TRABAJOS DE
INVESTIGACION OPERATIVA
Vol. 1. Núm. 1, 1986, pp. 105 a 115

DUALIDAD DE HAAR Y PROBLEMAS DE MOMENTOS (*)

M. A. Goberna (**)
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad de Alicante

RESUMEN

En la primera parte de este trabajo damos una versión simplificada de la conocida relación entre la dualidad en Programación Semi-Infinita y cierta clase de problemas de momentos, basándonos en las propiedades de los sistemas de Farkas-Minkowski. Planteamos a continuación otra clase de problemas de momentos para cuyo análisis resulta de utilidad una generalización del Lema de Farkas.

Palabras clave: Dualidad, Programación Semi-Infinita, Problemas de Momentos.

SUMMARY

The first part of this paper presents a new simplified version, based upon the properties of the Farkas-Minkowski systems, of the well-known relation between the Duality Theory in Semi-Infinite Programming and a certain class of moment problems. Next we stablish a new-class of moment problems which is analized by means of a generalization of the Farkas Lemma.

Key words: Duality, Semi-Infinite Programming, Moment Problems.
Clasificación AMS: 90C48.

(*) Recibido, marzo 1985. Aceptado, julio 1985.
(**) Esta investigación ha sido financiada con una Ayuda de la Fundación «Angel García Rogel» (CAAM).

INTRODUCCION

Consideraremos a lo largo de este trabajo una familia $\{f_1(t), ..., f_n(t)\}$ de funciones reales continuas en $[0, 1]$, al igual que β_t. Representaremos por $a_t:[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ la función vectorial cuyas proyecciones son $f_1, ..., f_n$.

El sistema lineal $\{a_t'y \geqslant \beta_t, t \in [0, 1]\}$ se dice que es consistente si posee alguna solución en $\mathbb{R}^n$. Un sistema consistente es de Farkas-Minkowski (F-M) si toda relación lineal que es consecuencia del sistema es también consecuencia de un subsistema finito. En [4] se caracterizan los sistemas de F-M y se dan diversas condiciones suficientes.

Denotaremos por $Cl(\mathbb{C})$, $Co(\mathbb{C})$, $K(\mathbb{C})$ la clausura, la envoltura convexa y el cono convexo generado por un conjunto $\mathbb{C}$ no vacío contenido en un espacio euclídeo de dimensión finita.

Si $y \in \mathbb{R}^n$ e $y_{n+1} \in \mathbb{R}$, representaremos por $\bar{y}$ el vector $\begin{bmatrix} y \\ y_{n+1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Denotaremos, por último $\mathbb{R}_+^{(T)}$ el cono de las funciones $\lambda:T \rightarrow \mathbb{R}_+$ que son nulas excepto, quizá, en un subconjunto de T. Este cono está incluido en el espacio vectorial de las sucesiones finitas generalizadas.

En los problemas de momentos que vamos a considerar se trata de hallar una función $x(t)$ que satisface determinadas condiciones (que implican la monotonía), y tal que

$$\int_0^1 f_k(t)dx(t) = \alpha_k \quad , \quad k = 1, ..., n,$$

siendo $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ escalares dados, llamados momentos.

Denotaremos, para abreviar, $a = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)'$.

Como consecuencia de la continuidad del integrando y de la monotonía del integrador existen las integrales de Riemann-Stieltjes.

El objetivo que se persigue es el de dar condiciones, relativas a los momentos, que garanticen la existencia de soluciones. Es en la formulación de tales condiciones donde intervendrá la dualidad de Haar.

En el primer problema de momentos, M1, exigiremos que $x(t)$ sea no decreciente en $[0, 1]$; en el segundo problema, M2, requerimos que $x(t)$ sea una función de distribución. Es evidente que la existencia de solución para M2 implica que M1 también posee solución; no vale el recíproco necesariamente.

1. EL PROBLEMA M1

Como es bien sabido, una de las raíces de la Teoría de la dualidad en Programación Semi-Infinita (PSI) la constituye el problema M1. En [7] planteó Isii el siguiente par de problemas (primal y dual) de interés en el estudio de M1:

Problema (P) $\quad \text{mín } a'y$

$\qquad \text{s.a.: } a_t'y \geqslant \beta_t \quad , \quad t \in [0, 1]$

Problema (DM) $\quad \text{máx} \displaystyle\int_0^1 \beta_t dx(t)$

$$\text{s.a.: } \int_0^1 f_k(t)dx(t) = \alpha_k \quad , \quad k = 1, ..., n,$$

$x(t)$ no decreciente en $[0, 1]$.

Los respectivos conjuntos factibles son las soluciones del sistema $\{a_t'y \geqslant \beta_t, t \in [0, 1]\}$ y las del problema M1.

Poco después planteaban Charnes, Cooper y Kortanek (en [1]) el problema dual de (P) en la PSI lineal (dualidad de Haar):

Problema (D) $\quad \text{máx} \displaystyle\sum_{t \in [0, 1]} \lambda_t \beta_t$

$$\text{s.a.: } \sum_{t \in [0, 1]} \lambda_t a_t = a \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}_+^{([0, 1])}$$

Para conectar los pares duales (P)-(D) y (P)-(DM) introdujo Glashoff (en [3]) los siguientes conos asociados:

$$K_n = K\{a_t, t \in [0, 1]\} \subset \mathbb{R}^n,$$

$$K_{n+1} = K\left\{\begin{bmatrix} a_t \\ \beta_t \end{bmatrix}, t \in [0, 1]\right\} \subset \mathbb{R}^{n+1},$$

$$M_n = \left\{d \in \mathbb{R}^n / \exists x(t) \text{ no decreciente en } [0, 1] \text{ tal que } \int_0^1 f_k(t)dx(t) = d_k,\ k = 1, ..., n\right\} \quad \text{y}$$

$$M_{n+1} = \left\{ \bar{d} \in \mathbb{R}^{n+1} / \exists x(t) \text{ no decreciente en } [0,1] \text{ tal que } d \in M_n \right.$$
$$\left. \text{y } \int_0^1 \beta_t dx(t) = d_{n+1} \right\}$$

Es fácil comprobar que:

1. M_n y M_{n+1} son conos convexos.
2. (D) es posible si y sólo si, $a \in K_n$.
3. (DM) es posible si y sólo si, $a \in M_n$.
4. Ambos pares duales satisfacen el teorema de dualidad débil, i.e., sus valores satisfacen las desigualdades

$$v(\mathrm{D}) \leqslant v(\mathrm{P}) \quad \text{y} \quad v(\mathrm{DM}) \leqslant v(\mathrm{P}).$$

Probaremos a continuación que el paralelismo formal entre (D) y (DM) se convierte en identidad bajo hipótesis muy generales. A diferencia de la versión que se da en [3], nos basaremos en el teorema de Haar (véanse [1] y [4]), y no en el de Rogosinski ([8]).

Proposición 1.1

$$K_i \subset M_i \subset ClK_i \quad , \quad i = n, n+1.$$

DEMOSTRACION

La prueba es esencialmente la misma en ambos casos, por lo que nos limitaremos a probar que $K_n \subset M_n$ y $M_n \subset ClK_n$.

Demostraremos, en primer lugar, que los generadores de K_n pertenecen a M_n.

Asociaremos, con tal fin, a cada $\tau \in]0,1]$ la función

$$x_\tau(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t < \tau \\ 1, & \tau \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

mientras que a $\tau = 0$ le asociamos

$$x_0(t) = \begin{cases} 0, & t = 0 \\ 1, & 0 < t \leqslant 1 \end{cases}$$

Dado que x_τ es no decreciente, con salto unidad en τ, se tiene

$$\int_0^1 f_k(t)dx_\tau(t) = f_k(\tau) = (a_\tau)_k.$$

Por lo tanto $a_\tau \in M_n$, cualquiera que sea $\tau \in [0, 1]$.

Para probar la segunda inclusión tomaremos $d \in M_n$ arbitrario. Sea $x(t)$ una función no decreciente corresponiente a d, según la definición.

Entonces, cualquiera que sea $y \in \mathbb{R}^n$, se tiene que

$$d'y = \sum_{k=1}^{n} d_k y_k = \int_0^1 (a_t'y)dx(t).$$

La relación $d'y \geqslant 0$ es, por lo tanto, consecuencia del sistema $\{a_t'y \geqslant 0, t \in [0, 1]\}$ y, por el teorema de Farkas generalizado (véase [4]), $d \in ClK_n$.

Proposición 1.2

Si K_{n+1} es cerrado, entonces (D) y (DM) coinciden. Además, si (P) es posible, entonces (M1) tiene solución si, y sólo si, $v(\mathrm{P}) = v(\mathrm{D})$ es finito.

DEMOSTRACION

Comenzaremos reformulando los problemas (D) y (DM) como problemas de programación general.

Llamando $y = \sum_{t \in [0,1]} \lambda_t a_t$ e $y_{n+1} = \sum_{t \in [0,1]} \lambda_t \beta_t$, se tiene $\bar{y} \in K_{n+1}$.

Queda reformulado (D) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} &\text{máx } y_{n+1} \\ &\text{s.a.: } \bar{y} \in K_{n+1} \quad , \quad y = a \end{aligned}$$

Denotemos ahora

$$y_k = \int_0^1 f_k(t)dx(t), k = 1, .., n \quad \text{e} \quad y_{n+1} = \int_0^1 \beta_t dx(t).$$

Puede entonces reformularse (DM) así:

$$\begin{aligned}&\text{máx } y_{n+1}\\ &\text{s.a.: } \bar{y} \in M_{n+1} \quad , \quad y = a\end{aligned}$$

La identificación es ahora inmediata, como consecuencia de P.1.1.

Supongamos que K_{n+1} es cerrado y que (P) es posible. Entonces, como consecuencia del Cor. 3.1.1 de [4] puede aplicarse el teorema de Haar al par (P)-(D) (ibídem, Cor. 4.1.1.). En particular, (DM) es posible si y sólo si $v(\mathrm{P}) > -\infty$.

En orden a la aplicación de P.1.2 como test para la existencia de solución de (M1) puede tomarse, en particular, $\beta_t = 0$ en $[0, 1]$. En tal caso el problema (P) se convierte en:

$$\begin{aligned}&(\mathrm{P}_0)\text{ mín } a'y\\ &\text{s.a.: } a_t'y \geqslant 0 \quad , \quad t \in [0, 1]\end{aligned}$$

Dicho problema es siempre posible. Además, $K_{n+1} = K_n \times \{10\}$, por lo que K_{n+1} es cerrado si y sólo si lo es K_n.

Corolario 1.2.1

Supongamos que K_n es cerrado. Entonces M1 posee solución si, y sólo si, $v(\mathrm{P}_0) = 0$.

DEMOSTRACION

Si $a \in K_n$, entonces $a'y \geqslant 0$ es consecuencia del sistema $\{a_t'y \geqslant 0, t \in [0, 1]\}$, por lo que $v(\mathrm{P}_0) = 0$.

Por otro lado, si $a \notin K_n$, existe un $y^1 \in \mathbb{R}^n$ tal que $a'y^1 < 0$, mientras que $a_t'y^1 \geqslant 0$, cualquiera que sea $t \in [0, 1]$.

Considerando la sucesión y^1, $2y^1$, $3y^1$, ... se prueba que

$$v(\mathrm{P}_0) = -\infty$$

EJEMPLO

En el problema clásico de momentos $f_k(t) = t^k$, $k = 0, ..., n$.

El conjunto $\mathbb{C} = \{(1, t, ..., t^n)', t \in [0, 1]\}$ es un compacto en $\mathbb{R}^{n+1}$.

Dado que $\mathbb{C} \subset \{1\} \times [0, 1]^n$, $Co\mathbb{C}$, que es un compacto, no contiene al origen. Por lo tanto, el cono $K_n = K(Co\mathbb{C})$ es cerrado.

OBSERVACION

Las hipótesis de los dos últimos resultados involucran implícitamente la condición de F-M. En efecto (véase [4]), se tiene:

1. Si (P) es posible y K_{n+1} es cerrado, entonces el sistema $\{a_t'y \geqslant \beta_t, t \in [0, 1]\}$ es F-M (no se cumple el recíproco).
2. El cono K_n es cerrado si y sólo si, $\{a_t'y \geqslant 0, t \in [0, 1]\}$ es F-M. La cualificación de restricciones de Slater (satisfecha en el ejemplo anterior) es, en este caso, suficiente ([6]).

El problema planteado, M1, admite, pues, dos reformulaciones equivalentes, en el caso de ser K_n cerrado:

1. Como problema de PSI. Se trata de calcular el valor del problema (P_0). Desde 1973 se vienen desarrollando métodos numéricos para este tipo de problemas.
2. Como problema geométrico. Se trata de saber si existe un $\lambda \in \mathbb{R}_+^{([0,1])}$ tal que $\sum_{t \in [0,1]} \lambda_t a_t = a$.

Este problema empezó a ser investigado en 1963 (en [1]) y sigue siéndolo actualmente. La prueba de P.1.1. permite obtener soluciones de M1 asociadas a cada solución de este problema geométrico.

2. EL PROBLEMA M2

Añadiendo una hipótesis adicional (que es satisfecha por el problema clásico de momentos) mostraremos la posibilidad de enunciar una condición necesaria y suficiente para la existencia de solución de M2.

Supondremos, a lo largo de esta sección, que una de las proyecciones de a_t es constante y no nula. Si dicha proyección es la j-ésima, se tendrá que $f_j(t) = \mu \neq 0$, para todo $t \in [0, 1]$.

Como K_n es el cono convexo generado por $Co\{a_t, t \in [0, 1]\}$, que es un compacto convexo contenido en un hiperplano que no contiene al origen, podemos afirmar que K_n es cerrado.

Si $x(t)$ fuera una solución de M2, entonces $\int_0^1 f_j(t)dx(t) = \mu$ y, por lo tanto, $\alpha_j = \mu$. Por otro lado, puesto que M1 tiene solución, tendremos $a \in M_n = K_n$ (recuérdese P.1.1 y la clausura de K_n). Concluimos que una condición necesaria para la existencia de solución de M2 es que

$$a \in K_n \cap \{y \in \mathbb{R}^n / y_j = \mu\}$$

Proposición 2.1

M2 posee solución si y sólo si, $a \in K_n \cap \{y \in \mathbb{R}^n / y_j = \mu\}$.

DEMOSTRACION

Bastará probar la suficiencia. Construiremos, con tal fin, una solución $x(t)$ de M2.

Dado que $a \in K_n$, puede afirmarse que

$$a = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i a_{t_i} \quad , \quad \lambda_i \geqslant 0 \quad , \quad t_i \in [0, 1] \quad , \quad i = 1, ..., q,$$

para una elección conveniente de escalares e índices.

Identificando las j-ésimas componentes se obtiene

$$\sum_{i=1}^{q} \lambda_i = 1.$$

A cada $\tau \in]0, 1]$ se le puede asociar la función $x_\tau(t)$ de la P.1.1., que es una función de distribución en $[0, 1]$ que satisface

$$\int_0^1 f_k(t)dx_\tau(t) = (a_\tau)_k \quad , \quad k = 1, 2, ..., n.$$

La continuidad por la derecha que requerimos nos impide tomar la función $x_0(t)$ de aquella prueba. Ahora bien, si consideramos la sucesión $x_{1/p}(t)$, $p = 1, 2, ...$ de funciones de distribución, existe una subsucesión $x_{1/p_1}(t)$, $x_{1/p_2}(t), ...$ que converge a una función de distribución $x_0(t)$ en todos los puntos de continuidad de esta última.

Además, $\int_0^1 f_k(t)dx_0(t) = \lim_{r\to\infty} \int_0^1 f_k(t)dx_{1/p_r}(t) = \lim_{r\to\infty} f_k(1/p_r) = (a_0)_k$, en virtud de la continuidad de $f_k(t)$.

Se concluye comprobando que $x(t) = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i x_{t_i}(t)$ es una función de distribución tal que $\int_0^1 f_k(t)dx(t)\,\alpha_x(t) = \alpha_k$, $k = 1, 2, ..., n$.

Tenemos, por lo tanto, la solución buscada.

La conclusión que se obtiene es que en M2, más restrictivo que M1, hay que sustituir el cono K_n por su intersección con el hiperplano $x_j = \mu$. Una particularización ha sido utilizada (véase [2]) para dar una demostración simplificada del teorema de Hausdorff ([5]).

Estamos en condiciones de relacionar los problemas M2, (P_0) y (D_0), dual del anterior. Obsérvese que, por ser K_n cerrado, el sistema $\{a_t'y \geqslant 0,\ t \in [0, 1]\}$ es de F-M y que la dualidad es, por lo tanto, de Haar.

Proposición 2.2

Existe solución de M2 si, y sólo si, $\alpha_j = \mu$ y $v(P_0) = 0$.

Cuando tal cosa ocurre (D_0) es posible y a cada solución de (D_0) se le puede asociar una solución de M2.

DEMOSTRACION

No es difícil probar que, suponiendo $\alpha_j = \mu$, $v(P_0) = 0$ si, y sólo si, $a \in K_n$.

Por otro lado, si $a \in K_n$ y λ es solución de (D_0), se tiene entonces que $a = \sum_{t\in[0,1]} \lambda_t a_t$ y, razonando como antes, $\sum_{t\in[0,1]} \lambda_t x_t$ es una solución de M2.

Obsérvese que, si $\lambda_0 = 0$, entonces $x = \sum_{t\in[0,1]} \lambda_t x_t$ es, simplemente, una función escalonada con discontinuidad en el soporte de λ.

Terminaremos ocupándonos de la falta de unicidad de la solución de M2, no tan evidente como en el caso de M1. El siguiente ejemplo ilustrativo se basa en P.2.2.

EJEMPLO

Sea $f_1(t) = \cos 2\pi t$, $f_2(t) = 1$ y $f_3(t) = \operatorname{sen} 2\pi t$.

Supongamos también $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$ y $\alpha_2 = 1$.

Puede comprobarse que, cualquiera que sea $\varepsilon \in]0, 1/2]$ se tiene que $a = \frac{1}{2}a_3 + \frac{1}{2}a_{1/2+\varepsilon}$, por lo que

$$x(t) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leqslant t < \varepsilon \\ 1/2 & , \quad \varepsilon \leqslant t < 1/2 + \varepsilon \\ 1 & , \quad 1/2 + \varepsilon \leqslant t \leqslant 1 \end{cases} ,$$

que depende de ε, es solución de M2.

REFERENCIAS

[1] CHARNES, A.; COOPER, W. W., y KORTANEK, K. O. (1963): «Duality in Semi-Infinite Programs and some works of Haar and Caratheodory», *Managements Sci.*, 9, 209-228.

[2] FRANKLIN, J. (1983): «Mathematical Methods of Economics», *Amer. Math. Monthly*, 90, 229-244.

[3] GLASHOFF, K. (1979): «Duality Theory of Semi-Infinite Programming», en Semi-Infinite Programming, R. Hettich ed., *Lecture Notes in Control and Information Science*, 15, 1-16, Springer Verlag, Berlín.

[4] GOBERNA, M. A.; LOPEZ, M., y PASTOR, J. (1981): «Farkas-Minkowski Systems in Semi-Infinite Programming», *J. Appl. Math. and Opt.*, 7, 295-308.

[5] HAUSDORFF, F. (1923): «Momentprobleme für ein endliches Intervall», *Math. Z.*, 16, 220-248.

[6] HESTENES, M. R. (1975): *Optimization Theory. The Finite Dimensional Case*, Wiley Interscience, New York.

[7] ISII, K. (1960): «The extrema of probability determined by generalized moments (I). Bounded random variables», *Ann. Inst. Stat. Math.*, 12, 119-133.

[8] ROGOSINSKI, W. W. (1958): «Moments of non-negative mass», *Proc. Roy. Soc.* (London), A, 245, 1-27.