TRABAJOS DE
INVESTIGACION OPERATIVA
Vol. 2. Núm. 1, 1987, pp. 49 a 67

SOBRE SOLUCIONES OPTIMAS EN PROBLEMAS DE OPTIMIZACION MULTIOBJETIVO (*)

David Ríos Insua
C.E.C.I.M.E., C.S.I.C., Madrid

A la memoria de Ramiro Melendreras

RESUMEN

Estudiamos los principales tipos de conceptos de óptimo considerados en problemas de optimización multiobjetivo, cuando la ordenación de alternativas se regula mediante un cono K convexo: soluciones K-maximales, débilmente K-maximales, fuertemente K-maximales, propiamente K-maximales. Damos caracterizaciones en problemas generales de optimización vectorial y condiciones suficientes en problemas de maximización de funciones de valor vectoriales y escalares, particularizando después al caso de conos poliédricos y al de ortantes no negativos. Se concluye con algunas aplicaciones y cuestiones prácticas.

Palabras clave: Optimización multiobjetivo, optimización vectorial, función de valor, solución K-maximal, solución de compromiso.

SUMMARY

We study the main kinds of optimum in multiobjective optimization problems, when alternatives are ordered by means of a convex cone K: K-maximal, weakly K-maximal, strongly K-maximal and properly K-maximal solutions. We give several characterisations and sufficient conditions, concluding with some applications.

Key word: Multiobjective optimization, Vector optimization, Value function, K-maximal solution.

A.M.S. Classification (1985): 90C31.

(*) 3.er Premio de Investigación Fundación Ramiro Melendreras.

1. INTRODUCCION

En los problemas de optimización multiobjetivo debemos elegir la mejor alternativa x de un conjunto X respecto a un objetivo de tipo amplio y poco preciso, por lo que suele introducirse una jerarquía de objetivos siendo los m de más bajo nivel lo suficientemente precisos para permitir medir los resultados de cada alternativa: tenemos, por tanto, que elegir la mejor alternativa respecto a m objetivos. Matemáticamente, tenemos un conjunto $X \subset R^n$, espacio de alternativas, y m aplicaciones $f_i{:}X \to R$, $i=1, \ldots, m$, que representan los m objetivos, de forma que si sólo se considerase el i-ésimo deberíamos resolver el problema

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & f_i(x) \\ \text{s.a} & x \in X; \end{array}$$

al considerar los m, podemos formular nuestro problema como

$$\begin{array}{ll} \text{«máx»} & f(x) \\ \text{s.a} & x \in X \end{array} \qquad [1]$$

con $f=(f_i)_{i=1}^{i=m}$. Este tipo de problemas aparece cada vez con más frecuencia en las aplicaciones (ver, por ejemplo, Eschenauer (4), que presenta problemas de mecánica estructural, Stadler (12), revisa algunos problemas de ingeniería mecánica, Goicoechea y colaboradores (5), muestran numerosos ejemplos de tipo económico o los distintos estudios ecológicos del IIASA).

La expresión «máx» en [1] es susceptible de diversas formas de conceptualización matemática, siendo las más básicas aquéllas que surgen cuando se considera un cono convexo K en R^m que induce una relación de preferencia $\prec$ en X que se define por $x \prec y$ si y sólo si (syss) $f(x) \neq f(y)$ y $f(y) \in f(x)+K$, para x, $y \in X$, lo que lleva a introducir las soluciones K-maximales, débilmente K-maximales, fuertemente K-maximales y propiamente K-maximales. Las cuestiones de interés en este campo son las de existencia, caracterización, estabilidad y cálculo. Nosotros estudiaremos principalmente la segunda introduciendo una familia de funciones que permiten caracterizar completamente tales soluciones, escalarizando el problema. La ventaja de esta aproximación está en que permite evitar condiciones que aparecen en otras como la existencia de un punto ideal, ciertos requisitos de convexidad,...

En muchas ocasiones tales conceptos resultan insuficientes, por lo que debe buscarse otro tipo de aproximaciones. Una clásica, ver, por ejemplo, Keeney y Raiffa (7), es considerar que es posible construir una función de valor escalar v, de forma que el problema que debe resolverse es:

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & v(f(x)) \\ \text{s.a} & x \in X \end{array} \qquad [2]$$

Relacionado con él están los modelos de compromiso, Yu (14), en los que debe resolverse

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & d(f(x), y^*) \\ \text{s.a} & x \in X \end{array} \qquad [3]$$

donde d es una distancia e y^* es un punto ideal. Sin embargo, lo más que puede hacerse muchas veces, Ríos-García y Ríos-Insua (10), es establecer una función de valor o una distancia vectoriales, lo que permite considerar un problema análogo a [1] de menor dimensión formulable como

$$\begin{array}{ll} \text{«máx»} & v(f(x)) \\ \text{s.a} & x \in X \end{array} \qquad [4]$$

con $v{:}f(X) \to R^l$ y $l < m$. Daremos resultados que relacionan las soluciones de los problemas [2], [3], [4] con los conceptos anteriores. Los resultados se particularizan después a los casos en que K es un cono poliédrico y K es el ortante (R^m_+), que son los más habituales en las aplicaciones. En la última parte, se analizan *algunas cuestiones prácticas y algunas aplicaciones en problemas de programación multiobjetivo.*

Como es habitual, dado un conjunto A, adh(A), int(A), ext(A), ∂A, $[A]$ representarán, respectivamente, su adherencia, su interior, su exterior, su frontera y el menor subespacio lineal que lo contiene. Dado otro conjunto B, denotaremos $A+B=\{c{:}c=a+b,\ a\in A,\ b\in B\}$ y $A\backslash B = A\bigcap B^c$; cuando sea $A=\{y\}$ escribiremos $y+B$. $B(y, r)$, $B[y, r]$ denotarán la bola de centro y, radio r abierta y cerrada, respectivamente.

2. DEFINICIONES Y RESULTADOS BASICOS

Muchos de los resultados que estudiaremos utilizan algún tipo de cono, por lo que recordaremos algunas definiciones sobre estos objetos.

Definición 1

a) Un conjunto $A \subset R^m$ es un cono si $a \in A$ implica $\lambda a \in A$ para todo $\lambda \in 0$.
b) Un cono se dice apuntado si $a \in A$ y $a \neq 0$ implica que $-a \notin A$.
c) Un cono se dice agudo si existe un semiespacio abierto H tal que $adh(A) \subset H \bigcup \{0\}$.

Algunos resultados sencillos que luego se utilizarán son:

Lema 1

a) Sea $A \subset R^m$ un conjunto convexo. Si $a_1 \in \text{int}(A)$ y $a_2 \in \text{adh}(A)$ entonces $\lambda a_1 + (1-\lambda)a_2 \in \text{int}(A)$ para todo $\lambda \in (0,1]$.
b) Un conjunto $A \subset R^m$ es un cono convexo *syss* $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 \in A$, para a_1, $a_2 \in A$ y $\alpha_1 \geqslant 0$, $\alpha_2 > 0$.
c) Si A es un cono convexo, adh(A) es apuntado syss A es agudo.

Para dar las definiciones de óptimos necesitamos la siguiente:

Definición 2

Dado un conjunto $A \subset R^m$ se denomina cono proyectante de A al conjunto $P(A) = \{\lambda a, \text{ con } \lambda \geqslant 0 \text{ y } a \in A\}$.

Vayamos ya con los conceptos de óptimo que caracterizaremos:

Definición 3

Consideremos el problema [1] y sea $K \subset R^m$ un cono convexo. Sea $x^* \in X$:

a) Se dice que x^* es solución K-maximal de [1] si no existe $x \in X$ tal que $f(x^*) \neq f(x)$ y $f(x) \in f(x^*) + K$.
b) Se dice que x^* es solución débilmente K-maximal de [1] si no existe $x \in X$ tal que $f(x^*) \neq f(x)$ y $f(x) \in f(x^*) + \text{int}(K)$, supuesto que $\text{int}(K) \neq \phi$.

c) Se dice que x^* es solución fuertemente K-maximal de [1] si $f(x^*) \in f(x)^K$ para todo $x \in X \setminus \{x\}$.

d) Se dice que x^* es solución propiamente K-maximal de [1] si es solución K-maximal y $adh(P(f(X)-K-f(x^*))) \bigcap K = \{0\}$, supuesto que K es cerrado.

La definición *b*) sólo es útil en algunas aplicaciones; la definición *c*) corresponde a un concepto de solución trivial, en cierto sentido; se dan aquí para completar la teoría. La definición *d*) debida a Benson (2), permite eliminar algunas soluciones K-maximales anómalas ya que suponen tasas de intercambio no acotadas. Existen otras definiciones de maximalidad propia (Borwein, Henig, Geoffrion, Kuhn y Tucker) cuya relación puede verse en Sawaragi y colaboradores (11). Sobre cuestiones de existencia puede consultarse Sterna-Karwat (13). Nosotros utilizaremos el siguiente resultado que es consecuencia inmediata de los de Nieuwenhuis (9):

Teorema 1

Sean el problema [1], $x^* \in X$ y $K \subset R$ cono cerrado convexo no trivial. x^* es propiamente K-maximal syss es K_ε-maximal para cierto cono convexo cerrado $K_\varepsilon \subset R^m$ tal que $K \subset \text{int}(K_\varepsilon)$.

También necesitaremos los siguientes conceptos de monotonía:

Definición 4

a) Sean x, $y \in R^m$. Decimos que $x \leqq y$ si $y \in x + R^m_+$; si además $x \neq y$, decimos que $x \leqslant y$. Decimos que $x < y$ si $y \in x + (\text{int}(R^m_+))$.

Sea $g: R^m \to R^l$. Decimos que:

b) g es K-creciente en X si dados $x, x' \in X$ tales que $f(x) \in f(x') + K$ es $g(f(x')) \leqq g(f(x))$.

c) g es fuertemente K-creciente en X si dados x, x' en las condiciones anteriores es $g(f(x')) \leqslant g(f(x))$, supuesto $f(x) \neq f(x')$.

d) g es estrictamente K-creciente en X si dados $x, x' \in X$ tales que $f(x) \in f(x') + \text{int}(K)$ es $g(f(x')) \leqslant g(f(x))$, supuesto que $\text{int}(K) \neq \phi$.

Cuando $K=R^m_+$ eliminaremos la K de los nombres anteriores y hablaremos de soluciones maximales y funciones crecientes. En las aplicaciones lo más usual será que $K \supset R^m_+$, pero nosotros no haremos tal hipótesis para tratar problemas de optimización multiobjetivo más generales.

En lo que sigue, sin pérdida de generalidad, supondremos que f es inyectiva.

3. CARACTERIZACIONES GENERALES

Existe una serie de caracterizaciones de los conceptos de óptimo antes introducidos de alcance limitado: bien suponen que $K=R^m_+$, bien suponen que existe algún punto ideal, bien imponen alguna condición de convexidad a los objetivos, ... Introducimos aquí una forma general de caracterización sencilla que incluye como caso particular algunas caracterizaciones de gran aplicabilidad cuando $K=R^m_+$. Nuestra única hipótesis general es que el cono convexo K será apuntado y de interior no vacío. Comenzaremos por introducir la siguiente función:

Definición 5

Fijemos $v \in \operatorname{int}(K)$ y sea una función $\varphi:[\{v\}] \to R$ tal que para $\lambda \in R$ $\lambda v \mapsto \varphi(\lambda v) = \varphi(\lambda)$, estrictamente creciente en el siguiente sentido, $\lambda_1 < \lambda_2$ implica $\varphi(\lambda_1) < \varphi(\lambda_2)$. Para $y \in R^m$, sea $A_y = \{\lambda \in R : y \in \lambda v + K\}$ y sea $\lambda_y = \sup\{\lambda : \lambda \in A_y\}$. Definimos la función $g^K : R^m \to R$ mediante $g^K(y) = \varphi(\lambda_y)$.

Esta definición es correcta pues A_y es un conjunto acotado: si H es un hiperplano soporte de K en 0 es $(y+H) \bigcap [\{v\}] = \{\lambda^* v\}$ para cierto λ^* y $A_y \subset (-\infty, \lambda^*]$. Probamos ahora algunos resultados que luego se utilizarán para deducir algunas propiedades de g^K:

Teorema 2

En las condiciones de la definición 5, se tiene:

a) $\operatorname{adh}(A_y) = \{\lambda : y \in \lambda v + \operatorname{adh}(K)\}$.
b) $\lambda_0 = 0$.

c) Existe $\lambda > 0$, $\lambda \in A_y$ syss $y \in \mathrm{int}(K)$.
d) $\lambda_y < 0$ syss $y \in \mathrm{ext}(K)$.

Demostración

a) Sean $\lambda \in \mathrm{adh}(A_y)$ y $\{\lambda_n\}_n$ tales que $\lambda_n \to \lambda$ e $y = \lambda_n v + k_n$ con $k_n \in K$. Entonces $\lambda_n v \to \lambda v$ con lo que $y - \lambda v \in \mathrm{adh}(K)$ y $\lambda \in \{\lambda : y \in \lambda v + \mathrm{adh}(K)\}$. Supongamos ahora que $y = \lambda v + k$ con $k \in \mathrm{adh}(K)$; es $\lambda v + 2k \in \lambda v + \mathrm{adh}(K)$. Sea $\{\lambda_n\}_n \uparrow \lambda$; entonces, $\lambda v \in \lambda_n v + \mathrm{int}(K)$ y $\lambda v + 2k \in \lambda_n v + \mathrm{adh}(K)$ por lo que $y \in \lambda_n v + \mathrm{int}(K)$ y $\lambda \in \mathrm{adh}(A_y)$.

b) Es inmediato a partir de *a*.

c) Como $v \in \mathrm{int}(K)$, $\lambda v \in \mathrm{int}(K)$ para tal $\lambda > 0$. Sea $r > 0$ tal que $\lambda v + B(0,r) \subset K$; como es $y = \lambda v + k_1$, para $k_1 \in K$, entonces, por ser K cono convexo, resulta $\lambda v + B(0,r) + k_1 \subset K$, de manera que $y \in \mathrm{int}(K)$.

Recíprocamente, sea $r > 0$ tal que $B(y, r) \subset K$. Existe $y_1 \in B(y, r)$ tal que $y - y_1 = \lambda v$ con $\lambda > 0$. Entonces, $y = \lambda v + y_1$ por lo que $\lambda \in A_y$.

d) Como $\lambda_1 < 0$, $0 \notin \mathrm{adh}(A_y)$, por lo que por *a*, $y \notin \mathrm{adh}(K)$ de donde $y \in \mathrm{ext}(K)$.

Recíprocamente, si $y \in \mathrm{ext}(K)$ existe $r > 0$ tal que $B[y, r] \cap \mathrm{adh}(K) = \phi$; por el teorema de Hahn-Banach, existen $\Pi \in R^m$ y $\varepsilon > 0$ tales que $\Pi z + \varepsilon \leqslant \Pi s$, para $z \in B[y, r]$, $s \in \mathrm{adh}(K)$. Sea $m = \sup\{\Pi z : z \in B[y, r]\}$; entonces $\{u : \Pi u = = m + \varepsilon/2\} \cap [\{v\}] = \{\lambda v\}$ con $\lambda < 0$ y $A_y \subset (-\infty, \lambda]$ y así $\lambda_y \leqslant \lambda < 0$.

Se señalan a continuación las propiedades de interés:

Corolario 1

En las condiciones anteriores:

a) $y \in \mathrm{ext}(K)$ syss $g^K(y) < g^K(0)$.
b) $y \in \partial K$ syss $g^K(y) = g^K(0)$.
c) $y \in \mathrm{int}(K)$ syss $g^K(y) > g^K(0)$.

Demostración

Basta tener en cuenta el teorema 2 y la monotonía de φ.

Otro resultado, generalización del corolario anterior, que se utilizará es:

Teorema 3

En las condiciones de la definición 5:

a) Si $y_1 \in y_2 + \mathrm{adh}(K)$, $g^K(y_1) \geqslant g^K(y_2)$.
b) Si $y_1 \in y_2 + \mathrm{int}(K)$, $g^K(y_1) > g^K(y_2)$.

Demostración

a) Basta ver que $\mathrm{adh}(A_{y_1}) \supset A_{y_2}$. Supongamos que $\lambda \in A_{y_2}$, esto es $y_2 = \lambda v + k_1$ con $k_1 \in K$; por ser $y_1 = y_2 + k_2$, con $k_2 \in \mathrm{adh}(K)$, queda $y_1 = \lambda v + (k_1 + k_2)$, pero $k_1 + k_2 \in \mathrm{adh}(K)$, por lo que $\lambda \in \mathrm{adh}(A_{y_1})$.
b) Sea $\lambda \in A_{y_2}$, esto es, $y_2 = \lambda v + k_2$ con $k_2 \in K$. Además es $y_1 = y_2 + k_1 + \lambda_2 v$, para ciertos $\lambda_2 > 0$, $k_1 \in K$, de manera que $y_1 = (\lambda + \lambda_2)v + (k_2 + k_1)$, por lo que $\lambda + \lambda_2 \in A_{y_1}$, de donde se sigue el resultado.

A partir de g^K y dado $y \in R^m$, introducimos otra función:

Definición 6

Se define $g_y^K: R^m \to R$ por $g_y^K(y') = g^K(y' - y)$.

Podemos dar ya las caracterizaciones prometidas:

Teorema 4

Sea K un cono convexo apuntado y consideremos el problema [1]. Sea $x^* \in X$:

a) Supongamos que K es cerrado. Entonces x^* es solución K-maximal de [1] syss x^* es solución única de

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & g_y^K(f(x)) \\ \text{s.a} & x \in X \end{array} \qquad [5]$$

para algún $y \in R^m$.

b) x^* es solución débilmente K-maximal de [1] syss x^* es solución de

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & g_y^K(f(x)) \\ \text{s.a} & x \in X \end{array}$$

c) Si x^* es solución fuertemente K-maximal de [1], entonces x^* es solución de

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & g_y^{K_\varepsilon}(f(x)) \\ \text{s.a} & x \in X \end{array}$$

para todo $y \in R^m$. El recíproco es cierto si K es cerrado.

d) Supongamos que K es cerrado. x^* es solución propiamente K-maximal de [1] syss x^* es solución única de

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & g_y^{K_\varepsilon}(f(x)) \\ \text{s.a} & x \in X \end{array}$$

para algún cono K_ε cerrado y convexo tal que $\text{int}(K_\varepsilon) \supset K$ y algún $y \in R^m$.

Demostración

a) Si x^* es K-maximal, para todo $x \in X \setminus \{x^*\}$ es $f(x) - f(x^*) \notin K$. Por ser K cerrado, $g^K(f(x) - f(x^*)) < g^K(0) = g^K(f(x^*) - f(x^*))$ resultando así que x^* es solución única, para $y = f(x^*)$, de [5].

Recíprocamente, si x^* fuera solución única de [5] para cierto $y \in R^m$ y no fuera K-maximal, existiría $x \in X \setminus \{x^*\}$ tal que $f(x) \in f(x^*) + K$ con lo que $f(x) - y \in (f(x^*) - y) + K$ y $g_y^K(f(x)) \geqslant g_y^K(f(x^*))$, contra la primera hipótesis.

b) El directo se muestra de forma análoga utilizando el corolario 1*c* para probar que no existe una solución con valor mayor que

x^* para $y = f(x^*)$. El recíproco se demuestra también análogamente utilizando el teorema 3*b* en lugar del 3*a*.

c) Si x^* es fuertemente K-maximal, para cualesquiera $x \in X \backslash \{x^*\}$ e $y \in R^m$ resulta $f(x^*) - y \in (f(x) - y) + K$ con lo que $g_y^K(f(x^*)) \geqslant g_y^K(f(x))$.

Recíprocamente, si no fuera fuertemente K-maximal existiría $z \in X \backslash \{x^*\}$ tal que $f(x^*) - f(z) \notin K$. Si consideramos el problema [5] con $y = f(z)$ entonces, por ser K cerrado, $g_y^K(f(x^*)) < g_y^K(f(z))$, contra la hipótesis.

d) Es consecuencia inmediata de los teoremas 1 y 4*a*.

Los siguientes resultados se refieren a los problemas [4] y luego se particularizarán a los problemas [2] y [3]. Supondremos aquí que K es cerrado. La motivación es que se ha introducido una función de valor vectorial $v: f(X) \rightarrow R^l$, con $l < m$, reduciéndose así la dimensión del problema. Consideremos pues el problema [4]:

Teorema 5

Sea $x^* \in X$. Entonces:

a) Si x^* es solución maximal de [4] y v es fuertemente K-creciente en X, x^* es K-maximal.

b) Si x^* es solución maximal de [4] y v es estrictamente K-creciente en X, x^* es débilmente K-maximal.

c) x^* es solución fuertemente K-maximal de [1] syss x^* es solución maximal de [4] para toda función v K-creciente.

d) Si x^* es solución maximal de [4] y v es fuertemente K_ε-creciente para cierto cono K_ε cerrado convexo tal que $int(K_\varepsilon) \supset K$, x^* es propiamente K-maximal.

Demostración

a) Supongamos que no lo fuera, existiría $x \in X$ tal que $f(x) \in f(x^*) + K$ por lo que $v(f(x^*)) \leqslant v(f(x))$, contra la hipótesis.

b) Demostración análoga.

c) El directo se demuestra en forma análoga. Para el recíproco puede razonarse por contradicción utilizando las funciones de las caracterizaciones.

d) Por el teorema 5*a*, x^* es K_ε-maximal. Por el teorema 1, es propiamente K-maximal.

Los teoremas se extienden de forma sencilla a modelos de compromiso vectoriales sin más que considerar la función de valor vectorial $v(f(x)) = -\rho(f(x),y^*)$ donde ρ es la pseudodistancia considerada e y^* el punto ideal elegido. También se extienden de forma inmediata al caso escalar, esto es, a los casos de funciones de valor y de distancia escalares.

Ejemplo 1. Sea $X = \{x{:}x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leqslant 1\}$, $f = \mathrm{id}$, $K = \{x{:}x_3 \geqslant 0,\ x_1^2 + x_2^2 \leqslant x_3^2\}$, $v = (0,\ 0,\ 1)$. Dado $y = (a,\ b,\ c) \in R^3$ puede comprobarse que:

$$\lambda_y = c - \sqrt{a^2 + b^2}$$

de forma que si $\varphi(\lambda) = \lambda$, entonces $g^K(y) = \lambda_y$ según lo hemos definido antes.

Como puede sospecharse, el cálculo de la función g^K resulta complicado en el caso general, sin embargo, puede obtenerse un resultado más sencillo en el caso de conos poliédricos, que es el más habitual en las aplicaciones.

4. CARACTERIZACIONES DE PUNTOS *K*-MAXIMALES CUANDO *K* ES UN CONO POLIEDRICO

Supondremos ahora que nuestro cono es $K = \{y \in R^m{:}Ay \geqq 0\}$ con A matriz $l \times m$ tal que $\ker A = \{y{:}\ Ay = 0\} = \{0\}$. Además, si escribimos $A = (a_i)_{i=1}^{i=l}$, supondremos que existe y tal que $0 < Ay$, lo cual equivale a decir que $\mathrm{int}(K) \neq \phi$ pues los puntos de $\mathrm{int}(K)$ se caracterizan por verificar $a_i y > 0$, para $i = 1, \ldots, l$. El cono K trasladado a y^0 se escribe $y^0 + K = \{y{:}A(y - y^0) \geqq 0\}$. Tenemos entonces los siguientes resultados, que son adaptación del teorema 4:

Teorema 6

Consideremos el problema [1] y sea $x^* \in X$:

a) x^* es solución K-maximal de [1] syss x^* es solución única de un problema

$$\begin{aligned} &\text{máx} \quad (\min_i(a_i(f(x)-y))) \\ &\text{s.a} \quad x \in X \end{aligned} \qquad [6]$$

para algún $y \in R^m$.

b) x^* es solución débilmente K-maximal de [1] syss es solución de un problema

$$\begin{aligned} &\text{máx} \quad (\min_i(a_i(f(x)-y))) \\ &\text{s.a} \quad x \in X \end{aligned}$$

para algún $y \in R^m$.

c) x^* es solución fuertemente K-maximal de [1] syss es solución del problema

$$\begin{aligned} &\text{máx} \quad (\min_i(a_i(f(x)-y))) \\ &s.a \quad x \in X \end{aligned}$$

para todo $y \in R^m$.

Demostración

a) Sean $y = f(x^*)$ y $g(x) = \min_i(a_i(f(x)-f(x^*)))$; es $g(x^*) = 0$. Por ser x^* K-maximal, $f(x)-f(x^*) \notin K$, para $x \in X \setminus \{x^*\}$, por lo que existe i tal que $a_i(f(x)-f(x^*)) < 0$ de donde $g(x) < 0$ y x^* es solución única de [6] para ese y.

Recíprocamente, si x^* no fuera K-maximal existiría $x \in X \setminus \{x^*\}$ tal que $f(x)-f(x^*) \in K$, por lo que $z = (f(x)-y) - (f(x^*)-y) \in K$ y $a_i z \geqslant 0$ para todo $i = 1, ..., l$, es decir, $a_i(f(x) - y) \geqslant a_i(f(x^*)-y)$, contra la hipótesis de que x^* es solución única de [6] para el y del enunciado.

b) La demostración es análoga a la de *a)* utilizando la caracterización de los puntos de int(K).

c) La demostración es análoga a la del teorema 4*c* utilizando las ideas de 6*a*.

La caracterización de puntos propiamente K-maximales en este caso es la ya vista en el apartado anterior. Concluimos esta sección con un ejemplo adaptado de Yu (14) en el que aparecen este tipo de conos:

Ejemplo 2. Supongamos que tenemos un problema biobjetivo con $Y=f(X)$, y resulta aceptable la función de valor $v(y)=y_1+\lambda y_2$ pero el decisor es sólo capaz de precisar que $1 \leqslant \lambda \leqslant 3$. Entonces:

$$K=\left\{y:\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix} \geqq \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\right\}$$

y el tipo de problemas que se plantea es, por ejemplo:
$x^* \in X$ es K-maximal syss es solución única del problema

$$\begin{array}{ll}\text{máx} & (\text{mín}(f_1(x)+f_2(x)-y_1-y_2,\ f_1(x)+3f_2(x)-y_1-3y_2))\\ \text{s.a} & x \in X\end{array}$$

para algún $y \in R^m$.

Es sencillo reducir este caso al general según el procedimiento descrito en 3.

5. CARACTERIZACIONES DE PUNTOS MAXIMALES

El concepto inicial de toda esta teoría es el de punto maximal, introducido por Pareto y de uso frecuente entre los economistas. El problema de su caracterización ha sido tratado bastante en la literatura, ver, por ejemplo, Chankong y Haimes (3). Utilizando las ideas anteriores podemos introducir una caracterización diferente, sin más que tener en cuenta que una matriz que define al cono $K=R^m_+$ es I, y deducir en consecuencia las funciones correspondientes. Como ejemplo damos el siguiente resultado:

Teorema 7

Una alternativa $x^* \in X$ es solución maximal del problema [1] syss es solución única de un problema

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & (\min_i(f_i(x) - y_i)) \\ \text{s.a} & x \in X \end{array} \qquad [7]$$

para algún $y \in R^m$.

El resto de resultados se obtiene de forma análoga: para soluciones débilmente (fuertemente) maximales requerimos que x^* sea solución de [7] para algún (todo) $y \in R^m$. El principal interés del teorema 7 es que no se exige que sea punto ideal, esto es, $y_i \geqslant f_i(x)$ $i = 1, ..., m$ para todo $x \in X$, con lo que se tiene una caracterización realmente general.

También se siguen fácilmente los resultados referidos a funciones de valor crecientes.

Ejemplo 3. Dos resultados clásicos son:

- Si $x^* \in X$ es solución óptima de máx $\sum_{i=1}^{n} t_i f_i(x)$ s.a $x \in X$, con $t_i > 0$, $i = 1, ..., m$, x^* es maximal.
- Si $x^* \in X$ es solución óptima de máx $\sum_{i=1}^{n} t_i f_i(x)$ s.a $x \in X$, con $t_i \geqslant 0$, y algún $t_i > 0$, $i = 1, ..., m$, x^* es débilmente maximal.

Ambos resultados son consecuencia de la aplicación de los teoremas *5a* y *5b*.

Ejemplo 4. En R^2_+ sea $X = \{x:(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \leqslant 1\} \bigcup \{x:x_1 \leqslant 2, x_2 \leqslant 1\} \bigcup \{x:x_1 \leqslant 1, x_2 \leqslant 2\}$ y $f = \text{id}$. Así, por ejemplo, x^* es maximal syss es solución única de un problema máx(mín$(x_1 - y_1, x_2 - y_2)$) s.a $x \in X$, para algún $y \in R^2$. En este caso:

- el conjunto de puntos maximales es $M = \{x:(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 = 1, x_1 \geqslant 1, x_2 \geqslant 1\}$,
- el conjunto de débilmente maximales es $M_d = M \bigcup \{x \in X: x_1 = 2$ ó $x_2 = 2\}$,
- el de propiamente maximales es $M_p = M \setminus \{1, 2), (2, 1)\}$,
- no hay puntos fuertemente maximales.

6. APLICACIONES Y CUESTIONES PRACTICAS

Analizamos aquí brevemente algunas aplicaciones de los resultados anteriores en problemas de programación multiobjetivo.

6.1. Un test de maximalidad

Si en el problema [7] hacemos $y=f(x^*)$, disponemos de un procedimiento para contrastar la maximalidad de x^*: sea $z<\infty$ el valor óptimo del problema:

- si $z>0$, entonces x^* no es maximal,
- si $z=0$, entonces x^* es débilmente maximal; si además, x^* es solución única, x^* es maximal.

Este test puede tener aplicaciones en los algoritmos que requieran comprobar en algún momento si un punto es maximal o necesiten un punto de ese tipo, pues las soluciones de ese problema son al menos débilmente maximales.

6.2. Condiciones de Fritz-John para la maximalidad

El problema [7] puede plantearse en la forma

$$\begin{aligned} &\text{máx } t \\ &\text{s.a } t \leqslant f_i(x)-y_i,\ i=1,\ \dots,\ m \\ &x \in X \end{aligned}$$

lo que permite estudiar algunas cuestiones analíticas como sensibilidad, condiciones de Kuhn-Tucker, ... En lo que sigue supondremos que $X = \{x{:}g_i(x)\leqslant 0,\ i\in\{1,\ \dots,\ k\},\ h_i(x)=0,\ i\in\{1,\ \dots,\ l\},\ x\in S\}$ siendo $S\neq\phi$ y S abierto.

Se establece el siguiente resultado que puede considerarse como de condiciones de Fritz-John para la maximalidad de $x^*\in X$:

Teorema 8

Supongamos que $x^* \in X$ es solución maximal de [1] y sea $I = \{i{:}g_i(x) = 0\}$. Supongamos que g_i es continua en x^*, para $i \notin I$, y g_i es diferenciable en x^*, para $i \in I$, que los objetivos son diferenciables en x^* y las l funciones h_i son diferenciables con continuidad en x^*. Existen entonces escalares u_i, $i \in \{1, ..., m\}$, v_i, $i \in I$, w_i, $i \in \{1, ..., l\}$ tales que $u_i \geqslant 0$, $v_i \geqslant 0$, (u, v_I, $w) \neq (0, 0, 0)$ y $\sum_{i=1}^{m} u_i \nabla f_i(x^*) = \sum_{i=1}^{l} w_i \nabla h_i(x^*) + \sum_{i \in I} v_i \nabla g_i(x^*)$.

Demostración

Si x^* es solución maximal de [1] entonces $(0, x^*)$ es solución óptima del problema

$$
\begin{aligned}
&\text{mín}(-t)\\
&\text{s.a } t - f_i(x) + f_i(x^*) \leqslant 0 \quad , \quad i \in \{1, ..., m\}\\
&\quad g_i(x) \leqslant 0 \quad , \quad i \in \{1, ..., k\}\\
&\quad h_i(x) = 0 \quad , \quad i \in \{1, ..., 1\}\\
&\quad x \in S,
\end{aligned}
$$

por lo que podemos establecer las condiciones de Fritz-John para esa solución de este problema, que son (Bazaraa, (1)):

Existe $(u_0, u, v, \mathrm{w}) \neq (0, 0, 0, 0)$ con u_0, u_i, $v_j \geqslant 0$, para $i \in \{1, ..., m\}$, $j \in I$, tales que

$$
u_0 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{1}^{m} u_i \begin{pmatrix} 1 \\ -\nabla f_i(x^*) \end{pmatrix} + \sum_{I} v_i \begin{pmatrix} 0 \\ \nabla g_i(x^*) \end{pmatrix} +
$$

$$
+ \sum_{i=1}^{l} w_i \begin{pmatrix} 0 \\ \nabla h_i(x^*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

Operando se obtiene la expresión del enunciado.

Imponiendo restricciones de calificación convenientes pueden obtenerse condiciones de Kuhn-Tucker, condiciones suficientes, ...

6.3. Algunos resultados sobre estabilidad

Una cuestión de interés en las aplicaciones es la determinación de puntos $y \in R^m$ para los que un punto maximal resuelve los problemas considerados. Algunos resultados en esta dirección son:

Teorema 9

Si x^* es solución K-maximal de [1] entonces x^* es solución del problema [5] para $y \in f(x^*) + [\{v\}]$. En particular, si x^* es solución maximal, x^* es solución del problema [7] para $y = f(x^*) + \lambda 1$, $\lambda \in R$.

Demostración

Basta ver que si 0 es solución K-maximal de $Z = f(X)$ para la aplicación identidad, entonces 0 es solución del problema

$$\begin{array}{l} \text{máx} g_y^K(z) \\ \text{s.a} \quad z \in Z \end{array}$$

para todo $y \in [\{v\}]$.

Ahora bien, si $y = \lambda_0 v$, será $g_y^K(0) = g^K(-\lambda_0 v)$; para cualquier otro punto $z \in Z$ será $g_y^K(z) = g^K((\lambda_z \div \lambda_0)v)$ con $\lambda_z < 0$ de donde se sigue el resultado. La segunda parte se demuestra de forma análoga.

7. CONCLUSIONES

Hemos introducido una forma de escalarización que permite caracterizar de manera general los principales conceptos de óptimo en optimización multiobjetivo. La idea sencilla que se ha aplicado en los distintos apartados es la de encontrar funciones cuyas curvas de isovalor sean «formalmente» como la frontera del cono de ordenación considerado; su simplicidad permite algunas aplicaciones interesantes en programación multiobjetivo como es la de obtener condiciones de maximalidad de forma sencilla (comparar, por ejemplo, con Lin (8)). Una cuestión de interés es aplicar el test de maximalidad obtenido en sustitución de otros empleados en algoritmos conocidos; en este sentido estamos desarrollando una versión mejorada del simplex multiobjetivo de Philip.

También hemos estudiado algunos conceptos de monotonía que conducen a dar tal propiedad como aceptable para una función de valor: tales resultados son útiles para un estudio fundamentado de los métodos secuenciales y modelos de compromiso antes aludidos. Es interesante señalar que con sólo esa propiedad como hipótesis es posible introducir un nuevo algoritmo para resolver el problema [2] lo que será objeto de un trabajo próximo.

Otros problemas abiertos de interés son el estudio de funcionales más habituales de tipo exponencial, potencial, ..., como aproximación a los introducidos y la continuación del estudio de cuestiones de estabilidad.

REFERENCIAS

(1) BAZARAA, C., y SHETTY, M. (1979): *Nonlinear Programming,* John Wiley.

(2) BENSON, H. (1979): «An Improved Definition of Proper Efficiency for Vector Maximization with Respect to Cones», *Journ. of Mathem. Analysis and Applic.,* **71**,232-241.

(3) CHANKONG, V., y HAIMES, Y. (1983): *Multiobjective Decision Making,* North Holland.

(4) ESCHENAUER, K. (1986): «Vector Optimization Problems in Structural Mechanics», *Int. Conference Vector Optimization,* Darmstadt.

(5) GOICOECHEA, A.; HANSEN, D., y DUCKSTEIN, L (1982): *Multiobjective Decision Analysis,* John Wiley.

(6) JAHN, J. (1985): «Some Characterisations of the Optimal Solutions of a Vector Optimisation Problem», *OR-Spektrum,* **7**,7-18.

(7) KEENEY, R., y RAIFFA, H. (1976): *Multiobjective Decision Making,* John Wiley.

(8) LIN, J. G. (1976): «Maximal Vectors and Multiobjective Optimization», *JOTA,* **18**,41-64.

(9) NIEUWENHUIS, J. (1981): «Properly Efficient and Efficient Solutions for Vector Maximization Problems in Euclidean Space», *Journ. of Mathem. Analysis and Applications,* **84**,311-317.

(10) RIOS-GARCIA, S., y RIOS-INSUA, S. (1986): «Vector Value Function and Vector Distance Methods In Multicriteria Optimization», *Int. Conf. Vector Optimization, Darmstadt.*

(11) SAWARAGI, Y.; NAKAYAMA, H., TANINO, T. (1985): *Theory of Multiobjective Optimization*, Academic Press.
(12) STADLER, W. (1984): *Applications of Multicriteria Optimization in Engineering and in the Sciences.* En MCDM, Past Decade and Future Trends (ed. Milan Zeleny).
(13) STERNA-KARWAT, A. (1986): «On the Existence of cone-efficient points», *Int. Conf. Vector Optimization*, Darmstadt.
(14) YU, P. L. (1985): *Multiple Criteria Decision Making*, Plenum Press.