TRABAJOS DE
INVESTIGACION OPERATIVA
Vol. 1. Núm. 1, 1986, pp. 73 a 86

INDICES ECONOMICOS. MODELO DINAMICO DE INVERSION (*)

M.ª Angeles Fernández Fernández
Departamento de Estadística Matemática
Facultad de Matemáticas
Universidad de Santiago

RESUMEN

Se estudia el problema de inversión en un mercado en donde las rentabilidades aleatorias de los títulos satisfacen una relación temporal con rentabilidades anteriores y las interrelaciones vendrán dadas a través de unos índices, uno común a todos los títulos y otro específico del sector en que puede incluirse cada título.

Palabras clave: Carteras aproximadamente eficientes. Inversión. Modelo de índices.
Clasificación AMS: 90A16-62M10.

SUMMARY

In this paper the investment's problem is studied in a market with the random returns of the securities satisfying a temporary relationship with previous returns and where the interrelations will be given through two index, one of them is common to all assets and the other is specific of the sector where each security may be included.

Key woords: Nearly efficient portfolios. Investment. Index models.
AMS Classification: 90A16-62M10.

(*) Recibido, abril 1985. Aceptado, febrero 1986.

1. INTRODUCCION

Debido a que la teoría de Markowitz y Tobin de selección de la cartera requería la inversión de la matriz de varianzas-covarianzas de las rentas de los títulos y era una tarea harto difícil en su tiempo, Sharpe (1963 y 1964) simplifica el cálculo de la frontera eficiente utilizando un modelo de índice de mercado que dará origen a la teoría de mercado de capitales. Demuestra que si un índice puede ser identificado de tal manera que toda relación entre las rentas de los títulos se de a través de relaciones individuales con el índice, entonces solamente serán requeridas las covarianzas entre la renta en el índice y en cada uno de los títulos para encontrar carteras que van a ser aproximadamente eficientes.

Surgen modelos de índices múltiples y evidentemente, a mayor número, menos sencillo será el modelo y más costoso será el cálculo. Estudios hechos dan lugar a serias dudas sobre si serían con ellos más eficientes las carteras obtenidas que las obtenidas con un sólo índice, ya que, por ejemplo, Cohen y Pogue (1967) llegan a la conclusión de que con un sólo índice se obtienen carteras más eficientes que con un modelo de índices múltiples y Wallingford (1967) sin embargo, llega al resultado contrario. Posteriormente la polémica siguió abierta.

Recientemente una serie de trabajos han mostrado, bajo diversas suposiciones, que existen técnicas simples para resolver el problema del cálculo de la cartera de inversión óptima. Son técnicas que resultan de inclusiones de stocks en las carteras que son fácilmente comprendidas y aceptadas por los investigadores en esa materia (Elton y Gruber, 1979).

En este trabajo consideramos un modelo de mercado de inversiones en donde las rentabilidades aleatorias de los títulos en un instante satisfacen una relación con rentabilidades anteriores y estarán ligadas a unos índices, uno común a todos los títulos y otro específico de cada sector en que pueda englobarse cada título.

2. MODELO DEL MERCADO

Sea un mercado en donde son ofertados n títulos de rentabilidades aleatorias $X_{i(t)}$ en un instante t que verifican una relación temporal en la cual las interrelaciones vendrán dadas a través de dos índices, uno llamado índice general del mercado, que influirá en todos los títulos en mayor o menor medida y otro llamado índice de industria que será característico del sector o industria a que pertenece cada título.

Supuesto que existan h sectores, efectuamos previamente una reordenación en los títulos de tal manera que $X_{1(t)}, X_{2(t)}, ..., X_{n_1(t)}$ sean las rentabilidades de los títulos del sector 1; $X_{n_1+1(t)}, ..., X_{n_2(t)}$ la del sector 2; ...; $X_{n_{h-1}+1(t)}, ..., X_{n_h(t)} = X_{n(t)}$ las del sector h.

El modelo se expresa en el sector j:

$$X_{i(t)} = X_{i(t-1)} + a_i(X_{i(t-1)} - X_{i(t-2)}) + r_{i(t)}M_t + s^j_{i(t)}M_{j(t)} + \varepsilon_{i(t)}$$
$$i \in \{n_{j-1} + 1, ..., n_j\} = N_j$$

las sucesiones temporales $\varepsilon_{i(t)}$ son variables aleatorias de media cero y varianza σ_i^2 en cualquier instante, con igual distribución e independientemente distribuidas en i.

M_t es la rentabilidad aleatoria del índice general en el instante t.

$M_{j(t)}$ es la rentabilidad aleatoria del índice de la industria j-ésima en el instante t.

$\varepsilon_{i(t)}$ la dispersión del título i-ésimo en t.

a_i la medida de la aproximación de la diferencia de rentabilidades en el instante t y en el inmediatamente anterior $t - 1$, por la diferencia en $t - 1$ y $t - 2$.

$r_{i(t)}$ una medida de respuesta del título i al cambio en el índice de mercado en el instante t.

$s^j_{i(t)}$ una medida de respuesta del título i al cambio en el índice del sector al que pertenece en el instante t.

Además se verifica:

$E(M_t) = M \quad , \quad V(M_t) = \delta^2 \quad \forall t$

$E(M_{j(t)}) = A_j \quad , \quad V(M_{j(t)}) = \lambda_j^2 \quad \forall t$

$\mathrm{Cov}\,(M_t, M_s) = 0 \quad \text{con} \quad t \neq s$

$\mathrm{Cov}\,(M_{j(t)}, M_{j(s)}) = 0 \quad \text{con} \quad t \neq s$

$\mathrm{Cov}\,(M_{k(t)}, M_{r(s)}) = 0 \quad \forall r, \forall k, r \neq k$

$\mathrm{Cov}\,(M_t, M_{j(s)}) = 0 \quad \forall s, \forall t$

$E(\varepsilon_{i(r)} \cdot M_t) = 0 \quad \forall r, \forall t$

$E(\varepsilon_{i(r)} \cdot M_{j(s)}) = 0 \quad \forall r, \forall s$

Sharpe (1971) mostró como un conjunto de índices no ortogonales puede ser reducido a un conjunto de ortogonales. La suposición del valor nulo de las covarianzas se tiene porque la relación entre títulos es debida solamente a la relación con un índice de mercado y uno de industria.

3. RESULTADOS BASICOS

3.1. Proposición

Considerando como condiciones iniciales $X_{i(0)}$ y $X_{i(1)}$ para un título de rentabilidad $X_{i(t)}$ en un instante t y suponiendo que esté englobado en el sector j-ésimo, ésta se expresa en la forma siguiente:

$$X_{i(t)} = X_{i(1)} + \left(\frac{a_i - a_i^t}{1 - a_i}\right)(X_{i(1)} - X_{i(0)}) +$$

$$+ \sum_{k=2}^{t} \left(\frac{1 - a_i^{t-k+1}}{1 - a_i}\right)(r_{i(k)}M_k + s_{i(k)}^j M_{j(k)} + \varepsilon_{i(k)})$$

DEMOSTRACION

Trivial utilizando reiteradamente la expresión del modelo.

3.2. Definición

Una cartera de inversión en t será un vector $(x_{1(t)}, ..., x_{n(t)})$ donde cada $x_{i(t)}$ representa la cantidad a invertir en el título i-ésimo, que satisface $x_{1(t)} + , ..., + x_{n(t)} = 1$ y $x_{i(t)} \geqslant 0$ $i = 1, ..., n$. Si no se exige la no negatividad en los pesos significará que son permitidas las ventas a corto plazo.

La rentabilidad de una cartera de pesos $x_{i(t)}$ será:

$$X_{p(t)} = \sum_{i=1}^{n} x_{i(t)} X_{i(t)} = \sum_{i=1}^{n} x_{i(t)} \left[X_{i(1)} + \left(\frac{a_i - a_i^t}{1 - a_i}\right)(X_{i(1)} - X_{i(0)}) \right] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} x_{i(t)} \left[\sum_{k=2}^{t} \left(\frac{1 - a_i^{t-k+1}}{1 - a_i} \right) (r_{i(k)} M_k + \varepsilon_{i(k)}) \right] +$$

$$+ \sum_{j=1}^{h} \left[\sum_{i \in N_j} x_{i(t)} \left(\sum_{k=2}^{t} \left(\frac{1 - a_i^{t-k+1}}{1 - a_i} \right) s_{i(k)}^{j} M_{j(k)} \right) \right]$$

3.3. Proposición

La media y la varianza de la rentabilidad $X_{p(t)}$ de una cartera son respectivamente:

$$\mu_{p(t)} = \sum_{j=1}^{h} \left(\sum_{i \in N_j} x_{i(t)} \left[X_{i(1)} + \left(\frac{a_i - a_i^t}{1 - a_i} \right) (X_{i(1)} - X_{i(0)}) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \sum_{k=2}^{t} \left(\frac{1 - a_i^{t-k+1}}{1 - a_i} \right) (r_{i(k)} M + s_{i(k)}^{j} A_j) \right] \right)$$

$$\sigma_{p(t)}^2 = \delta^2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{i(t)} x_{j(t)} R_{i(t)}' R_{j(t)} +$$

$$+ \sum_{p=1}^{h} \lambda_p^2 \sum_{i \in N_p} \sum_{j \in N_p} x_{i(t)} x_{j(t)} S_{i(t)}^{p'} S_{j(t)}^{p} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} x_{i(t)}^2 \sigma_i^2 P_{i(t)}' P_{i(t)} + R_1$$

Se supone una relación lineal entre las dispersiones de los diferentes títulos para el cálculo de $\sigma_{p(t)}^2$ (Fernández, 1984)

$$\varepsilon_{j(t)} = \alpha_{2t}^{j} \varepsilon_{i(t)} + \cdots + \alpha_{tt}^{j} \varepsilon_{i(t)} = f_{ij}(\varepsilon_{i(t)}) \quad i < j$$

obteniéndose debido a las hipótesis del modelo que

$$\varepsilon_{j(t)} = \frac{\sigma_j}{\sigma_i} \varepsilon_{i(t)}$$

Por otra parte, las relaciones con $i < j$ no son todas necesarias, bastan con $\varepsilon_{i(t)} = f_{i-1.i}(\varepsilon_{i-1(t)})$ $i = 2, 3, ..., n$ con

$$\varepsilon_{i(t)} = \frac{\sigma_i}{\sigma_{i-1}} \varepsilon_{i-1(t)}$$

obteniéndose a partir de ésta todas las demás.

Por «'» entenderemos tranpuesto

$$P'_{i(t)} = \left(\frac{1 - a_i^{t-1}}{1 - a_i}, \frac{1 - a_i^{t-2}}{1 - a_i}, ..., \frac{1 - a_i}{1 - a_i}\right)$$

$$R'_{i(t)} = \left(\frac{1 - a_i^{t-1}}{1 - a_i} r_{i(2)}, \frac{1 - a_i^{t-2}}{1 - a_i} r_{i(3)}, ..., \frac{1 - a_i}{1 - a_i} \cdot r_{i(t)}\right)$$

$$S^{p'}_{i(t)} = \left(\frac{1 - a_i^{t-1}}{1 - a_i} s^p_{i(2)}, \frac{1 - a_i^{t-2}}{1 - a_i} s^p_{i(3)}, ..., \frac{1 - a_i}{1 - a_i} s^p_{i(t)}\right)$$

y R_1 engloba a términos que serán función de $\mathrm{Cov}(\varepsilon_{i(t)}, \varepsilon_{j(s)})$ con $i \neq j$, que con la relación dada respecto a las dispersiones es función de σ_i^2 y σ_j^2; $i,j = 1, ..., n$.

DEMOSTRACION

Se comprueba que para un título i englobado en el sector j la media y la varianza en t son respectivamente:

$$\mu_{i(t)} = X_{i(1)} + \left(\frac{a_i - a_i^t}{1 - a_i}\right)(X_{i(1)} - X_{i(0)}) + $$
$$+ \sum_{k=2}^{t} \left(\frac{1 - a_i^{t-k+1}}{1 - a_i}\right)(r_{i(k)}M + s^j_{i(k)}A_j)$$

$$\sigma^2_{i(t)} = \frac{\sigma_i^2}{(1 - a_i)^2}\left[t - 1 - 2\left(\frac{a_i - a_i^t}{1 - a_i}\right) + \frac{a_i^2 - a_i^{2t}}{1 - a_i}\right] + $$
$$+ \sum_{k=2}^{t} \left(\frac{1 - a_i^{t-k+1}}{1 - a_i}\right)^2 (\delta^2 r^2_{i(t)} + \lambda_j^2 s^j_{i(k)})$$

y mediante simples cálculos se obtiene lo enunciado. (Véase Fernández, 1984.)

3.4. Observación

Debido a que las interrelaciones vendrán dadas a través de los índices, el riesgo global de una cartera podremos descomponerlo en el riesgo debido a las relaciones con los índices y en el riesgo debido a las características de los títulos, este último estará constituido por

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i(t)}^2 \sigma_i^2 P'_{i(t)} P_{i(t)} + R_1$$

y tratará de eliminarse o disminuirse por diversificación.

4. EL PROBLEMA

Reagrupando de otra forma los términos, $X_{p(t)}$ podrá expresarse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} X_{p(t)} = {} & \sum_{i=1}^{n} x_{i(t)} \left[X_{i(1)} + \left(\frac{a_i - a_i^t}{1 - a_i} \right) (X_{i(1)} - X_{i(0)}) \right] + \\ & + \sum_{k=2}^{t} M_k \left[\sum_{i=1}^{n} x_{i(t)} \left(\frac{1 - a_i^{t-k+1}}{1 - a_i} \right) r_{i(k)} \right] + \\ & + \sum_{j=1}^{h} \left(\sum_{k=2}^{t} M_{j(k)} \left[\sum_{i \in N_j} x_{i(t)} \left(\frac{1 - a_i^{t-k+1}}{1 - a_i} \right) s_{i(k)}^j \right] \right) + \\ & + \sum_{i=1}^{n} x_{i(t)} \left[\sum_{k=2}^{t} \left(\frac{1 - a_i^{t-k+1}}{1 - a_i} \right) \varepsilon_{i(k)} \right] \end{aligned}$$

obtenemos entonces otra expresión de $\sigma_{p(t)}^2$, que a veces puede resultar más cómoda

$$\sigma_{p(t)}^2 = \delta^2 \sum_{k=2}^{t} b_{k(t)}^2 + \lambda_1^2 \sum_{k=2}^{t} \beta_{1(k)}^2 + \cdots + \lambda_h^2 \sum_{k=2}^{t} \beta_{h(k)}^2 + R_2$$

donde

$$b_k(t) = \sum_{i=1}^{n} x_{i(t)}\left(\frac{1 - a_i^{t-k+1}}{1 - a_i}\right) r_{i(k)} \quad ; \quad k = 2, ..., t$$

$$\beta_{1(k)} = \sum_{i \in \mathcal{N}_1} x_{i(t)}\left(\frac{1 - a_i^{t-k+1}}{1 - a_i}\right) s_{i(k)}^1 \quad ; \quad k = 2, ..., t$$

.

.

.

.

$$\beta_{h(k)} = \sum_{i \in \mathcal{N}_h} x_{i(t)}\left(\frac{1 - a_i^{t-k+1}}{1 - a_i}\right) s_{i(k)}^h \quad ; \quad k = 2, ..., t$$

y R_2 es función de $\text{Cov}(\varepsilon_{i(s)}, \varepsilon_{j(r)})$ con $i \neq j$.

Observamos de nuevo en $\sigma_{p(t)}^2$ dos partes claramente diferenciadas, R_2 es la segunda y se disminuirá por diversificación, consideramos como medida del riesgo asociado a una cartera de rentabilidad $X_{p(t)}$ a la primera parte.

Para encontrar la inversión óptima en un instante t, consideramos:

$$\theta_1(t) = \delta(b_2(t) + \cdots + b_t(t))$$

$$\theta_2(t) = \lambda_1\beta_1(t) + \cdots + \lambda_h\beta_h(t)$$

con

$$\beta_i(t) = \sum_{k=2}^{t} \beta_{i(k)} \quad ; \quad i = 1, ..., h$$

y formulamos entonces el problema:

$$\text{Max}\,[1 - (p + q)]\mu_{p(t)} - p\theta_1(t) - q\theta_2(t)$$

con

$$0 \leqslant p + q \leqslant 1 \quad , \quad p \in [0, 1] \quad , \quad q \in [0, 1]$$

La función a maximizar nos señala evidentemente la inclusión de la medida del riesgo debido al índice de mercado y al de industria y por otra parte la de la rentabilidad esperada.

Si denotamos

$$P_i(t) = \delta \sum_{k=2}^{t} \left(\frac{1 - a_i^{t-k+1}}{1 - a_i} \right) r_{i(k)}$$

$$Q_{i.r}(t) = \lambda_r \sum_{k=2}^{t} \left(\frac{1 - a_i^{t-k+1}}{1 - a_i} \right) s_{i(k)}^r$$

el problema será:

$$\text{Maximizar} \sum_{i=1}^{n} x_{i(t)} W_{i(t)}$$

donde, si $i \in N_r$:

$$W_{i(t)} = [1 - (p + q)]\mu_{i(t)} - pP_i(t) - qQ_{i.r}(t)$$

En un instante t, para valores fijos de p y q, se determinan los valores $W_{i(t)}$, $i = 1, ..., n$. El mayor de ellos llevará asociado un título, en el cual se invertirá la unidad de capital y los otros pesos de la cartera serán nulos. Si existiesen cotas para las inversiones, se invertiría lo máximo autorizado en el título que llevase asociado el mayor $W_{i(t)}$, también lo máximo autorizado en el título con $W_{i(t)}$ más próximo al primero y así sucesivamente hasta agotar la unidad, evidentemente el último título que entra a formar parte de la cartera óptima no tendrá por qué hacerlo con su peso máximo tolerado.

En la figura 4.1 observamos las proyecciones de las carteras po-

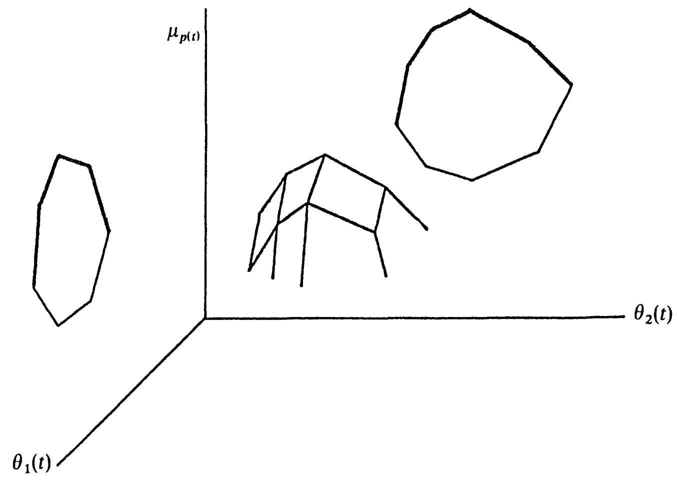

Figura 4.1

sibles en los planos $(\mu_{p(t)}, \theta_1(t))$ y $(\mu_{p(t)}, \theta_2(t))$ y resaltamos con trazo más grueso la proyección de la frontera eficiente.

4.1. Definición

Llamaremos arista de frontera a la obtenida mediante la intersección de dos cualesquiera planos óptimos solución del problema formulado. Las aristas de frontera determinan las superficies que serán óptimas y que constituirán la frontera eficiente en un instante de tiempo determinado.

Como casos particulares podemos considerar:

1. $p = q = 0$, el problema es entonces:

$$\text{Maximizar } \sum_{i=1}^{n} x_{i(t)}\mu_{i(t)}$$

Se obtiene en t la cartera constituida por la inversión en el título de mayor renta esperada.

2. $p + q = 1$. Se plantea: Minimizar $p\theta_1(t) + p\theta_2(t)$. Determinaremos los planos $W_{i(t)} = pP_i(t) + qQ_{i.r}(t)$ paralelos al eje $\mu_{p(t)}$. El segmento $[P_i(t), Q_{i.r}(t)]$ de menor longitud determinada el título $x_{i(t)}$ del sector r en el cual ha de efectuarse la inversión (Fig. 4.2).

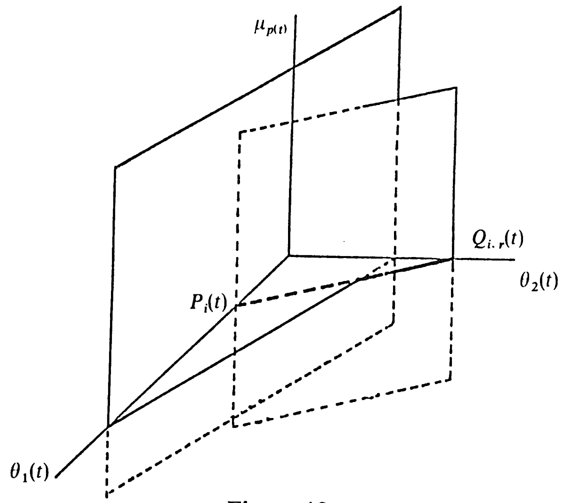

Figura 4.2

3. $p = 1, q = 0$

$$\text{Min } \theta_1(t) = \delta \sum_{i=1}^{n} x_{i(t)} \sum_{k=2}^{t} \left(\frac{1 - a_i^{t-k+1}}{1 - a_i} \right) r_{i(k)} = \sum_{i=1}^{n} \sum^{t} x_{i(t)} P_i(t)$$

Los planos son perpendiculares al eje $\theta_1(t)$ y paralelos a $(\mu_{p(t)}, \theta_2(t))$. La inversión se efectúa en el título con menor $M_i(t)$.

4. $p = 0, q = 1$. Análogamente al caso 3 la inversión se hará en el título con menor $Q_{i.r}(t)$.

En los restantes casos se van obteniendo los planos óptimos que cortarán a los ejes con menor o mayor inclinación dependiendo de los valores de p y q.

5. COTAS EN LAS INVERSIONES

Consideremos el problema con la restricción de que no es autorizada una inversión superior a 0,5 en ningún título.

Determinada la frontera eficiente en el caso general, para un p y q particulares se invertirá en el título de mayor $W_{i(t)}$ la cantidad autorizada 0,5, este título está asociado a una cara óptima. De los restantes planos óptimos, determinamos uno que llamaremos plano subfrontera y será aquel que posea un $W_{i(t)}$ más próximo, es decir, el plano «más cercano» a la cara óptima, el cual irá unido a un título en el que se invertirá el sobrante de capital 0,5.

Pudiera ocurrir que asociado a la primera cara óptima existan varios planos subfrontera, en ese caso la cartera óptima puede estar constituida por la inversión 0,5 en el primer título determinado y cualquier combinación sumando 0,5 en los títulos asociados a los planos subfrontera.

Si consideramos el caso particular $q = 0$, el problema es:

$$\text{Max } (1 - p)\mu_{p(t)} - p\theta_1(t)$$

con

$$p \in [0, 1] \quad ; \quad x_{i(t)} \leqslant 0{,}5 \quad , \quad i = 1, \ldots, n$$

o equivalentemente

$$\text{Max} \sum_{i=1}^{n} x_{i(t)} \{(1 - p)\mu_{i(t)} - pP_i(t)\}$$

$p[0, 1]$; $x_{i(t)} \leqslant 0{,}5$, $i = 1, ..., n$

Representamos en abscisas los valores $-P_{i(t)}$ y en ordenadas $\mu_{i(t)}$. Para cada título se considera el segmento de extremos $\mu_{i(t)}$ y $-P_i(t)$ y se traza una perpendicular a cada segmento por el punto $(1 - p)\mu_{i(t)} - pP_i(t)$. Las perpendiculares formarán unos ángulos, y para el p utilizado, la inversión se hará en los dos títulos asociadas a las líneas que forman el mayor ángulo. Si existiesen ángulos iguales, surgen las carteras óptimas de más de dos títulos a que nos referíamos antes. En la figura 5.1 la inversión óptima obtenida es $x_{2(t)} = 0{,}5$, $x_{4(t)} = 0{,}5$.

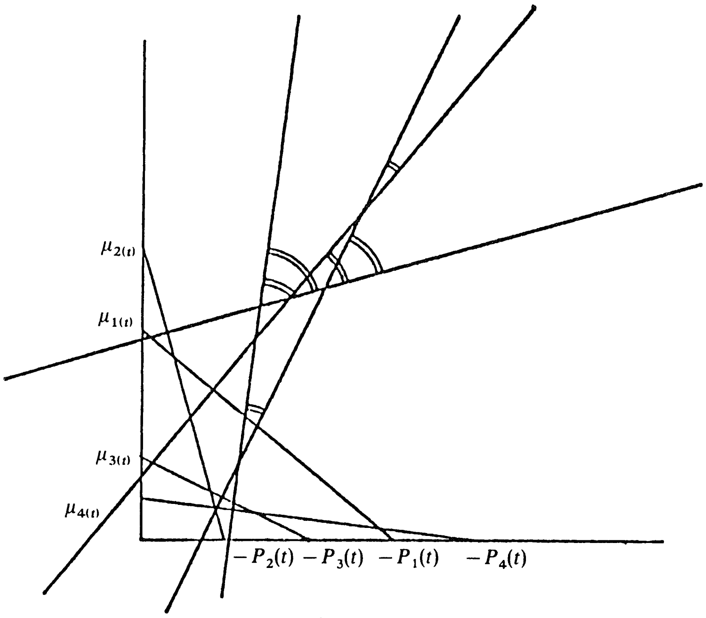

Figura 5.1

El caso $p = 0$ será análogo.

Al igual que con otros modelos simplificados, las soluciones obtenidas son solo aproximadamente eficientes.

6. ANOTACIONES AL PROBLEMA

Sería interesante el estudio de la frontera eficiente en el caso de existir en la oferta algún título sin riesgo asociado, así como el del caso en que un título pueda estar incluido en dos o más sectores.

Hemos considerado horizonte finito, una de las razones para su consideración serían estudios de postoptimización como la búsqueda de un intervalo $(t_0, t_0 + r)$ en donde fuese posible mantener como óptimas las obtenidas en t_0 sin que ello supusiese una diferencia para el inversor y en el caso de admitir un título sin riesgo, estudiar el desplazamiento de la cartera del mercado a lo largo de un intervalo.

REFERENCIAS

COHEN, K. J., y POGUE, J. A. (1967): «An empirical evaluation of alternative portfolio selection models», *J. Business*, vol. 40, pp. 166-193.

ELTON, E. J., y GRUBER, M. J. (1979): «Simple criteria for optimal portfolio selection: The multi-index case», en E. J. Elton y M. J. Gruber (eds.), Portfolio Theory, 25 Years After. *TIMS Studies in the Management Sciences*, vol. 11, North-Holland, pp. 7-19.

FERNANDEZ FERNANDEZ, M. A. (1984): «Un estudio dinámico de cuestiones notables en teoría de inversión», Tesis doctoral, Santiago (1984).

SHARPE, W. (1963): «A simplified model for portfolio analysis», *Management Sci.*, vol. 9, pp. 227-293.

SHARPE, W. (1964): «Capital asset prices: A theory of market equilibrium under condition of risk», *J. Fiance*, vol. 19, pp. 425-442.

SHARPE, W. (1971): «A linear programming approximation for the general portfolio selection problem», *Journal of Finan. and Quant. Analysis (Dec. 1971)*, pp. 1263-76.

WALLINGFORD, B. (1967): «A survey and comparison of portfolio selection models», *J. Finan. and Quant. Anal.*, vol. 2, 67, pp. 85-106.