TRABAJOS DE ESTADISTICA
Vol. 6, núm. 2, 1991, pp. 3 a 10

UN MODELO GENERAL PARA DETERMINAR LA EDAD DE UN SISTEMA DE SOLERAS

FCO JAVIER GIRÓN
Departamento de Matemáticas. U. D. de Estadistica
Facultad de Ciencias. Campus de Teatinos s/n
29071-Málaga

1. Introducción

En esta nota presentamos un método general para calcular la edad de un sistema de soleras a lo largo del tiempo, que generaliza y unifica resultados obtenidos por Baker *et al.* (1952), que puede ser fácilmente programado para cualquier sistema de criaderas, de modo que sea sencillo simular el comportamiento del mismo según diversas condiciones iniciales y en función de ciertos parámetros que pueden ser regulados a priori como la frecuencia de las extracciones, el número de andanas y la proporción de líquido extraído.

Desde una perspectiva tanto teórica como práctica es interesante el estudio a largo plazo del sistema, es decir, su comportamiento asintótico que demuestra que bajo ciertas condiciones que se suelen dar en la práctica, el sistema adquiere un carácter estacionario, de modo que, sin cambiar las condiciones del sistema, no es posible sobrepasar una edad límite en cada una de las etapas del sistema, por muy dilatado que sea el tiempo transcurrido.

También se estudia el comportamiento de la solera del sistema a lo largo del tiempo antes de alcanzar el régimen estacionario, obteniéndose resultados similares a los del artículo citado, que señalan algunos errores de cálculo del mismo.

Este modelo que estudia la evolución de la edad de un líquido a lo largo del tiempo, es susceptible de ser generalizado al estudio de otras

Recibido, octubre 1989.
Revisado, abril 1990.

características del mismo que también evolucionan durante el proceso de crianza, debido principalmente a la interacción del líquido con las botas y a los procesos químicos que se desarrollan, y que inciden en la calidad del mismo y en la homogeneidad del producto final.

2. El modelo: su comportamiento asintótico

Supongamos que K es un número de andanas en un sistema de soleras, ordenadas de menor a mayor, es decir, siendo la primera andana la que recibe la primera holanda y la K-ésima la *solera*, sin que esto implique necesariamente que las más jóvenes precedan a las más viejas, que aunque esto suele ocurrir en la práctica, no es necesario para el desarrollo del modelo.

Por $X_1^{(0}, ..., X_k^{(0}$ designaremos la edad inicial de cada una de las barricas de la andana correspondiente que, por ejemplo, en sistemas tradicionales con sacas anuales serían 1, 2, ..., k años. Por $X_1^{(n}, ..., X_k^{(n}$ designaremos la edad de las botas de las andanas correspondientes tras n períodos o trasiegos justo antes de la n-ésima extracción, extracciones que no tienen por qué realizarse en períodos idénticos, aunque en la práctica suele ser así (anuales, semianuales, cuatrimestrales, etc.) Por $t_1, ..., t_n$ representaremos el tiempo transcurrido justo antes de la $1^a, ..., n^a$ extracción que, como hemos indicado, suele ser el mismo. Por último, sea p la proporción de líquido que se extrae en cada operación de saca, que supondremos es la misma en cada una de los períodos y la misma para cada una de las andanas del sistema de soleras (el modelo podría también incorporar esta circunstancia sin mucha complicación de cálculo pero, de momento, no la consideramos). Por $q = 1 - p$ representaremos la proporción de líquido que permanece en las botas en cada extracción.

Con estas hipótesis y suponiendo, por último, que la primera andana se rellena siempre con holandas de edad 0, la evolución de la edad del líquido en el sistema justo antes de la primera extracción, tras un período de duración t_1, viene descrita por el siguiente sistema de ecuaciones recurrentes

$$\begin{array}{l} X_1^{(1} = qX_1^{(0} + q0 + t_1 \\ X_2^{(1} = qX_2^{(0} + pX_1^{(0} + t_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ X_k^{(1} = qX_k^{(0} + pX_{k-1}^{(0} + t_1 \cdot \end{array} \tag{2.1}$$

Tras el período t_2 la edad del líquido de cada una de las andanas, sería

$$\begin{aligned} X_1^{(2} &= qX_1^{(1} + q0 + t_2 \\ X_2^{(2} &= qX_2^{(1} + pX_1^{(1} + t_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_k^{(2} &= qX_k^{(1} + pX_{k-1}^{(1} + t_1, \end{aligned} \tag{2.2}$$

y, en general, al cabo de n períodos la edad del líquido en cada una de las andanas, se obtendría de la recurrencia

$$\begin{aligned} X_1^{(n} &= qX_1^{(n-1} + q0 + t_n \\ X_2^{(n} &= qX_2^{(n-1} + pX_1^{(n-1} + t_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_k^{(n} &= qX_k^{(n-1} + pX_{k-1}^{(n-1} + t_n, \end{aligned} \tag{2.3}$$

que, en forma matricial, se puede escribir, simplemente como

$$\mathbf{X}^{(n} = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ p & q & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & q & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & p & q \end{pmatrix} \mathbf{X}^{(n-1} + t_n\mathbf{1}, \tag{2.4}$$

donde el vector **1** es un vector k-dimensional con todas sus coordenadas iguales a 1.

Si denominamos **P** a la matriz $k \times k$ anterior, la relación de recurrencia se escribirá para la etapa n-ésima

$$\mathbf{X}^{(n} = \mathbf{P}\mathbf{X}^{(n-1} + t_n\mathbf{1}, \tag{2.5}$$

que puede ser fácilmente programada y proporciona de forma inmediata la edad del líquido de todas las botas del sistema.

Otra expresión alternativa de la recurrencia, en términos de las condiciones iniciales $\mathbf{X}^{(0}$, resulta ser

$$\mathbf{X}^{(n} = \mathbf{P}^n\mathbf{X}^{(0} + \left(\sum_{j=0}^{n-1} t_{n-j}\mathbf{P}^j\right)\mathbf{1}. \tag{2.6}$$

que permite el estudio del comportamiento del sistema cuando transcurre mucho tiempo y muestra el carácter estacionario del mismo, es decir, a partir de un cierto período, e independientemente de las condiciones iniciales, la edad del líquido se estabiliza y no puede sobrepasar ciertos límites. El comportamiento asintótico del sistema nos sirve para determinar la influencia de ciertas variables en la evolución de la edad del líquido. En particular demostraremos que, suponiendo sacas a lo largo de períodos iguales, la estrategia óptima consiste en 1.º: alargar los períodos de saca lo máximo posible, siempre que sea compatible con la demanda del producto (lo cual abarata, por otro lado, el coste del mismo); 2.º: disminuir la proporción p de líquido en cada saca y 3.º: aumentar el número de andanas del sistema. Algunas de estas conclusiones concuerdan con los resultados empíricos obtenidos por Baker *et al.* (1952). Sin embargo, no hay que olvidar que la edad del líquido no es el único factor determinante en la calidad del producto final y, por lo tanto, las conclusiones que obtenemos respecto de la edad del producto, que básicamente nos dice que mediante el procedimiento de crianza individual podemos obtener productos de más edad, no son aplicables a otros factores que determinan la calidad del producto final como pudieran ser el *extracto seco*, la cantidad de *lignina*, etc., problemas que pueden abordarse mediante un estudio similar al presente.

Para estudiar el comportamiento asintótico del sistema, observemos que la matriz $\mathbf{P}$ se puede descomponer como $\mathbf{P} = q\mathbf{I} + p\mathbf{N}$, donde $\mathbf{I}$ es la matriz identidad de dimensión k y $\mathbf{N}$ es una matriz nilpotente completa en forma canónica. De aquí que sea fácil calcular la potencia n-ésima de $\mathbf{P}$, teniendo en cuenta que para $n \geqslant k\, \mathbf{N}^n = \mathbf{O}$. Concretamente se tiene que si $n < k$ entonces

$$\mathbf{P}^n = (q\mathbf{I} + p\mathbf{N})^n = \sum_{i=o}^{n} \binom{n}{i} q^{n-i} p^i \mathbf{N}^i, \tag{2.7a}$$

mientras que si $n \geqslant k$, entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{P}^n = q^n\mathbf{I} + \binom{n}{1} q^{n-1} p\mathbf{N} + \binom{n}{2} q^{n-2} p^2 \mathbf{N}^2 + \cdots + \\ + \binom{n}{k-1} q^{n-k+1} p^{k-0} \mathbf{N}^{k-1}.\end{aligned} \tag{2.7b}$$

De la expresión última se deduce que $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n = \mathbf{O}$, con lo que el comportamiento asintótico de $\mathbf{X}^{(n}$ depende del de la serie matricial $\Sigma_{j=0}^{n-1} t_{n-j}\mathbf{P}^j$. El comportamiento asintótico de ésta, a su vez depende de la política seguida en las extracciones. Como ya advertimos, generalmente los períodos de saca suelen ser homogéneos a lo largo del tiempo. Si suponemos que los períodos t, son todos idénticos a t, no sólo el estudio del comportamiento a largo plazo sino el de la evolución del sistema a lo largo del tiempo se simplifica. En efecto, la ecuación (2.6) se reduce a

$$\mathbf{X}^{(n} = \mathbf{P}^n\mathbf{X}^{(0} + t\left(\sum_{j=o}^{n-1} \mathbf{P}^j\right)\mathbf{1}. \tag{2.8}$$

que puede escribirse

$$\mathbf{X}^{(n} = \mathbf{P}^n\mathbf{X}^{(0} + t(\mathbf{I} - \mathbf{P}^n)(\mathbf{I} - \mathbf{P})^{-1}\mathbf{1}, \tag{2.9}$$

donde $(\mathbf{I} - \mathbf{P})^{-1}$ es la matriz inversa de la $(\mathbf{I} - \mathbf{P})$. Teniendo en cuenta que esta inversa es

$$(\mathbf{I} - \mathbf{P})^{-1} = \frac{1}{p}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.10}$$

se tiene que

$$\mathbf{X}^{(n} = \mathbf{P}^n\mathbf{X}^{(0} + \frac{t}{p}(\mathbf{I} - \mathbf{P}^n)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ k \end{pmatrix} = \frac{t}{p}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ k \end{pmatrix} - \mathbf{P}^n\left[\frac{t}{p}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ k \end{pmatrix} - \mathbf{X}^{(0}\right]. \tag{2.11}$$

Y como $\mathbf{P}^n$ se puede expresar en forma explícita

$$\mathbf{P}^n = \begin{pmatrix} q^n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \binom{n}{1}q^{n-1}p & q^n & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \binom{n}{1}q^{n-1}p & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \binom{n}{k-2}q^{n-k+2}p^{k-2} & \cdots & \binom{n}{1}q^{n-1}p & q^n & 0 \\ \binom{n}{k-1}q^{n-k+1}p^{k-1} & \binom{n}{k-2}q^{n-k+2}p^{k-2} & \cdots & \binom{n}{1}q^{n-1} & q^n \end{pmatrix},$$

se tiene así una solución explícita de la edad de todo el sistema a lo largo del tiempo en función de la edad inicial de las barricas $\mathbf{X}^{(0}$, del número de períodos transcurridos, de la duración de cada período t, del número de andanas k del sistema y de la proporción (en tanto por uno) p de líquido extraído.

Obsérvese que el primer término de (2.11) es precisamente el límite, cuando n crece indefinidamente, ya que como hemos visto anteriormente $\mathbf{P}^n \to \mathbf{O}$, siendo este límite

$$\mathbf{X}^{(\infty} = \frac{t}{p}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ k \end{pmatrix}.$$

La interpretación de este resultado es que la edad máxima del líquido de la andana j-ésima es precisamente jt/p, independientemente de la edad inicial del líquido que contuviera, y que esta edad puede ser aumentada bien aumentando el período t entre extracciones o bien disminuyendo la proporción p de líquido extraído. Obsérvese también que la edad del líquido de la *solera* es kt/p, de modo que al aumentar k también aumenta linealmente la edad límite del producto final.

Hay que advertir, sin embargo, que estas conclusiones son a largo plazo y que, en particular, el tiempo necesario para alcanzar un porcentaje elevado de la edad del régimen estacionario, depende en gran medida de p y, en menor medida, de k. A medida que p disminuye, más lenta es la convergencia de $\mathbf{P}^n$ hacia $\mathbf{O}$.

Si, por otra parte, lo que se desea es estabilizar pronto el sistema, aunque la edad límite sea baja, la ecuación (2.11) y la forma de la matriz $\mathbf{P}^n$ nos dice que la política óptima sería, en este caso, aumentar p (próximo a 1), y disminuir t. Sin embargo, esta solución no parece sensata, a pesar de las recomendaciones de Baker *et al.*, debido al razonamiento que sigue.

Como veremos a continuación, estudiando la evolución de la edad del líquido en la *solera*, la máxima tasa de evolución se obtiene en las k primeras etapas del proceso y, a partir de este momento empieza a diminuir progresivamente. De aquí se concluye que, también la política óptima a corto plazo, es similar a la anterior, es decir, aumentar k y t y reducir p. Observemos que esta conclusión llevada al límite, es decir,

$p = 0$, nos lleva a la conclusión, por otro lado obvia, de que el sistema de criaderas, *si sólo se tiene en cuenta la edad del producto final y no otras características aleatorias como la homogeneidad del producto, la proporción de ciertas substancias transmitidas por la bota durante el período de crianza, etc.*, es menos eficiente que el sistema de crianza en botas individuales.

El estudio del sistema en las primeras n etapas, si $n \leqslant k$, se puede realizar directamente a partir de la ecuación (2.11) y de la expresión de la matriz $\mathbf{P}^n$ en función de las condiciones iniciales $\mathbf{X}^{(0}$. Dependiendo de estas últimas y del período t entre extracciones, Baker *et al.*, consideran diversos modelos, que denominan *tipos*. Si las extracciones son anuales $t = 1$, si son semianuales $t = 1/2$, consideran dos tipos A y B y, por último, si son trimestrales $t = 1/4$, al modelo lo denominan de tipo C. En todos los casos, salvo el tipo A, la edad inicial del sistema en años es $\mathbf{X}^{(0} = (0, 1, ..., k - 1)$, mientras que en sistemas de tipo A la edad de partida del sistema es $\mathbf{X}^{(0} = (0, 0, 1, 1, ..., (k - 2)/2, (k - 2)/2$ si k es par y $\mathbf{X}^{(0} = (0, 1, 1, 2, 2, ..., (k - 1)/2, (k - 1)/2$ si k es impar.

Excluyendo a los sistemas de tipo A, que son algo más complicados que el resto, para los demás la ecuación (2.11) adopta la forma

$$\mathbf{X}^{(n} = \frac{t}{p}\begin{pmatrix}1\\2\\\vdots\\k\end{pmatrix} - \left(\frac{t}{p} - 1\right)\mathbf{P}^n\begin{pmatrix}1\\2\\\vdots\\k\end{pmatrix} - \mathbf{P}^n\mathbf{1}. \qquad (2.12)$$

De aquí se deduce que la edad de la solera X_k^n al cabo de n, con $n \leqslant k$, extracciones y tras algunos cálculos, es

$$X_k^n = k - 1 + n(t - p).$$

que establece una relación lineal entre X_k^n y n cuya intensidad depende de la pendiente $t - p$. Obviamente, la ordenada en el origen es $k - 1$ la edad inicial de la *solera*.

De esta fórmula se deduce lo que comentamos anteriormente, que con el fin de maximizar la edad del producto final de las *soleras* durante la primera fase de la evolución del sistema, es necesario aumentar sobre todo t, disminuir p —en ningún caso ha de ser $p \geqslant t$, pues la edad del líquido podría disminuir o no aumentar como en los sistemas del tipo C (véase la Fig. 8 de Baker *et al.*)— y aumentar k.

La fórmula que relaciona n con X_k^n pierde su carácter lineal cuando

cuando $n > k$ y su expresión analítica es más complicada, aunque puede darse en términos de la función de la distribución Beta, $I_p(k, n - k)$, debido a la bien conocida relación entre la distribución Binomial y la Beta.

La conclusión más importante que se deduce de este estudio es que si únicamente se consideran variables que no dependen de las características propias de las barricas y, por consiguiente no aleatorias, sino que sólo dependen del tiempo, como es, por ejemplo, la edad del producto final, entonces el sistema de soleras no ofrece ventaja alguna sobre el sistema de criaderas individuales. Sin embargo, la intuición y la sabiduría popular parecen apoyar el sistema de soleras como un procedimiento de obtener un producto final más homogéneo. Pero en la calidad de este producto intervienen otros factores, no sólo la edad, por lo que las conclusiones anteriores *no* son en absoluto aplicables a otras características. Variantes del modelo que proponemos pueden ser susceptible de incorporar estos elementos.

3. Referencias

BOKER, G. A.; AMERINE, M. A. and ROESSLER, F. B. (1952): «Theory and application of fractional-blending systems», *Hilgardia*, vol. 21, n.º 14, 383-409.

JOHNSON, N. L. and KOTZ, S. (1969): *Distributions in Statistics: Discrete Distributions*, Wiley: New York.