TRABAJOS DE
INVESTIGACION OPERATIVA
Vol. 2. Núm. 1, 1987, pp. 3 a 20

EL PROBLEMA DEL ARBOL MINIMAL PARA GRAFOS DIFUSOS

M. Delgado
J. L. Verdegay
M. A. Vila
Departamento de Estadística e I. O.
Facultad de Ciencias
Universidad de Granada

RESUMEN

Basándonos en algunas definiciones previas, se analizan el problema del árbol generador difuso. En primer lugar se trata su existencia y después se encuentra el árbol generador difuso de mínimo costo mediante una descomposición por α-cortes. El estudio se realiza para dos estructuras diferentes de costos.

Palabras clave: grafo difuso; árbol generador difuso minimal; α-corte; número difuso.

Clasificación A.M.S.: 94D05, 68E10.

ABSTRACT

On the basis of previous definitions, the problem of spanning a fuzzy tree is analyzed. First we treat its existence and then spanning fuzzy tree of minimum cost is found by means of a α-out decomposition. We have done this with two different assumptions about the cost structure.

Key words: fuzzy graph, minimal spanning fuzzy tree, α-out, fuzzy number.

A.M.S. subject classifications: 94D05, 68E10.

1. INTRODUCCION

El problema del árbol generador de costo mínimo es clásico dentro de la Teoría General de Grafos. Supongamos un grafo no orientado con costos asociados a sus aristas, se trata de encontrar un árbol, grafo parcial del primero, que conecta todos sus vértices y tal que la suma de los costos de sus aristas sea mínimo. Existen algoritmos de cálculo bien conocidos que resuelven este problema (Berge (1968), Christofides (1975)).

Son hipótesis de este problema el conocimiento preciso del grafo en cuestión y de los costos asociados a las aristas. No obstante hay muchos casos reales que no pueden ser representados mediante un grafo clásico, sino que necesitan un grafo difuso para su modelización. En estos casos también se pueden plantear problemas de conexión que conduzcan a la búsqueda del árbol generador de costo mínimo, que será naturalmente un árbol difuso subgrafo del grafo inicial.

El objetivo de este trabajo es el estudio de este problema. Para ello haremos uso de la definición de grafo difuso de Rosenfeld (1975) y de las definiciones de árbol difuso de Delgado, Verdegay y Vila (1984).

En la primera parte del trabajo abordaremos el problema de la existencia de árboles difusos generadores para un grafo difuso. En la segunda supondremos que existen costos asociados a las aristas utilizando la representación por α-cortes del grafo para tratar el problema del árbol generador de costo mínimo.

2. NOTACION Y DEFINICIONES BASICAS

2.1. Conceptos generales sobre grafos difusos

Un *grafo difuso* (f-grafo) es la estructura $G=(X, \sigma, \mu)$ donde X es el conjunto referencial de nodos, σ: $X \to [0, 1]$ es la función de pertenencia del conjunto difuso de nodos y μ: $X \times X \to [0, 1]$ es una relación difusa que define el conjunto de arcos. Se impone que

$$\mu(x, y) \leqslant \sigma(x) \wedge \sigma(y) \quad ; \quad \forall x, y \in X$$

Un grafo difuso se dice *finito* si X es finito y *simétrico* si μ es una relación difusa simétrica.

Se define *subgrafo difuso* de G como un f-grafo $H=(X, \tau, \nu)$ tal que

$$\tau(x) \leqslant \sigma(x)$$
$$\nu(x, y) \leqslant \mu(x, y)$$

El α-*corte* de un f-grafo $G=(X, \sigma, \mu)$ es el grafo clásico $G^{\alpha}=(X^{\alpha}, U^{\alpha})$, donde X^{α} es el α-corte de σ y U^{α} es el de μ, considerada como un subconjunto difuso de $X \times X$.

Nota.—En lo sucesivo consideraremos f-grafos simétricos y finitos.

2.2. Conexión de un f-grafo

Sea $G=(X, \sigma, \mu)$ un f-grafo, $\mu^{n}(x, y)$ la composición n veces de la relación μ consigo misma según los operadores máx-mín y la relación difusa dada por:

$$\mu^{\infty}(x, y)=\bigvee_{n} \mu^{n}(x, y) \quad ; \quad \forall x, y \in X$$

Definimos *nivel de conexión* del grafo G, $C(G)$, como

$$C(G)=\inf_{x \neq y} \mu^{\infty}(x, y)$$

y diremos que G es *conexo* sii $C(G)>0$. Es fácilmente comprobable que G^{a} es conexo (en sentido clásico) para todo $a \leqslant C(G)$.

Diremos también que G es *débilmente conexo* si algún a-corte de G es conexo en sentido clásico, es decir:

$$\exists\, \bar{a} \in (0, 1]/G^{a} \text{ es conexo} \Leftrightarrow \inf_{\substack{x \neq yy \\ x, y \in X^{\bar{a}}}} \mu^{\infty}(x, y) \geqslant \bar{a}$$

2.3. ALGUNAS DEFINICIONES DE ARBOL DIFUSO (f-árbol)

Dado un grafo difuso $G=(X, \sigma, \mu)$ se define la *función ciclomática* como una aplicación h_G: $[0, 1] \rightarrow Z^{+} \cup \{0\}$ tal que $h_G(a)$ es el número ciclomático de G^{a}.

A partir de $h_G(\cdot)$ se puede definir el *nivel de no-ciclaje* de un grafo difuso $S(G)$ en los siguientes términos:

$$S(G)=\inf\{a/h_G(a)=0\}$$

si no existe $a \in [0, 1]$ tal que $h_G(a)=0$ se hace $S(G)=\infty$.

Haciendo uso de los niveles de conexión y no-ciclaje se pueden dar las siguientes definiciones de árbol difuso (f-árbol):

Arbol difuso total: $C(G)>0$ y $S(G)=0$
Arbol difuso completo: $C(G)>0$ y $S(G)<C(G)$
Arbol difuso débil: G es débilmente conexo y $S(G)>\overline{a}$, siendo G^a conexo en sentido clásico.

Puede comprobarse que *total* $\Rightarrow$ *completo* $\Rightarrow$ *débil.* También se puede comprobar que un f-árbol total es aquel grafo cuyas aristas con grado de pertenencia no nulo forman un árbol en sentido clásico; un f-árbol completo es aquel que tiene un a-corte que es un árbol y cuyo conjunto de nodos coincide con el referencial y un f-árbol débil es aquel que tiene un a-corte que es un árbol en sentido clásico.

Más detalles sobre el tema pueden encontrarse en Delgado, Verdagay y Vila (1984).

3. EL PROBLEMA DE LA EXISTENCIA DE UN *F*-ARBOL GENERADOR

Desde el punto de vista clásico un árbol generador de un grafo es un subgrafo del mismo que es un árbol. Todo grafo conexo admite al menos un árbol generador. En este apartado vamos a generalizar el problema al caso difuso.

Definición 3.1

Sea un grafo difuso $G=(X, \sigma, \mu)$, G admite un f-árbol generador si existe $F=(X, \sigma, \nu)$ subgrafo de G tal que F es un f-árbol.

Al problema de qué condiciones debe cumplir G para que admita un f-árbol generador responden los siguientes resultados:

Propiedad 3.1

Condición necesaria y suficiente para que el grafo difuso $G=(X, \sigma, \mu)$ admita un f-árbol generador total es que sea conexo. En efecto:

a) Condición necesaria. Sea $F=(X, \sigma, v)$ un f-árbol total subgrafo de G. Por definición:

$$C(F)>0 \quad ; \quad v(x, y)\leqslant \mu(x, y) \quad ; \quad \forall x, y\in X$$

De la segunda desigualdad:

$$v^{\infty}(x, y)\leqslant \mu^{\infty}(x, y) \quad ; \quad \forall x, y\in X$$

lo que implica:

$$C(G)\geqslant C(F)>0$$

por tanto, G es conexo.

b) Condición suficiente. Sea $C(G)=a>0$. De acuerdo con las propiedades de $C(G)$, G^a es conexo en sentido clásico y, por tanto, admitirá un árbol generador F^a. Construimos ahora el f-árbol $F=(X, \sigma, v)$ de la siguiente manera:

$$v(x, y)=\begin{cases}\mu(x, y) & \text{si} \quad (x, y)\in F^a \\ 0 & \text{caso contrario}\end{cases}$$

obviamente F es un f-árbol total que es subgrafo de G.

Propiedad 3.2

Condición necesaria y suficiente para que el grafo difuso $G=(X, \sigma, \mu)$ admita un árbol generador débil es que sea débilmente conexo. En efecto:

a) Condición necesaria. Sea $F=(X, \sigma, v)$ un *f*-árbol generador débil; por definición F es débilmente conexo y, por tanto, existe $a\in(0, 1]$ tal que

$$\inf_{\substack{x\neq y \\ x,\, y\in X_a}} v^{\infty}(x, y)\geqslant a$$

Puesto que:

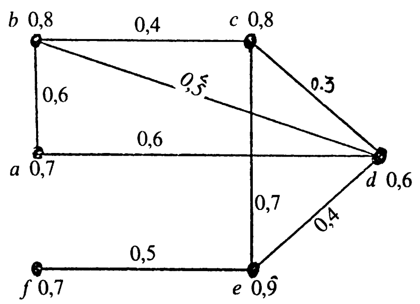
$$v(x, y)\leqslant\mu(x, y) \quad ; \quad \forall\, x,\ y\in X$$

la condición anterior también se verifica para $\mu(...)$ y por tanto, G es débilmente conexo.

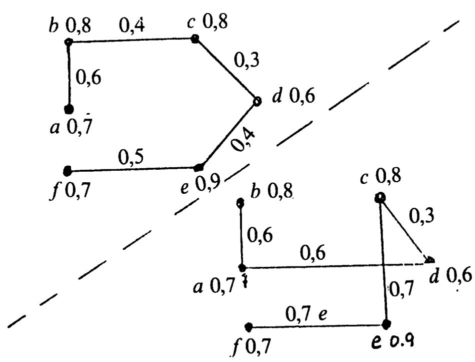
b) Condición suficiente. Si G es débilmente conexo, entonces existe $a\in(0, 1]$ tal que G^a es conexo. Podemos obtener un *f*-árbol generador débil de G por un procedimiento similar al de 3.1.*b* usando a en lugar de $C(G)$.

Ejemplo 1

f-grafo inicial



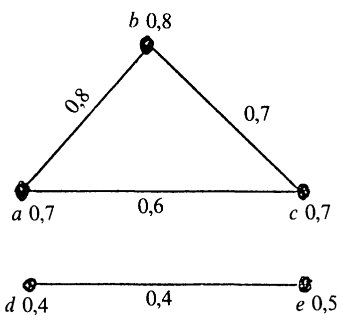
f-árboles generadores totales



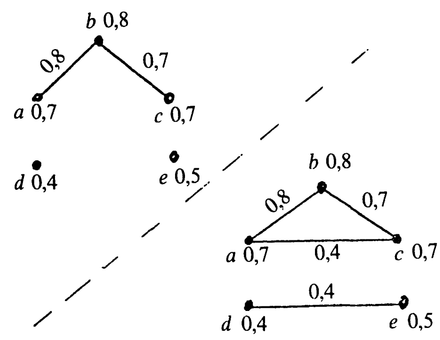
Nota.—Es obvio que en la mayoría de los casos no existe un único *f*-árbol generador para un *f*-grafo dado. Esto puede verse en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 2

f-grafo inicial



f-árboles generadores débiles



De la demostración de la propiedad 3.1.*a* podemos deducir como resultado adicional:

Propiedad 3.3

Sea G un *f*-grafo conexo con nivel de conexión $C(G)$ y F un *f*-árbol total que es generador de G, con nivel de conexión $C(F)$, entonces:

$$C(F) \leqslant C(G)$$

4. *f*-ARBOL GENERADOR MINIMO CON COSTOS CONSTANTES

Supongamos que existe una función de costo definida sobre las aristas de un *f*-grafo. Se plantea ahora el problema de calcular un *f*-

árbol generador de costo mínimo. En lo sucesivo supondremos f-árboles conexos, por lo que calcularemos f-árboles generadores totales.

Obviamente habrá que hacer algunas hipótesis sobre la función de costo antes mencionada. Dado que está definida sobre el conjunto de aristas de un f-grafo, parece razonable suponer que existe una cierta imprecisión sobre ella. Por tanto, partiremos de la siguiente idea:

> «Si el grado de pertenencia de cualquier arista (x, y) es $\mu(x, y)$, es decir, esta arista no existe en ningún a-corte tal que $a>\mu(x, y)$, su costo asociado debe ser una cantidad difusa cuya función de pertenencia tenga como valor máximo $\mu(x, y)$.»

En este apartado vamos a estudiar el problema suponiendo que los costos no varían en el rango de pertenencia para el que existen. Hemos llamado a este caso de *costos constantes;* en él se supone que los costos son números reales afectados de un nivel de pertenencia *(singletons).*

4.1. El problema

Sea $G=(X, \sigma, \mu)$ un f-grafo finito y conexo. Supondremos además que existe una función $r(.,.)$ tal que r: $X\times X\rightarrow\mathbb{R}\times[0, 1]$ de forma que:

$$\forall(x, y)/\mu(x, y)>0 \Rightarrow r(x, y)=(r_{xy}, \mu(x, y))$$

Sobre este modelo el problema del árbol generador de costo mínimo se puede plantear con dos enfoques distintos:

a) Encontrar este f-árbol sin tener en cuenta los grados de pertenencia. Es decir, queremos construir $F=(X, \sigma, \sigma)$ f-árbol subgrafo de G tal que cualquier $F'=(X, \sigma, v')$ con las mismas propiedades verifique:

$$\sum_{(x,\, y)\in A^F} r_{xy} \leqslant \sum_{(x,\, y)\in A^{F'}} r_{xy}$$

donde

$$A^F=\{(x, y)/v(x, y)>0\} \quad ; \quad A^{F'}=\{(x, y)/v'(x, y)>0\}$$

b) Tener en cuenta los grados de pertenencia. El problema *a*) es demasiado simple para ser aplicado en algunos modelos concretos. Hay que tener en cuenta que no se impone ninguna condición sobre el máximo nivel de pertenencia para el cual el *f*-árbol existe como tal, y que es obviamente su nivel de conexión. Se plantea entonces el problema de encontrar el *f*-árbol de costo mínimo cuyo nivel de conexión sea mayor que un cierto valor de pertenencia dado; o encontrar el árbol generador de costo mínimo cuyo nivel de conexión sea máximo, es decir, igual a $C(G)$.

El siguiente algoritmo, basado en la representación por α-cortes, dará respuesta a ambos planteamientos.

4.2. Algoritmo de resolución vía representación por α-cortes

Sean $G=(X, \sigma, \mu)$ y la función de costos $r(.,.)$, definidos en el apartado anterior. Notaremos por $\{S_i\}$, $i=1, 2, ..., m$, la sucesión de niveles de pertenencia definida de la siguiente manera:

$$a \in \{S_i\} \Leftrightarrow \exists\,(x, y) \in X \times X$$

tal que:

$$0 < \mu(x, y) \leqslant C(G) \quad ; \quad \mu(x, y) = a$$

Supondremos, además, que

$$S_1 < S_2 < \cdots < S_m$$

y, obviamente, $S_m = C(G)$.

Con base $a \in \{S_i\}$, puede construirse una sucesión de *f*-árboles generadores totales para G, $\{F_j\}$, $j=1, 2, ..., h$, mediante el siguiente algoritmo:

1. Hacer $k=1$, $j=1$.
2. Hacer $S_k = a$. Sea $G^a=(X, U^a)$ a-corte de G. De acuerdo con la forma de la función $r(.,.)$, cualquier $(x, y) \in U^a$ tendrá un costo asociado r_{xy}.
3. Construir el árbol generador de costo mínimo de G^a por algún

algoritmo conocido (por ejemplo, el algoritmo de Kruskal). Sea $F^a=(X, V^a)$ este árbol.

4. Definimos $F_k=(X, \sigma, v_k)$, f-subgrafo de G como sigue:

$$v_k(x, y)=\begin{cases}\mu(x, y) & \text{si} \quad (x, y)\in V^a \\ 0 & \text{en caso contrario}\end{cases}$$

5. Si $k=1$, hacer $F_j=F_k$ e ir a 7. En caso contrario, ir a 6.
6. Si existe $q\in\{1, ..., j\}$ tal que $F_k=F_q$, ir a 7. En caso contrario, hacer $j=j+1$, $F_j=F_k$ e ir también a 7.
7. Si $k=m$, parar. En caso contrario, hacer $k=k+1$ e ir a 2.

Como puede deducirse de la descripción del algoritmo, éste calcula el árbol generador de costo mínimo para cada a-corte de G que lo mantiene conexo y supone una variación, a partir del cual se obtiene un f-árbol generador total para G. Esto se hace en los pasos 2 a 4, los pasos 5 y 6 están destinados a conseguir una sucesión de f-árboles distintos entre sí.

La sucesión $\{F_j\}$, $j=1, 2, ..., h$, así obtenida cumple las siguientes propiedades.

Propiedad 4.1

Para cualquier $a\in(0, C(G)]$ existe $j\in\{1, ..., h\}$ tal que F_j es el f-árbol generador total de mínimo costo con nivel de conexión mayor o igual que a.

En efecto, de acuerdo con la construcción de la sucesión $\{S_k\}$, para cualquier $a\in(0, C(G)]$ existe $k\in\{1, ..., m\}$ tal que $G^a=G^{S_k}$, cumpliéndose además que $S_k\geqslant a$.

Por otra parte, de acuerdo con la construcción hecha, $C(F_k)\geqslant S_k$ y además existe $j\in\{1, ..., h\}$ tal que $F_k=F_j$.

Esta última afirmación prueba la propiedad.

Son consecuencias inmediatas de la propiedad 4.1 las siguientes.

Propiedad 4.2

F_1 es el f-árbol generador total de costo mínimo para G.

Propiedad 4.3

F_h es el árbol generador total de intensidad máxima y costo mínimo para G.

Las propiedades 4.1, 4.2 y 4.3 prueban que la sucesión $\{F_j\}$ resuelve el problema planteado en el apartado anterior en sus versiones *a*) y *b*).

Otra propiedad interesante de $\{F_j\}$ es la siguiente.

Propiedad 4.4

Si existe un árbol generador de costo mínimo para cualquier a-corte de G, entonces cualquier arista perteneciente a un F_j se mantiene en la sucesión hasta que desaparece de los a-cortes, es decir, si $v_j(x, y) \neq 0$, $j \in \{1, ..., h\}$, entonces $v_{j'}(x, y) \neq 0$ para cualquier j' tal que $j < j' < h$ y $\mu(x, y) \geqslant C(F_{j'})$.

En efecto, supongamos $(\overline{x}, \overline{y})$ tal que $v_j(\overline{x}, \overline{y}) \neq 0$ y sea j' con las condiciones anteriores. De acuerdo con el algoritmo de construcción, existen $a, b \in \{S_k\}$ tales que $a < b$, $C(F_j) = a$ y $C(F_{j'}) = b$. Por supuesto, $(\bar{x}, \bar{y})$ pertenece a G^a, G^b y F^a.

Consideremos ahora que $(\overline{x}, \overline{y}) \notin F^b$ y sea el grafo $F^b \cup \{(\overline{x}, \overline{y})\}$; de acuerdo con la teoría de árboles existe en este grafo un ciclo γ al que pertenece $(\overline{x}, \overline{y})$ y tal que $r_{xy} \leqslant r_{\overline{x}\overline{y}}$, $\forall (x, y) \in \gamma$, ya que en caso contrario F^b no sería de mínimo coste.

Además existirán aristas $(\hat{x}, \hat{y}) \in \gamma$ tal que $(\hat{x}, \hat{y}) \notin F^a$, ya que en caso contrario $\gamma \subset F^a$ y éste no sería árbol. Sin embargo, $\gamma \subset G^a$ y existe un camino uniendo $\hat{x}$ con $\hat{y}$ cuyas aristas pertenecen a F^a.

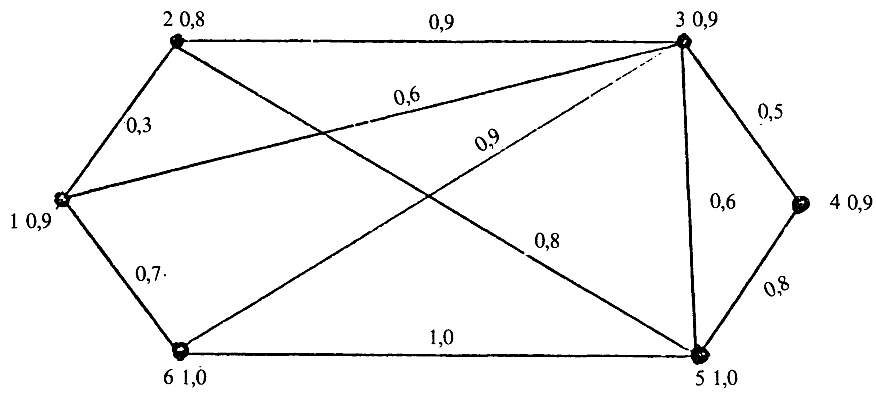
En definitiva, se puede sustituir cada arista de γ que no pertenezca a F^a por un conjunto de aristas de este árbol, manteniendo la unión entre los dos vértices. Esto conduce a la construcción de un ciclo en F^a, lo que es imposible.

El significado intuitivo de esta propiedad es que una arista que entra a formar parte de un árbol generador de mínimo coste se mantiene mientras lo admita su pertenencia. Esto tiene sentido, ya que la estructura de costos del grafo no varía realmente con la pertenencia.

Un ejemplo de aplicación del algoritmo 4.2 es el siguiente.

Ejemplo 3

Sea el *f*-grafo



La matriz de costos que constituyen la base de los *singletons* es:

$$\begin{vmatrix} x & 10 & 4 & x & x & 5 \\ 10 & x & 4 & x & 6 & x \\ 4 & 4 & x & 3 & 8 & 7 \\ x & x & 3 & x & 4 & x \\ x & 6 & 8 & 4 & x & 9 \\ 5 & x & 7 & x & 9 & x \end{vmatrix}$$

El nivel de conexión es de 0,80 y la sucesión de árboles generadores de costo mínimo está definida por los siguientes subconjuntos difusos de aristas:

F_1: $v_1 = \{(1,\ 3)/.9,\ (1,\ 6)/.7,\ (2,\ 3)/.6,\ (4,\ 3)/.5,\ (4,\ 5)/.8\}$

F_2: $v_2 = \{(1,\ 3)/.9,\ (1,\ 6)/.7,\ (3,\ 6)/.6,\ (4,\ 5)/.8,\ (5,\ 2)/.8\}$

F_3: $v_3 = \{(1, 3)/.9, (1, 6)/.7, (4, 5)/.8, (5, 2)/.8, (6, 5)/1.\}$

F_4: $v_4 = \{(1, 3)/.9, (4, 5)/.8, (5, 2)/.8, (6, 5)/.1, (6, 3)/.9\}$

5. *f*-ARBOL GENERADOR CON COSTOS NO CONSTANTES

El modelo resuelto en el apartado anterior responde al siguiente planteamiento sobre los costos asociados al grafo:

«La arista (x, y), si existe, toiene costo r_{xy}.»

La generalización inmediata de este planteamiento sería:

«La arista (x, y), si existe, tiene un costo aproximado en torno a r_{xy}.»

Estas afirmaciones intuitivas pueden modelizarse suponiendo que los costos asociados a cada arista son números difusos $\tilde{r}_{xy}$, no normalizados de grado de pertenencia máximo $\mu(x, y)$.

Bajo estas hipótesis el planteamiento del problema es más complicado que en el caso anterior, ya que al problema de costo mínimo se añade la comparación y ordenación de números difusos. Existen diversas formas de ordenar números difusos, algunas de las cuales pueden verse, por ejemplo, en Bortolan y Degani (1985).

Se puede utilizar una modificación del algoritmo 4.2 si se emplea un procedimiento de ordenación que genere una relación de orden entre números difusos con ciertas propiedades adicionales; éstas son las siguientes.

Definición 5.1

Sea $\mathcal{N}$ el conjunto de números difusos reales no normalizados y $\mathcal{R}$ una relación de orden definida entre ellos. Decimos que $\mathcal{R}$ es *coherente con la suma* si y sólo si:

$$\forall \tilde{m}, \tilde{n}, \tilde{p}, \tilde{q} \in \mathscr{N} / \tilde{m} \mathscr{R} \tilde{n} \quad ; \quad \tilde{p} \mathscr{R} \tilde{q} \Leftrightarrow \tilde{m} \oplus \tilde{p} \mathscr{R} \tilde{n} \oplus \tilde{q}$$

donde $\oplus$ se toma en el sentido de Dubois y Prade (1980).

Definición 5.2

Sea G un f-grafo y $W(G) \subset \mathscr{N}$ el conjunto de sus costos, es decir:

$$\tilde{n} \in W(G) \Leftrightarrow \exists (x, y) \in X \times X / \mu(x, y) > 0 \quad ; \quad \tilde{n} = \tilde{r}_{xy}$$

decimos entonces que la relación de orden $\mathscr{R}$ es *total para el problema* si y sólo si:

$$\forall \tilde{m}, \tilde{n} \in W(G) \Leftrightarrow \exists \tilde{m} \mathscr{R} \tilde{n} \text{ o } \tilde{n} \mathscr{R} \tilde{m}$$

Realmente sólo si existe una relación de orden total y coherente con la suma para los costos $\tilde{r}_{xy}$ se puede hablar de f-árbol generador de coste mínimo y f-árbol generador de costo mínimo a una pertenencia dada, ya que el conjunto de costos a comparar es finito y, por tanto, tendrá un máximo y un mínimo. Pueden plantearse, pues, idénticos problemas a los considerados en los apartados *a*) y *b*) del párrafo 4.1.

Por otra parte, cualquier algoritmo de cálculo de árboles generadores de costo mínimo supone únicamente una ordenación previa de las aristas, por lo que el algoritmo que se describe en 4.2 es totalmente aplicable sin más que sustituir el paso 3 por el siguiente:

3'.1. Formar $W_a = \{\tilde{r}_{xy} / (x, y) \in U^a\}$. Ordenar W_a según $\mathscr{R}$.

3'.2. Construir el árbol generador mínimo de acuerdo con la ordenación anterior. Sea $F^a = (X, V^a)$ este árbol.

Debido a que la ordenación de los costos no depende de la intensidad de pertenencia a que se toman las aristas, todas las propiedades enunciadas para costos constantes se mantienen para el caso de ordenación total de los costos.

Algunos casos particulares de relaciones de orden son los siguientes:

a) Sobre el conjunto de intervalos reales se puede dar la siguiente relación de orden:

$$[a, b] R_1 [c, d] \Leftrightarrow a \leqslant c \quad ; \quad b \leqslant d$$

de aquí se puede establecer una relación de orden entre números difusos $\mathscr{R}_1$ de la siguiente manera:

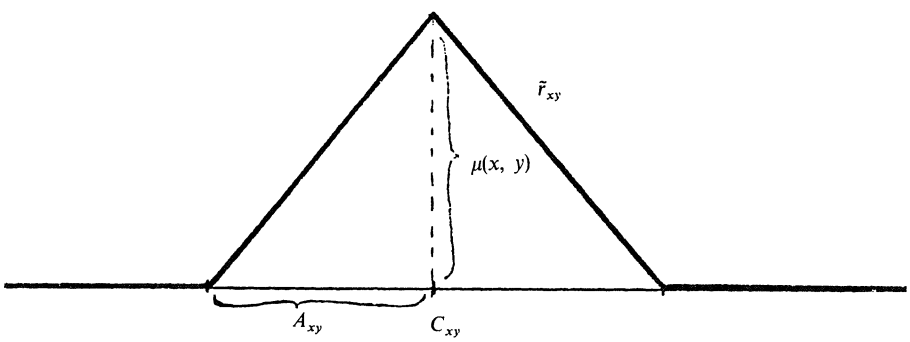
$$\tilde{m}, \tilde{n} \in \mathscr{N} \quad ; \quad \tilde{m} \mathscr{R}_1 \tilde{n} \Leftrightarrow \forall a \in (0, \bar{a}] \quad ; \quad m^a R_1 n^a$$

donde $\bar{a}$ es el mínimo de los niveles de pertenencia máximos de ambos números y m^a, n^a son los a-cortes correspondientes.

Es fácil probar que $\mathscr{R}_1$ es una relación de orden no total sobre $\mathscr{N}$ que es coherente con la suma. Podremos, pues, utilizar la modificación anterior del algoritmo para algún problema concreto donde $\mathscr{R}_1$ sea total. Este es el caso del siguiente ejemplo numérico.

Ejemplo 4

Si se considera el grafo del ejemplo 3, utilizando como costos números difusos triangulares cuyos centros vienen dados por la matriz C y sus amplitudes por la matriz A, es decir, los costos $\tilde{r}_{xy}$ tienen la siguiente representación gráfica:



siendo:

$$C = \begin{vmatrix} x & 8 & 20 & x & x & 17 \\ 8 & x & 15 & x & 2 & x \\ 20 & 15 & x & 13 & 5 & 25 \\ x & x & 13 & x & 22 & x \\ x & 2 & 5 & 22 & x & 27 \\ 17 & x & 25 & x & 27 & x \end{vmatrix}$$

$$A=\begin{vmatrix} x & 6 & 1 & x & x & 3 \\ 6 & x & 5 & x & 1 & x \\ 1 & 5 & x & 7 & 4 & 5 \\ x & x & 7 & x & 2 & x \\ x & 1 & 4 & 2 & x & 1 \\ 3 & x & 5 & x & 1 & x \end{vmatrix}$$

Puede comprobarse (gráficamente, por ejemplo) que $W(G)$ está totalmente ordenado con $\mathscr{R}_1$. Por aplicación del algoritmo anterior se obtiene la siguiente sucesión de *f*-árboles:

$$\begin{array}{ll} F_1: & v_1=\{(1,\ 3)/.9,\ (1,\ 6)/.7,\ (2,\ 5)/.8,\ (3,\ 4)/.5,\ (3,\ 5)/.6\} \\ F_2: & v_2=\{(1,\ 3)/.9,\ (1,\ 6)/.7,\ (2,\ 5)/.8,\ (3,\ 5)/.6,\ (4,\ 5)/.8\} \\ F_3: & v_3=\{(1,\ 3)/.9,\ (1,\ 6)/.7,\ (2,\ 5)/.8,\ (4,\ 5)/.8,\ (5,\ 6)/1.\} \\ F_4: & v_4=\{(1,\ 3)/.9,\ (2,\ 5)/.8,\ (4,\ 5)/.8,\ (3,\ 6)/.9,\ (5,\ 6)/1.\} \end{array}$$

b) Otras relaciones que se pueden dar entre los intervalos reales son:

$$[a,\ b]\,R_2\,[c,\ d] \Leftrightarrow a+b \leqslant c+d$$
$$[a,\ b]\,R_3\,[c,\ d] \Leftrightarrow b \leqslant d$$
$$[a,\ b]\,R_4\,[c,\ d] \Leftrightarrow a \leqslant c$$

Todas ellas son compatibles con la suma de intervalos y, de forma similar a $\mathscr{R}_1$, inducen relaciones en $\mathscr{N}$: $\mathscr{R}_2$, $\mathscr{R}_3$, $\mathscr{R}_4$. Estas son coherentes con la suma pero no totales. No obstante se demuestra fácilmente que:

— $\mathscr{R}_2$ es total sobre el conjunto $\mathscr{S} \subset \mathscr{N}$ de números difusos simétricos definido como:

$$\mathscr{S}=\{\tilde{m}/\exists\, m \in R;\ m^a=[m-r_a,\ m+r_a];\ \forall\, a \in [0,\ 1]\}$$

— $\mathscr{R}_3$ es total sobre el conjunto $\mathscr{A} \subset \mathscr{N}$ de números difusos con límite inferior constante, que se define como:

$$\mathscr{A}=\{\tilde{m}/\exists\, m \in R;\ m^a=[m,\ m+r^a];\ \forall\, a \in [0,\ 1]\}$$

— $\mathscr{R}_4$ es total para el conjunto $\mathscr{B} \subset \mathscr{N}$ de números difusos con límite superior constante que se define como:

$$\mathscr{B} = \{\tilde{m}/\exists\, m \in R;\ m^a = [m - r^a,\ m];\ \forall\, a \in [0,\ 1]\}$$

6. CONCLUSIONES

Partiendo de nuevas definiciones de árbol difuso, hemos analizado el problema del *f*-árbol generador. Con respecto a su existencia hay que hacer notar la gran similitud de los resultados obtenidos con la situación clásica, ya que la conexión aparece como condición necesaria y suficiente en ambos casos.

Las bases de nuestros desarrollos sobre el problema del *f*-árbol generador de costo mínimo han sido la representación por α-cortes y la hipótesis de imprecisión en los costos. Se obtiene entonces un algoritmo de resolución que es útil cuando los costos no varían con el nivel de pertenencia. En otras situaciones el problema está fuertemente relacionado con el método de ordenar números difusos que se vaya a usar. Sólo cuando este método conduce a una relación de orden coherente con la suma y total para el problema se puede formular una verdadera minimización. En estos casos el algoritmo anterior es válido también con pequeñas modificaciones. Algunos ejemplos prueban que las propiedades requeridas no son demasiado estrictas.

El problema de usar costos no totalmente ordenados, así como la aplicación de estas técnicas a nuevos problemas de teoría de grafos son los objetivos que nos planteamos para futuras investigaciones.

7. BIBLIOGRAFIA

BERGE, C. (1958): *Theorie des graphes et ses applications*, París, Dunod.

BORTOLAN, G., y DEGANI, R. (1985): «A review of sime methods for ranking fuzzy subsets», *Fuzzy Sets and Systems*, 15, 1-19.

CHRISTOFIDES, N. (1975): *Graph Theory. An Algorithmic Approach*, Londres, Academic Press.

DUBOIS, D., y PRADE, H. (1978): «Fuzzy real algebra», *Fuzzy Sets and Systems*, 2, 327-348.

— (1980): *Fuzzy Sets and Systems. Theory and Applications,* Nueva York, Academic Press.

DELGADO, M.; VERDEGAY, J. L., y VILA, M. A. (1985): «On fuzzy tree definition», *European J. Oper. Res.,* 22, 2, 243-249.

ROSENFELD, A. (1975): «Fuzzy graph.», en *Fuzzy Sets and Their Applications to Cognitive and Decision Processes* (L. A. Zadeh, K. S. Fu, K. Tanaka y M. Shimura, eds.), Nueva York, Academic Press, 77-97.

VILA, M. A. (1984): *Algunas cuestiones sobre la teoría de grafos difusos y sus aplicaciones,* Proc. FISAL-83, Palma de Mallorca, 167-177.