TRABAJOS DE
INVESTIGACION OPERATIVA
Vol. 2. Núm. 1, 1987, pp. 69 a 80

CARACTERIZACION ALGEBRAICA DE LAS ARISTAS INFINITAS EN EL CONJUNTO DUAL FACTIBLE DE UN PSI-LINEAL

J. T. Pastor Ciurana
Departamento de Matemáticas y Estadística
Facultad de Ciencias
Universidad de Alicante

RESUMEN

Las propiedades geométricas del conjunto factible del dual de un problema semiinfinito lineal son análogas a las correspondientes para el caso finito. En este trabajo mostramos cómo, a partir de la caracterización algebraica de vértices y direcciones extremas, se consigue la correspondiente para aristas infinitas, estableciéndose así las bases para una extensión del método simplex a programas semiinfinitos lineales.

Palabras clave: programas semiinfinitos; dualidad; vértices y direcciones extremas.

Clasificación A.M.S.: 90C05, 90C48.

SUMMARY

The geometric properties of the dual feasible set in a linear SIP are similar to the correspondents in the finite case. In this paper we obtain the algebraic characterization for infinite edges starting with the known characterizations for vertices and extreme directions, setting up the foundations in order to get an extension of the simplex method for linear semiinfinite programs.

Title: Algebraic characterization for the infinite edges of a dual feasible set in a linear semiinfinite program.

Key words: linear semiinfinite programs; duality; vertices and extreme directions.

A.M.S. subjects classifications: 90C05, 90C48.

1. INTRODUCCION

Sea T un conjunto de índices (en general no infinito).

Sea $R^{(T)}$ el conjunto de las sucesiones finitas generalizadas. (Tales sucesiones, indicionadas por T, tienen todas sus componentes nulas salvo un número finito.)

Si $\lambda \in R^{(T)}$ definimos el soporte de λ, supp λ, como

$$\text{supp } \lambda := \{t \in T / \lambda_t \neq 0\}, \text{ conjunto finito.}$$

En $R^{(T)}$ se define la norma de Chevyshev en la forma habitual:

$$\|\lambda\|_\infty = \text{máx}\{|\lambda_t|,\ t \in T\}$$

Además, por conveniencia notacional, definimos la función m: $R^{(T)} \to]0, +\infty[$ de forma que $m(\lambda) = \text{mín}\{|\lambda_t|,\ t \in \text{supp } \lambda\}$.

Por analogía con la notación habitual, 0_T denotará el cero de $R^{(T)}$.

En la definición de un conjunto dual factible se consideran tan sólo elementos de $R_+^{(T)}$, sucesiones finitas generalizadas con componentes no negativas, junto a los vectores $c \in R^m$ y $a_t \in R^m$, $t \in T$:

$$\Lambda := \{\lambda \in R_+^{(T)} / \sum_{t \in T} \lambda_t a_t = c\}$$

Tal conjunto aparece en la definición de un programa dual semiinfinito (véase Charnes, Cooper y Kortanek (1963)).

Además, si $T_1 \subset T$ es un subconjunto finito y ordenado,

$$T_1 := \{t_1, t_2, \ldots, t_p\},\ p \in N,$$

denotaremos por $A(T_1)$ la matriz cuyas columnas son, precisamente,

$$a_{t_1}, a_{t_2}, \ldots, a_{t_p} \text{ (en este orden)}$$

En las operaciones matriciales cada vector se tomará como una matriz-columna.

Por otro lado, P_{T_1}: $R^{(T)} \to R^p$ denotará la proyección de $\lambda \in R^{(T)}$, con imagen el vector $(\lambda_{t_1}, \lambda_{t_2}, \ldots, \lambda_{t_p})$.

Adoptamos la noción de cono convexo tal como la explicita Rockafellar (1970), es decir, considerando que no contiene necesariamente al vector nulo. En particular, $K(\delta)$ es el rayo generado por δ y $\bar{K}\ \{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$ es el cono convexo generado por tales vectores (que incluye al vector nulo).

Las letras griegas minúsculas, quizá con superíndice, se reservarán para los elementos de $R^{(T)}$, mientras que los escalares (números reales) se denotarán por letras griegas con subíndice. Los vectores de R^m serán letras latinas minúsculas, quizá con subíndice, y 0_m denotará el vector nulo.

2. CARACTERIZACION ALGEBRAICA DE VERTICES Y DIRECCIONES EXTREMAS

Los resultados que presentamos en este apartado son ya conocidos, si bien aportamos nuevas demostraciones. Así, la caracterización de los vértices se remonta al trabajo de Charnes, Cooper y Kortanek (1963), mientras que la de direcciones extremas es mucho más reciente (véase Goberna y Jornet (1986)).

Supondremos, en todo lo que sigue, que $\Lambda \neq \phi$.

Definición

Diremos que $\lambda \in \Lambda$ es un *vértice* (o punto extremo) si no es posible expresarlo como combinación lineal convexa de otros dos puntos distintos de Λ.

Nota.—Obsérvese que $R_+^{(T)}$ es un convexo.

Lema 1

$\lambda \in R_+^{(T)}$ es un vértice de Λ si, y sólo si, $\lambda \in \Lambda$ y el $\{a_t, t \in \text{supp } \lambda\}$ es linealmente dependiente (L.D.).

Demostración

Probaremos que, siendo $\lambda \in \Lambda$, entonces: λ no es punto extremo si, y sólo si, el $\{a_t, t \in \text{supp } \lambda\}$ es linealmente dependiente (L.D.).

Supongamos, en primer lugar, que λ no es un vértice de Λ. Entonces existen λ^1, λ^2 en Λ, con $\lambda^1 \neq \lambda^2$ de forma que λ es combinación lineal convexa de λ^1 y λ^2. Por ello supp $\lambda = \text{supp } \lambda^1 \cup \text{supp } \lambda^2$ y, como consecuencia, supp $(\lambda^2 - \lambda^1) \subset \text{supp } \lambda$.

Al ser $\sum\limits_{t \in \text{supp } \lambda} (\lambda_t^2 - \lambda_t^1) a_t = c - c = O_m$, resulta que los $\{a_t, t \in \text{supp } \lambda\}$ son L.D.

Recíprocamente, si $\{a_t, t \in \text{supp } \lambda\}$ es L.D. es porque existe $\alpha \in \mathbb{R}^{(T)}$, $\alpha \neq 0_T$, tal que $\sum\limits_{\lambda \in \text{supp } \lambda} (\alpha_t a_t) = 0_m$; se elige α tal que supp $\alpha \subset \text{supp } \lambda$.

Eligiendo α «suficientemente pequeño» (por ejemplo, $\|\alpha\|_\infty < m(\lambda)$), se tiene que $\lambda - \alpha \in \Lambda$, $\lambda + \alpha \in \Lambda$, son distintos y

$$\lambda = \frac{1}{2}(\lambda - \alpha) + \frac{1}{2}(\lambda + \alpha)$$

Definiciones

El conjunto $\Lambda_0 := \{\delta \in R_+^{(T)} / \sum\limits_{t \in T} \delta_t a_t = 0_m\} \backslash \{0_T\}$ se denomina cono de recesión (de hecho, es un cono). Supondremos $\Lambda_0 \neq \phi$.

Sus elementos son direcciones de recesión para cada punto de Λ: si $\lambda \in \Lambda$ y $\delta \in \Lambda_0$, entonces $\lambda + \mu_0 \delta \in \Lambda$, $\forall \mu_0 \geqslant 0$.

De entre ellas, las que no se pueden obtener como combinación lineal positiva de otras dos direcciones —"distintas"— de Λ_0 se llaman *direcciones extremas.* (Obsérvese que para δ^1, $\delta^2 \in \Lambda_0$, "$\delta^1 \neq \delta^2$" si, y sólo si, $\delta^1 \notin K(\delta^2)$).

Tales direcciones extremas admiten una caracterización algebraica sencilla.

Lema 2

$\delta \in R_+^{(T)}$ es dirección extrema de Λ si, y sólo si, $\delta \in \Lambda_0$ y $\left\{\begin{bmatrix} a_t \\ 1 \end{bmatrix}, t \in \text{supp } \delta\right\}$ es linealmente independiente.

Demostración

Probaremos la doble implicación de las proposiciones contrarias.

Comencemos suponiendo que $\delta \in \Lambda_0$ no es dirección extrema: existen δ^1, $\delta^2 \in \Lambda_0$, con $\delta^1 \notin K(\delta^2)$, tal que δ es combinación lineal positiva de δ^1 y δ^2. Es evidente que supp $\delta =$ supp $\delta^1 \cup$ supp δ^2.

Sean $\mu_1 := (\sum_{t \in \operatorname{supp} \delta^1} \delta_t^1) > 0$, $\mu_2 := (\sum_{t \in \operatorname{supp} \delta^2} \delta_t^2) > 0$.

Los escalares $\left(\delta_t^1 - \dfrac{\mu_1}{\mu_2} \delta_t^2\right)$, $t \in \operatorname{supp} \delta$, son no todos nulos (de serlo, $\delta^1 \in K(\delta^2)$, lo cual no es posible) y verifican

$$\sum_{t \in \operatorname{supp} \delta} \left(\delta_t^1 - \frac{\mu_1}{\mu_2} \mu_t^2\right) \begin{bmatrix} a_t \\ 1 \end{bmatrix} = 0_{m+1}, \quad \text{por lo que}$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} a_t \\ 1 \end{bmatrix}, \ t \in \operatorname{supp} \delta \right\} \text{ es familia L.D.}$$

Recíprocamente, si la familia de los $\left\{ \begin{bmatrix} a_t \\ 1 \end{bmatrix}, \ t \in \operatorname{supp} \delta \right\}$ es L.D., existe un $\alpha \in R^{(T)}$, $\alpha \neq 0_T$ tal que $\sum_{t \in T} (\alpha_t a_t) = 0_m$ y $\sum_{t \in T} (\alpha_t) = 0$, con supp $\alpha \subset$ supp δ.

De la última ecuación deducimos que $\alpha \notin K(\delta)$.

Tomando α suficientemente pequeño (por ejemplo, $\|\alpha\|_\infty < m(\delta)$), se tiene que $\delta^1 := \delta + \alpha$ y $\delta^2 := \delta - \alpha$ son elementos de Λ_0, $\delta^1 \notin K(\delta^2)$ y $\delta = \dfrac{1}{2}\delta^1 + \dfrac{1}{2}\delta^2$, por lo que δ no es dirección extrema.

Definición

Si λ es un vértice de Λ y $\delta \in \Lambda_0$, diremos que la semirrecta $\Delta = \{\lambda + \mu_0 \cdot \delta / \mu_0 \geqslant 0\}$ es una *arista infinita* si, siempre que Δ intersecte con un segmento de Λ en un punto interior del mismo, dicho segmento está contenido en Δ.

Observación

Es fácil probar, por reducción al absurdo, que si Δ es arista infinita, entonces δ es dirección extrema: de no serlo, existirían δ^1, $\delta^2 \in \Lambda_0$,

$\delta^1 \notin K(\delta^2)$, y escalares positivos μ_1, μ_2 tales que $\delta = \mu_1\delta^1 + \mu_2\delta^2$. Si denotamos por $\mu_0 := \frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}$, es evidente que $\frac{1}{\mu_1+\mu_2}\delta = \mu_0\delta^1 + (1 - \mu_0)\delta^2$, con $0 < \mu_0 < 1$. Los puntos $\lambda + \delta^1$ y $\lambda + \delta^2$ son de Λ, no están en Δ y, sin embargo, el segmento que definen intersecta con Δ en el punto interior $\mu_0(\lambda + \delta^1) + (1 - \mu_0)\ (\lambda + \delta^2)$. En consecuencia, Δ no es arista infinita.

3. ASOCIACION DE BASE A VERTICE Y DE SISTEMA GENERADOR CUASIMINIMAL A DIRECCION EXTREMA

Para poder asociar a cada vértice al menos una base de R^m, debemos suponer que *el conjunto* $\{a_t,\ t \in T\}$ *genera* R^m. Bajo este supuesto, dado el vértice $\lambda \in \Lambda$, y por el lema 1, la familia de vectores asociada, $\{a_t,\ t \in \text{supp}\ \lambda\}$, es linealmente independiente (L.I.), pudiéndose ordenar una base de R^m. Por ello, «cada vértice, λ, tiene asociado, al menos, una base extraída de $\{a_t,\ t \in T\}$».

En el caso particular de que el cardinal del supp λ sea m, se dice que el *vértice* es *no degenerado*. En este caso la base asociada es única, salvo ordenación y posibles repeticiones.

Obsérvese, además, que el lema 1 establece una suerte de recíproco: si la solución única del sistema cuadrado $A(T_1)x = c$ es no negativa, siendo $\{a_t,\ t \in T_1\}$ una base de R^m, y $T_1 = \{t_1, t_2, ..., t_m\}$, tal solución define, de forma natural, un elemento $\lambda \in R_+^{(T)}$, que es punto extremo:

$$\lambda_{t_i} = x_i,\ i = 1, 2, ..., m,\ \lambda_t = 0,\ t \in T \setminus T_1$$

Nota.—La suposición de que $\{a_t,\ t \in T\}$ genera R^m es, en programación lineal finita, una de las piedras angulares del método simplex que permite establecer una asociación análoga a la descrita entre bases y vértices.

El recurso a variables artificiales y al propio método simplex permite abordar cualquier problema que no satisfaga, en principio, dicha suposición (recuérdese, por ejemplo, el método de las dos fases).

A las direcciones extremas se las asocia sistemas generadores linealmente dependientes y minimales, es decir, sistemas generadores que constan de $(m+1)$-vectores de R^m. Les llamaremos *sistemas generadores cuasiminimales*. Veamos cómo se establece tal asociación.

Teorema 1

Si δ es dirección extrema de Λ y el cardinal de $\{a_t,\ t \in \operatorname{supp} \delta\}$ es $(p+1)$, entonces: cualquier subfamilia de p vectores es linealmente independiente, $p \geqslant 1$.

Demostración

Sea supp $\delta = \{t_0, t_1, ..., t_p\}$.

Multiplicando por un número real positivo, μ_0, podemos conseguir siempre que una cualquiera de las componentes no nulas de δ (en realidad, de $\mu_0\delta$) valga la unidad. Eligiendo, por ejemplo,

$\mu_0 = \dfrac{1}{\delta_{t_0}}$, probaremos que $\{a_{t_1}, a_{t_2}, ..., a_{t_p}\}$ es una familia L.I.

Con la elección hecha se tiene: $a_{t_0} + \delta a_{t_1} \cdot a_{t_1} + \cdots + \delta a_{t_p} \cdot a_{t_p} = 0_m$.

Para hacer la prueba consideremos escalares α_i tales que $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i a_{t_i} = 0_m$. Probaremos que todos ellos son nulos.

Operando, se obtiene $0_m = \gamma_0 a_{t_0} + \sum_{i=1}^{p} (\gamma_0 \delta_{t_i} + \alpha_i) a_{t_i}$, donde el escalar γ_0 se determina para que

$$\gamma_0 + \sum_{i=1}^{p} (\alpha_i + \gamma_0 \delta_{t_i}) = 0$$

Las dos últimas ecuaciones permiten expresar el vector 0_{m+1} como combinación lineal de los vectores $\begin{bmatrix} a_{t_i} \\ 1 \end{bmatrix}$, $i = 0, 1, ..., p$, que, en virtud del lema 2, son L.I. En consecuencia, de

$$\left.\begin{array}{l} \gamma_0 = 0 \\ \alpha_i + \gamma_0 \delta_{t_i} = 0,\ i = 1, 2, ..., p \end{array}\right\}$$

se concluye que $\alpha_i = 0 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_p$.

Como consecuencia del último teorema, toda dirección extrema, δ, tiene asociada un sistema generador cuasiminimal que incluye como subfamilia al $\{a_t,\ t \in \text{supp}\ \delta\}$ (por completación, a base, de $\{a_{t_1}, ..., a_{t_p}\}$ y posterior unión con $\{a_{t_0}\}$).

En el caso particular de que no sea necesario completar el $\{a_t,\ t \in \text{supp}\ \delta\}$, se dice que la *dirección extrema* es *no degenerada.*

Hay también, en este caso, una especie de recíproco del teorema 1.

Teorema 2

Si $\{a_{t_i},\ i=1, 2, ..., p\}$ es una familia L.I. y existe otro vector, a_{t_0}, tal que $a_{t_0} \in \bar{K}\{-a_{t_i},\ i=1, 2, ..., p\}$, entonces la familia de vectores $\{a_{t_0}, a_{t_1}, ..., a_{t_p}\}$ tiene asociada, de forma natural, una direccuión extrema.

En particular, si $\{a_{t_0}, a_{t_1}, ..., a_{t_m}\}$ es un sistema generador cuasiminimal y existe $\delta \in \Lambda_0$ con soporte incluido en $\{t_0, t_1, ..., t_m\}$, se tiene que δ es dirección extrema.

Demostración

Afirmar que $a_{t_0} \in \bar{K}\{-a_{t_i},\ i=1, 2, ..., p\}$ implica decir que existe $\delta \in \Lambda_0$ tal que supp $\delta \subset \{t_0, t_1, ..., t_m\}$. Por el lema 2, bastará probar que la familia $\left\{\begin{bmatrix} a_{t_i} \\ 1 \end{bmatrix},\ i=0, 1, ..., p\right\}$ es L.I.

Sea $0_{m+1} = \alpha_0 \begin{bmatrix} a_{t_0} \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_1 \begin{bmatrix} a_{t_1} \\ 1 \end{bmatrix} + \cdots + \alpha_p \begin{bmatrix} a_{t_p} \\ 1 \end{bmatrix}$.

Si fuese $\alpha_0 = 0$, la independencia de los a_{t_i}, $i=1, 2, ..., p$ acabaría la prueba.

Concluyamos viendo la imposibilidad de que $\alpha_0 \neq 0$: si lo fuese, fijándonos en las m-primeras componentes de la última ecuación obtendríamos:

$$a_{t_0} = \frac{\alpha_1}{\alpha_0}(-a_{t_1}) + \cdots + \frac{\alpha_p}{\alpha_0}(-a_{t_p})$$

Por hipótesis, $\frac{\alpha_i}{\alpha_0} \geqslant 0$, $i=1, 2, ..., p$ y ¡ello imposibilita que $\sum_{i=0}^{p} \alpha_i = 0$, condición requerida en la ecuación inicial!

4. CARACTERIZACION ALGEBRAICA DE ARISTAS INFINITAS

Probaremos que, para los conjuntos dual-factibles, es válida la misma caracterización que para el caso finito: dado un vértice, si consideramos, en la base asociada, todas las posibles columnas con coordenadas no positivas, éstas corresponden a direcciones extremas que dan lugar a aristas infinitas. Recíprocamente, cualquier arista infinita que sale de un vértice dado se genera a través de una columna con coordenadas no positivas.

Teorema 3

Si $\lambda \in \Lambda$ es vértice, con base asociada $(a_{t_1}, a_{t_2}, ..., a_{t_m})$ y existe un vector a_{t_0} con coordenadas no positivas en dicha base, entonces la familia $(a_{t_0}, a_{t_1}, ..., a_{t_m})$ es un sistema generador cuasiminimal, con dirección extrema asociada δ. Además, $\Delta = \{\lambda + \mu_0 \delta, \mu_0 \geqslant 0\}$ es una arista infinita.

Demostración

En virtud del teorema 2 sólo queda por probar que Δ es arista infinita.

Sea (γ^1, γ^2) un segmento en Λ y supongamos que existe μ_1 tal que $\mu_1 \cdot \gamma^1 + (1-\mu_1) \cdot \gamma^2 \in \Delta$, $0 < \mu_1 < 1$.

Es evidente que supp $\gamma^i \subset \{t_0, t_1, ..., t_m\} =: T_1$, $i = 1, 2$.

Consideremos el sistema $A(T_1)x = c$, $x \in R^{m+1}$, cuya matriz de coeficientes tiene rango m. Además, $P_{T_1}(\lambda)$ es una solución particular del mismo, por lo que el sistema será indeterminado con un parámetro libre. Como, además, $P_{T_1}(\delta)$ es solución no nula del sistema homogéneo asociado, resulta que la solución general es $P_{T_1}(\lambda) + \mu_0 \cdot P_{T_1}(\delta)$, $\mu_0 \in R$.

Todas las soluciones no negativas del sistema se obtienen para $\mu_0 \geqslant 0$, por ser λ vértice.

Como $P_{T_1}(\gamma^1)$ y $P_{T_2}(\gamma^2)$ son soluciones no negativas del mismo, queda probado que $\gamma^1 \in \Delta$ y $\gamma^2 \in \Delta$.

Teorema 4

Si $\Delta=\{\lambda+\mu_0\delta,\ \mu_0\geqslant 0\}$ es arista infinita, entonces existe una base, $(a_{t_1}, \ldots, a_{t_m})$, asociada a λ y existe un vector a_{t_0}, con coordenadas no positivas en dicha base, de forma que δ tiene asociada el sistema generador cuasiminimal $\{a_{t_0}, a_{t_1}, \ldots, a_{t_m}\}$.

Demostración

Sea supp $\delta=\{t_0, t_1, \ldots, t_q\}$ y supp $\lambda=\{t_{q+1}, \ldots, t_{q+p}\}$, con supp $\lambda\cap$ supp $\delta=\{t_{q+r+1}, \ldots, t_{q+p}\}$.

Supongamos que $a_{t_0}\in\{a_{t_{q-r+1}}, \ldots, a_{t_{q+p}}\}$ (para lo cual basta con reordenar los subíndices si hiciera falta).

Sea $T_1:=\{t_0, t_1, \ldots, t_q, t_{q+1}, \ldots, t_{q+r}\}$ y consideremos el sistema homogéneo $A(T_1)x=0_m$, $x\in R^{q+r+1}$.

Probaremos, en primer lugar, que $P_{T_1}(\delta)$ es la única solución de dicho sistema (salvo factor multiplicativo).

Sea $\rho\in R^{(T)}$, supp $\rho\subset T_1$, y $P_{T_1}(\rho)$ solución no nula del sistema. Tomando ρ suficientemente pequeño (por ejemplo, $\|\rho\|_\infty<\min\{m(\lambda), m(\delta)\}$), es claro que $\gamma^1=\lambda+\delta+\rho$ y $\gamma^2=\lambda+\delta-\rho$ son elementos de Λ. Pero $\lambda+\delta\in\Delta\cap]\gamma^1, \gamma^2[$ y, al ser Δ arista infinita, $\gamma^1\in\Delta$ y, en consecuencia, $\rho\in K(\delta)$.

Acabamos de probar, de forma implícita, que rg $A(T_1)=q+r$. Al ser sus $(q+1)$ primeras columnas L.D. —por estar asociadas a dirección extrema—, es evidente que sus $(q+r)$-últimas columnas son L.I.

Además, por la suposición hecha al principio, supp $\lambda\subset T_1\backslash\{t_0\}$.

Puedo, pues, completar los vectores $(a_{t_1}, \ldots, a_{t_{q-r}})$ hasta obtener base $(a_{t_1}, \ldots, a_{t_m})$ asociada a λ.

Por último, como, por hipótesis,

$$a_{t_0}\in\bar{K}\{-a_{t_1}, \ldots, -a_{t_q}\}\subset\bar{K}\{-a_{t_1}, \ldots, -a_{t_m}\}$$

el teorema 2 garantiza la existencia de una dirección extrema asociada a $\{a_{t_0}, a_{t_1}, \ldots, a_{t_m}\}$. Pero si $T_2=\{t_0, t_1, \ldots, t_m\}$, el sistema $A(T_2)x=0_m$ tiene por solución a $P_{T_2}(\delta)$ y ésta es única (salvo factor multiplicativo), dado que rg $A(T_2)=m$.

5. COMENTARIOS FINALES

Con las aportaciones de este trabajo y las debidas a Goberna y Jornet (1986) cabe pensar no sólo en una extensión del método simplex, sino, incluso, en un método de descripción completa (Wintgen (1965)).

Si bien es claro que Kortanek y Strowjas (1985) han probado que un conjunto dual factible está, a semejanza de los poliedros, generado por sus puntos extremos y direcciones extremas (lo cual permite el desplazamiento de vértice a vértice en busca de una solución óptima), no lo es menos que los conjuntos que nos ocupan presentan una desventaja fundamental: el conjunto de vértices ya no es, en general, finito (recuérdese la asociación con bases de $\{a_t,\ t\in T\}$) y el de direcciones extremas tampoco (por la misma razón). Así, por ejemplo, es fácil probar que para el siguiente problema:

$$T=N,\quad a_1=(1,\ 0,\ 0)\in R^3,\ a_2=(0,\ 2,\ 1),$$
$$a_3=(-1,\ -1,\ -1),\ a_t=(0,\ 0,\ 1)\ \text{para}\ t\geqslant 4$$

y $c=(-1,\ 1,\ 1)$, los puntos λ^k, $k\in N$, $K\geqslant 4$, son vértices de Λ, con $\lambda_t^k=\begin{cases}1, & t=2,\ 3,\ k\\ 0, & t=\{2,\ 3,\ k\}\end{cases}$ y las direcciones de recesión δ^k, k variando en N, $k\geqslant 4$, con

$$\delta_t^k=\begin{cases}2, & t=1,\ 3\\ 1, & t=2,\ k\\ 0, & \text{resto}\end{cases}$$

son extremas en Λ.

Hay, pues, que desechar la idea de recurrir a un método de descripción completa, así como la de reproducir, tal cual, el método que permite pasar de un vértice a otro adyacente con el máximo incremento en el valor de la función objetivo que se está maximizando. No obstante, es un hecho notable (que previsiblemente conducirá a un método del tipo simplex imponiendo fuertes limitaciones tanto al conjunto de índices T como a la naturaleza de las restricciones) el que, desde el punto de vista algebraico, los vértices, las direcciones extremas, las aristas infinitas e incluso, la adyacencia entre vértices (véase Goberna y Jornet (1986)) admitan la misma caracterización que en el caso finito.

Por último cabe señalar que Glashoff y Gustafson (1983), en el capítulo cinco de su libro esbozan un método simplex para programación semiinfinita si bien, ante las dificultades, recurren a argumentos de discretización que les conducen a la resolución de programas finitos.

BIBLIOGRAFIA

CHARNES, A.; COOPER, W. W., y KORTANEK, K. O. (1963): «Duality in semiinfinite programs and some work of Haar and Caratheodory», *Management Science,* 9:2, 209-228.

GLASHOFF, KL., y GUSTAFSON, S. A. (1983): *Linear Optimization and Approximation,* Springer Verlag, Nueva York.

GOBERNA, M. A., y JORNET, V. (1986): *Geometric fundamentals of the simplex method in Semi-Infinite Programming.* To appear.

KORTANEK, K. O., y STROWJAS, H. M. (1985): «On constrait sets of infinite linear programs over ordered fields», *Mathematical Programming,* 33, 146-161.

PREKOPA, A. (ed.) (1965): *Colloqium on Applications of Mathematics to Economics,* Akademiai Kiadó, Budapest.

ROCKAFELLAR, R. T. (1970): *Convex Analysis,* Princeton University Press.

WINTGEN, G. (1965): *Über den Zusammenhang der Uzawamethode der linearen Optimierung mit der Methode der vollständigen Beschreibung*». En Prekopa (1965).