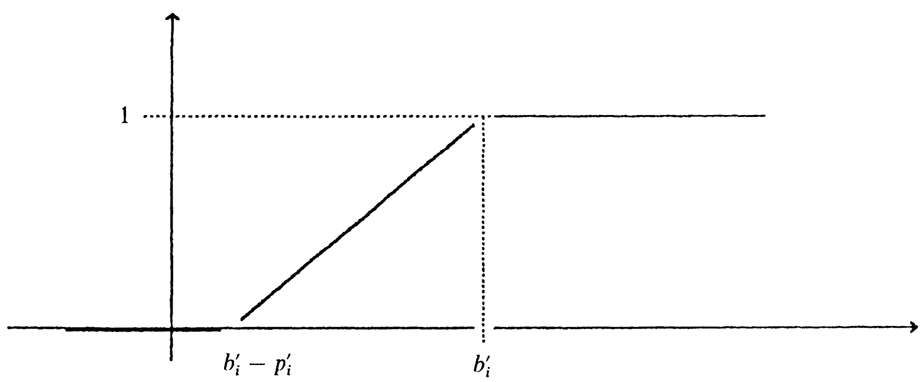

Fig. 2

Con lo cual se consigue una perfecta simetría, al igual que en PL. El problema equivalente es entonces, en forma matricial

$$
\begin{aligned}
&\max \lambda \\
&\text{s. a } \ (A', P)\begin{pmatrix} X \\ \lambda \end{pmatrix} \leqslant P - B_1 \\
&\lambda \leqslant 1 \\
&X, \lambda \geqslant 0
\end{aligned}
\qquad [2]
$$

donde P es un vector columna formado por niveles de proximidad p_i', y B_1 es el vector columna formado por los niveles a los que se aspira. *A* [2] se llamará primera forma equivalente del PLD.

En caso de que hubieran restricciones difusas de igualdad, dado que cada una equivale a dos restricciones de desigualdad,combinando las dos *fp* dadas, obtenemos la *fp*

$$
f_i[(A'X)_i] = \begin{cases}
0 & \text{si } (A'X)_i \leqslant b_i' \\
1 + \dfrac{[(A'X)_i - b_i']}{p_i} & \text{si } b_i' - p_i' < (A'X)_i \leqslant b_i' \\
1 - \dfrac{[(A'X)_i - b_i']}{p_i} & \text{si } b_i' < (A'X)_i \leqslant b_i' + p_i' \\
0 & \text{si } (A'X)_i > b_i' + p_i'
\end{cases}
$$

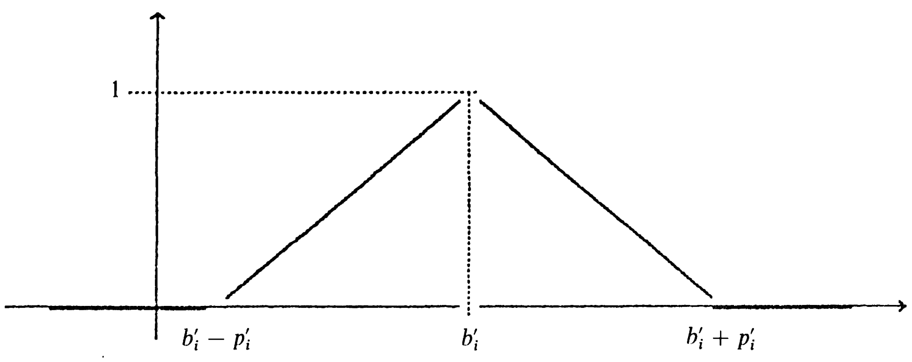

Fig. 3

Asímismo, se pueden considerar otras *fp*. Si se toma

$$f_i[(A'X)_i] = \exp\{-p_i'|(A'X)_i - b_i'|\}$$

o bien

$$f_i[(A'X)_i] = \{1 + p_i'[(A'X)_i - b_i']^2\}^{-1}$$

se obtiene [8] tras fáciles transformaciones el PL, que se llamará segunda forma equivalente

$$\begin{aligned} &\min \lambda \\ &\text{s. a } \lambda \geqslant p_i'[b_i' - (A'X)_i] \\ &\qquad A''X \leqslant B' \\ &\qquad X, \lambda \geqslant 0 \end{aligned} \qquad [3]$$

el cual tiene solución siempre que $p_i' > 0$, y las restricciones rígidas $A''X \leqslant B'$ tengan soluciones factibles. Para los mismos niveles de proximidad el vector X solución de [3] coincide con él de [2].

Si se considera L-subconjuntos difusos con $L = [0, \infty)$ *al tomar las fp*

$$f_i = [(A'X)_i] = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad (A'X)_i \leqslant b_i' - p_i' \\ 1 + \dfrac{[(A'X)_i - b_i']}{p_i} & \text{si} \quad b_i' - p_i' < (A'X)_i \end{cases}$$

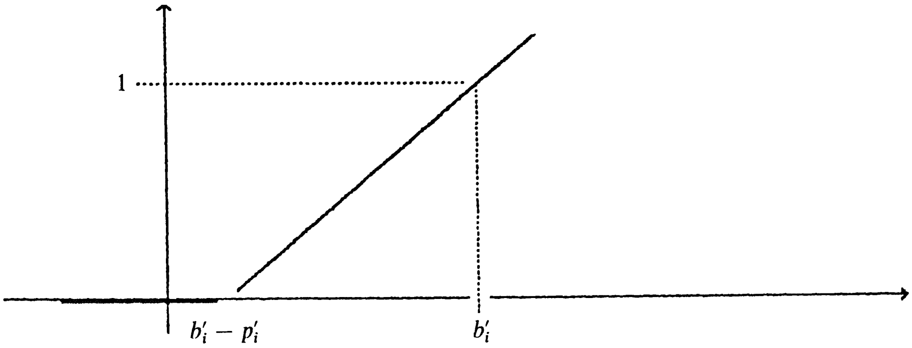

Fig. 4

se obtiene lo que se llamará tercera forma equivalente, la cual es idéntica a la primera exceptuando de ella la restricción $\lambda \leqslant 1$.

Se demuestra [8] que en las anteriores formas equivalentes el vector X solución de ellas, permanece invariable al tomar niveles de proximidad homotéticos kP con razón de homotecia $k > 0$.

DUALIDAD EL PLD

Sean C, A y R matrices de órdenes apropiados, s y t vectores de pesos $\geqslant 0$, tales que $\sum s_i = \sum t_i = 1$.

Sea $\overline{ef}$ el problema de obtener un vector eficiente maximal.

Sea $\underline{ef}$ el problema de obtener un vector eficiente minimal.

Kornbluth define el primal de un PL con multicriterios como

$$\begin{aligned} &\overline{ef}\ CX \\ &\text{s. a } AX \leqslant Rt \\ &X \geqslant 0 \end{aligned} \tag{4}$$

y demuestra que dados los psos t, X' es propiamente eficiente para el primal, si y sólo si, existen pesos s y un vector fila de variables duales, tales que U sea propiamente eficiente para el problema

$$\begin{aligned} &\underline{ef}\ UR \\ &\text{s. a } UA \geqslant sC \\ &U \geqslant 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Sea un PLD que contenga restricciones rígidas, la formulación dada por Zimmermann, que se llamará primal difuso, se escribe con $t = 1$, a semejanza de [4]

$$\begin{aligned} &A_1X \lesssim B_1t \\ &A_2X \leqslant B_2t \\ &X \geqslant 0 \end{aligned} \tag{6}$$

Entonces definimos el dual difuso similarmente a [5]

$$\begin{aligned} &UB_2 \gtrsim sB_1 \\ &UA_2 \geqslant sA_1 \\ &s,\ U \geqslant 0 \end{aligned} \qquad [7]$$

con la condición de normalización $sPt = 1$ en lugar de $\sum s_i = \sum t_i = 1$.

Así y para las *fp* que dan lugar a la tercera equivalente, considerando las mismas *fp*, que en el primal difuso

$$f_i[(A_1X)_i] = \frac{(A_1X)_i - (B_1 - P)_i t}{P_i t} \qquad [8]$$

el dual difuso, donde el super-índice indica *j*-ésima columna, es

$$\begin{aligned} &\min_{U,s} \left\{ \max_j f_j[(UB_2)^j] \right\} = \min_{U,s} f(UB_2) \\ &\text{s. a } UA_2 \geqslant sA_1 \\ &sPt = 1 \\ &s,\ U \geqslant 0 \end{aligned}$$

con

$$f_j[(UB_2)^j] = \frac{UB_2^j - s(B_1 - P)^j}{sP^j} \qquad [9]$$

Es decir, en virtud de la condición de normalización

$$\begin{aligned} \min\ & UB_2 - s(B_1 - P) \\ \text{s. a }\ & UA_2 - sA_1 \geqslant 0 \\ & sPt = 1 \\ & s,\ U \geqslant 0 \end{aligned}$$

coincidente con el dual de [2] al eliminar de él la condición $\lambda \leqslant 1$.

Si se consideran las *fp* que dan lugar a la segunda forma equivalente [3] se obtiene el dual difuso

$$\min_{s,\,U} f(UB_2) = \min_{s,\,U} \exp\{-p|UB_2 - sB_1|\} = \max_{s,\,U} |UB_2 - sB_1| =$$

$$= \max_{s,\,U} (sB_1 - UB_2)$$

$$\text{s. a } -UA_2 + sA_1 \leqslant 0$$

$$sPt = 1$$

$$s, U \geqslant 0$$

coincidente con el dual de [3].

EJEMPLO

Sea

$$\max \begin{cases} z_1 = x_1 + x_2 \\ z_2 = x_1 - x_2 \end{cases}$$

$$\text{s. a} \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 4 \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 4 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

se tiene

$$\max z_1 = 8/3 \quad \text{con} \quad x_1 = x_2 = 4/3$$

$$\max z_2 = 2 \quad \text{con} \quad x_1 = 2 \quad \text{y} \quad x_2 = 0$$

$$\text{PRIMAL} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \gtrapprox \begin{pmatrix} 8/3 \\ 2 \end{pmatrix} t$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leqslant \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} t$$

$$t = 1$$

$$x_1, x_2 \geqslant 0$$

Tercera forma equivalente

$$\begin{aligned} &\max \lambda \\ &\text{s. a } p_1 t\lambda - x_1 - x_2 \leqslant (p_1 - 8/3)t \\ &p_2 t\lambda - x_1 + x_2 \leqslant (p_2 - 2)t \\ &x_1 + 2x_2 \leqslant 4 \\ &2x_1 + x_2 \leqslant 4 \\ &t = 1 \\ &x_1, x_2, \lambda \geqslant 0 \end{aligned}$$

Segunda forma equivalente

$$\begin{aligned} &\min \lambda' \\ &\text{s.a } x_1 + x_2 + p_1\lambda' \geqslant 8/3 \\ &x_1 - x_2 + p_2\lambda' \geqslant 2 \\ &x_1 + 2x_2 \leqslant 4 \\ &2x_1 + x_2 \leqslant 4 \\ &t = 1 \\ &x_1, x_2, \lambda' \geqslant 0 \end{aligned}$$

la siguiente tabla presenta las soluciones para distintos p_i

p_1	p_2	x_1	x_2	Max λ	Min λ'
2	2	11/6	1/3	3/4	1/4
4	4	11/6	1/3	.875	.125
4	5	1.8	.392	.8823	.1176

$$\text{DUAL } (u_1 \quad u_2)\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \gtreqqless (s_1 \quad s_2)\begin{pmatrix} 8/3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(u_1 \quad u_2)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \geqslant (s_1 \quad s_2)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$s_1 p_1 + s_2 p_2 = 1$$

Tercera forma equivalente

$$\min \frac{4u_1 + 4u_2 - s_1(8/3 - p_1) - s_2(2 - p_2)}{s_1 p_1 + s_2 p_2}$$

$$\begin{aligned} \text{s.a} \qquad & u_1 + 2u_2 - s_1 - s_2 \geqslant 0 \\ & 2u_1 + u_2 - s_1 + s_2 \geqslant 0 \\ & s_1 p_1 + s_2 p_2 = 1 \\ & s_i, u_i \geqslant 0 \end{aligned}$$

Segunda forma equivalente

$$\begin{aligned} \text{Max } & 8/3\, s_1 + 2s_2 - 4u_1 - 4u_2 \\ \text{s. a } & -u_1 - 2u_2 + s_1 - s_2 \leqslant 0 \\ & -2u_1 - u_2 + s_1 - s_2 \leqslant 0 \\ & s_1 p_1 + s_2 p_2 = 1 \\ & s_i, u_i \geqslant 0 \end{aligned}$$

los cuales coinciden con los duales clásicos de las formas equivalentes correspondientes del primal.

GENERALIZACION

Si en [6] B_2 es una matriz (mr), t un vector de pesos de dimensión r, y B_1 una matriz (q, r) de términos

$$\begin{aligned} b_{ij} &= \max (A_1 X)_i \\ \text{s. a } A_2 X &\leqslant B_2 e_j \\ X &\geqslant 0 \end{aligned}$$

e_j j-ésimo vector de la base canónica. Tomando [8] como *fp* el primal equivalente es

$$\begin{aligned} & \max \lambda \\ & \text{s. a } \begin{pmatrix} -A_1 & Pt \\ A_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ \lambda \end{pmatrix} \leqslant \begin{pmatrix} -(B_1 - P)t \\ B_2 t \end{pmatrix} \\ & X, \lambda \geqslant 0 \end{aligned} \tag{10}$$

donde P es una matriz (q, r) de niveles de proximidad. Su dual difuso con [9] como *fp*, da lugar a la forma equivalente

$$\begin{aligned} & \min \lambda \\ & \text{s. a } -UB_2 + sP\lambda \geqslant -s(B_1 - P) \\ & UA_2 \geqslant sA_1 \\ & sPt = 1 \\ & s, U \geqslant 0 \end{aligned}$$

el cual es fácil demostrar coincidir con el dual de [10].

CONCLUSIONES

Se ha visto que es posible definir el dual difuso de un PLD de forma tal que considerando las mismas *fp*, tanto en el primal como en el dual, las formas equivalentes a ellos asociadas sean duales en sentido clásico, permitiendo así mismo la consideración de varias funciones objetivo o restricciones difusas. Finalmente se ha generalizado el problema inicial.

Sin embargo y aunque el operador min sea particularmente adecuado, dadas sus características, para su tratamiento matemático, no parece que el hombre se ajuste a él cuando se ve enfrentado con varias alternativas entre las que decidir. En este sentido cabe destacar que es precisa una mayor labor investigadora en este campo, así como a la búsqueda de *fp* que se ajusten a la subjetividad humana.

BIBLIOGRAFIA

[1] BELLMAN, R. E., ZADEH: «Decision-making in a fuzzy environement», *Management sciences*, vol. 17, B144-164, 1970.

[2] DANTZIG, G. B.: *Applications et prolongement de la programation lineaire*, Dunod, 1966.

[3] GOGUEN, L.: «Fuzzy sets. Jour. Math.», *Anal. and Appl.*, 18, 145-174, 1967.

[4] HAMACHER, H., H. LEBERLINBG and H. J. ZIMMERMANN: «Sensitivity analysis in fuzzy linear programmon», *Fuzzy sets and systems*, 1, 269-281, 1978.

[5] HANNAN, E. L.: «Contrasting fuzzy goal programming and fuzzy multicriteria programming», *Decision sciences*, 13, 337-339, 1982.

[6] IGNIZIO, J. P.: «On the (re)discovery of fuzzy goal programming», *Decision sciences*, 13, 331-336, 1982.

[7] KORNBLUTH, J. S. H.: «Duality indiference and sensitive analysis in multiple objective linear programmin», *Op. Res.*, 25, 599-614, 1974.

[8] LLENA, J.: *Sobre programación lineal en subconjuntos difusos*, tesis doctoral, Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad del País Vasco, 1983.

[9] LLENA, J.: «On fuzzy linear programming», *E.J.O.R.*, vol. 22, 2, 1985.

[10] NARASINHAN, R.: «Goal programming in a fuzzy environement», *Decision sciences*, 12, 325-326, 1980.

[11] NARASINHAN, R.: «On fuzzy goal programming. Somme comments», *Decision sciences*, 12, 532-538, 1981.

[12] RODER WILHEM, H. J. ZIMMERMAN: «Duality in fuzzy linear programming», *Int. symp. on extremal methods and system analisis*, Austin, Texas, 1977.

[13] ZADEH, L. A.: «Fuzzy sets», *Information and control*, 8, 338-353, 1965.

[14] ZIMMERMAN, H. J.: «Fuzzy programming and linear programming with several objective functions», *Fuzzy sets and systems*, 1, 45-56, 1978.

[15] ZIMMERMAN, H. J.: «Media selection and fuzzy linear programming», *Journal of the Op. Re. Soc.*, vol. 29, *núm.* 11, 1071-1084, 1978.

[16] ZIMMERMANN, H. J.: «Applications of fuzzy set theory to mathematical programming», *Information sciences*, 36, 29-58, 1985.