TRABAJOS DE ESTADISTICA
Vol. 5, núm. 2, 1990, pp. 33 a 51

LA ENERGIA INFORMACIONAL DE ORDEN α Y TIPO β COMO CRITERIO DE COMPARACION DE SISTEMAS DE INFORMACION DIFUSA

PARDO, J. A.
Dpto. de Estadística e I.O.
Escuela Universitaria de Estadística

RESUMEN

En este trabajo se establece un criterio de comparación entre sistemas de información difusa basado en la maximización de la Energía Informacional Esperada de Orden α y Tipo β y se comprueba que verifica las propiedades más relevantes que a nuestro juicio debe verificar un criterio de comparación.

Palabras clave: Información Difusa, Sistema de Información Difusa, Energía Informacional Esperada de Orden α y Tipo β, Criterio de Comparación.

Clasificación A.M.S. (1980): 62B10, 94D05.

ABSTRACT

A criterion, based on the Informational Energy of order α and type β, to compare systems with fuzzy information is established. The most relevant properties, that a comparison criterion should have, are proved.

Key words: Fuzzy Information, Fuzzy Information System, Expected Informational Energy of Order α and Type β, Comparison Criterion.

A.M.S. Subject Classification: 62B10, 94D05.

Title: Informational Energy of order α and type β as comparison criterion of fuzzy information system.

Recibido noviembre 1989.
Revisado abril 1990.

1. INTRODUCCION

Un objetivo básico de la Estadística al realizar un experimento es conseguir información sobre «algo» relacionado con él para extraer conclusiones; de ahí, la gran importancia que tienen tanto las medidas de incertidumbre o de información al permitir evaluar la incertidumbre o información asociada con el mismo. El modelo matemático que se plantea usualmente es considerar un conjunto Θ, espacio de estados o espacio paramétrico, y al que se refiere la información requerida. Para lograr la información precisa se observa un experimento A (o sistema de información probabilístico) en el que las probabilidades de sus resultados dependen de los elementos del conjunto Θ. Es decir, un experimento A vendrá caracterizado por un espacio de probabilidad (X, β_X, P_θ), $\theta \in \Theta$, donde X es el espacio muestral, β_X es una σ-álgebra asociada a X y P_θ, $\theta \in \Theta$, es una familia de distribuciones de probabilidad sobre la σ-álgebra β_X. La reducción de la incertidumbre sobre el conjunto Θ causada por el conocimiento del resultado obtenido en la observación del experimento proporcionará un camino para evaluar la información suministrada por este experimento.

Supuesto que el valor desconocido del parámetro θ se interpreta como una variable aleatoria y que $(\Theta, \beta_\Theta, T)$ es el espacio de probabilidad asociado a tal variable aleatoria, donde Θ es el espacio muestral, β_Θ es una σ-álgebra de Borel sobre Θ y T es una medida de probabilidad perteneciente a la familia T^* de medidas de probabilidad «a priori» especificada. Designando por $f(x/\theta)$ y $p(\theta)$ las densidades asociadas a P_θ y T respecto a sendas medidas σ-finitas v y λ, la información que la observación x del experimento A proporciona acerca de θ y cuantificada en términos de la Energía Informacional de Orden α y tipo β, viene dada por

$$H_\alpha^\beta(p(\theta/x), p(\theta)) = \left[\int_\Theta p(\theta/x)^\alpha \, d\lambda(\theta)\right]^\beta - \left[\int_\Theta p(\theta)^\alpha \, d\lambda(\theta)\right]^\beta \tag{1}$$

y la cantidad de información que se espera obtener por la realización del experimento A viene dada por

$$H_\alpha^\beta(A; p(\theta)) = \int_X \left[\int_\Theta p(\theta/x)^\alpha \, d\lambda(\theta)\right]^\beta f(x) \, dv(x) - \left[\int_\Theta p(\theta)^\alpha \, d\lambda(\theta)\right]^\beta \tag{2}$$

Estas expresiones corresponden a la adaptación de las medidas de certidumbre estudiada por Boekee y Van der Lubbe (1979) y Van der Lubbe (1981) a problemas estadísticos y cuyo análisis resultará como un caso particular de lo que se tratará en el presente trabajo.

Esta cuantificación de la información proporcionada por una determinada observación o la que se espera obtener antes de la realización del experimento se realiza sobre la base de que la capacidad de observación del experimento es tal que permite asignar cada suceso observable asociado al experimento a un subconjunto del espacio muestral. Sin embargo, a veces no es posible la distinción nítida del resultado experimental, sino que los sucesos observables sólo pueden describirse mediante subconjuntos difusos del espacio muestral, Zadeh (1965).

De forma más precisa, se admitirá tanto en este apartado como en los posteriores que la información que proporciona la observación del sistema de información probabilístico A sólo puede conocerse de forma aproximada y que tal conocimiento aproximado permite expresar la información como un subconjunto difuso sobre X, denotado bien por $\mathscr{X}$, bien por $\{(x, \mu_{\mathscr{X}}(x))\}_{x\in X}$, o simplemente mediante la función de pertenencia $\mu_{\mathscr{X}}$, donde $\mu_{\mathscr{X}}$ asocia a cada elemento $x \in X$ un número real en $[0, 1]$ de forma que $\mu_{\mathscr{X}}(x)$ representa el «grado de pertenencia» de x a $\mathscr{X}$ (o grado de compatibilidad del resultado x con la información difusa $\mathscr{X}$). Seguidamente se establecerán los conceptos de «Información Difusa» y «Sistema de Información Difusa» dados por Tanaka et al. (1979) que serán esenciales en el desarrollo del presente trabajo.

Definición 1

Se denomina Información Difusa a partir del sistema de información probabilístico A, cuyo espacio de probabilidad asociado es $(X, \beta_X, f(x/\theta))_{\theta\in\Theta}$ a todo suceso difuso $\mathscr{X}$ sobre X (esto es, a todo conjunto difuso $\mathscr{X}$ sobre X cuya función de pertenencia $\mu_{\mathscr{X}}$ es medible Borel).

Definición 2

Se denomina Sistema de Información Difusa $\mathscr{X}^*$, asociado al sistema de información probabilístico A, a toda partición difusa del espacio de observaciones X, mediante sucesos difusos. Es decir, $\mathscr{X}^*$ es un Sistema de Información Difusa asociado al sistema de información probabilístico A, si todo $\mathscr{X} \in \mathscr{X}^*$ es un suceso difuso sobre X y además $\sum_{\mathscr{X} \in \mathscr{X}^*} \mu_{\mathscr{X}}(x) = 1 \; \forall \, x \in X$ (Condición de ortogonalidad).

A partir del concepto de probabilidad de un suceso difuso dado por Zadeh (1968) se tienen los siguientes conceptos:

- $\mathscr{P}(\mathscr{X}/\theta) = \int_X \mu_{\mathscr{X}}(x) f(x/\theta) \, d\nu(x)$

  (Probabilidad de la Información Difusa $\mathscr{X}$, dado el parámetro $\theta \in \Theta$, inducida por P_θ)

- $\mathscr{P}(\mathscr{X}) = \int_\Theta \mathscr{P}(\mathscr{X}/\theta) p(\theta) \, d\lambda(\theta)$

  (Distribución predictiva sobre $\mathscr{X}^*$)

- $\mathscr{P}(\theta/\mathscr{X}) = \dfrac{p(\theta)\mathscr{P}(\mathscr{X}/\theta)}{\mathscr{P}(\mathscr{X})}$

  (Distribución de probabilidad a posteriori sobre Θ dada la información difusa $\mathscr{X}$)

Una vez introducidos estos conceptos se está en condiciones de adaptar las medidas generalizadas de certidumbre introducidas por Boekee y Van der Lubbe (1979) y que en esencia son una generalización de la medida de información Energía Informacional (Pardo, L. (1977, 1981, 1982, 1983, 1984, 1985), García-Carrasco, M. P. (1982)), cuando la única información obtenida acerca de los parámetros es nítida, al caso en que ésta sea difusa y se disponga de información a priori sobre los parámetros.

Se comenzará adaptando la expresión (1) de forma que permita cuantificar la cantidad de información que una información difusa $\mathscr{X}$ proporciona acerca del parámetro desconocido θ (Pardo, J. A. (1989)).

Definición 3

Sea A un sistema de información probabilístico y $\mathscr{X}$ una información difusa obtenida al observar A. La cantidad de información asociada a $\mathscr{X}$ acerca del parámetro desconocido θ, cuando la distribución a priori es

$p(\theta)$ viene dada, en términos de la Energía Informacional de Orden α y Tipo β, por

$$H_\alpha^\beta(\mathscr{P}(\theta/\mathscr{X}), p(\cdot)) = \left(\int_\Theta \mathscr{P}(\theta/\mathscr{X})^\alpha \, d\lambda(\theta)\right)^\beta - \left(\int_\Theta p(\theta)^\alpha \, d\lambda(\theta)\right)^\beta$$

para todo par $(\alpha, \beta) \in D$, donde

$$D = \{(\alpha, \beta)/0 < \alpha < 1, \beta < 0 \quad \text{ó} \quad \alpha > 1, \alpha\beta > 1\}$$

La expresión anterior permite cuantificar la información que la «Información Difusa $\mathscr{X}$» proporciona acerca del parámetro θ en términos de la diferencia entre la información a posteriori y la información a priori.

La adaptación de (2), se lleva a cabo mediante la siguiente definición.

Definición 4

Sea A un sistema de información probabilístico y supóngase que la información obtenida a partir de A pertenece al sistema de información difusa $\mathscr{X}^*$. La cantidad de información esperada del sistema de información difusa $\mathscr{X}^*$, cuando la distribución a priori es $p(\theta)$, *viene dada por*

$$H_\alpha^\beta(\mathscr{X}^*, p(\cdot)) = \sum_{\mathscr{X} \in \mathscr{X}^*} \mathscr{P}(\mathscr{X})\left(\int_\Theta \mathscr{P}(\theta/\mathscr{X})^\alpha \, d\lambda(\theta)\right)^\beta - \left(\int_\Theta p(\theta)^\alpha \, d\lambda(\theta)\right)^\beta$$

para todo $(\alpha, \beta) \in D$, siendo D el conjunto introducido en la definición anterior.

En lo sucesivo, la cantidad de información precedente se denominará *Energía Informacional esperada de Orden* α *y Tipo* β *asociada al Sistema de Información Difusa* $\mathscr{X}^*$.

Este concepto permite cuantificar la información que se espera obtener de la observación de un sistema de información probabilístico cuando ésta no viene dada de forma nítida.

Obsérvese que la definición anterior depende de la elección de α y β; en el caso particular de que $\alpha = 2$ y $\beta = 1$ se obtiene:

$$H_2^1(\mathscr{X}^*, p(\cdot)) = \sum_{\mathscr{X} \in \mathscr{X}^*} \mathscr{P}(\theta/\mathscr{X})^2 \, d\lambda(\theta) - \int_\Theta p(\theta)^2 \, d\lambda(\theta)$$

que coincide con el concepto de «Ganancia de Energía Informacional» introducida por Pardo, L. (1985) y estudiada posteriormente en Pardo, L.; Menéndez, M. L., y Pardo, J. A. (1986a, 1988). Además en este trabajo queda plenamente justificado el interés e importancia de esta medida de información en la Teoría de los Conjuntos Difusos.

2. COMPARACION DE SISTEMAS DE INFORMACION DIFUSA A TRAVES DE LA MAXIMIZACION DE LA ENERGIA INFORMACIONAL DE ORDEN α Y TIPO β

En determinadas situaciones existe la posibilidad de elegir uno de entre varios sistemas de información difusa que proporcionan información acerca del parámetro de interés. La pregunta parece obvia. ¿Cuál de ellos elegir para su observación? En este apartado se aborda este problema para elegir aquél que proporciona mayor cantidad esperada de información en el sentido de la Energía Informacional de Orden α y Tipo β. Una vez introducido este criterio de elección se estudian sus propiedades comprobándose que verifica las más importantes, que a nuestro juicio debe verificar cualquier criterio de elección.

Sean A y B dos sistemas de información probabilísticos que proporcionan información difusa perteneciente a los sistemas de información difusa $\mathscr{X}^*$ e $\mathscr{Y}^*$. Sea $p(\theta)$ una distribución de probabilidad sobre (Θ, β_Θ) con $p(\theta) = (dT/d\lambda)\ (\theta)$.

Definición 5

Sea N un sistema de información probabilístico nulo del que se obtiene información no difusa según la medida de probabilidad P y sea $\mathscr{N}^*$ un sistema de información difusa sobre N. Entonces

$$\mathscr{X}^* \geqslant \mathscr{N}^* \quad , \quad \forall\, \mathscr{X}^* \quad \text{y} \quad \forall\, p(\cdot)$$

Demostración

Al ser

$$\mathscr{P}(\theta/\mathscr{N}) = \int_N \mu_{\mathscr{N}}(n) \frac{p(n/\theta)}{\mathscr{P}(\mathscr{N})}\, p(\theta)\, d\nu(n) = p(\theta)$$

se tiene

$$H_\alpha^\beta(\mathcal{N}^*, p(\cdot)) = \sum_{\mathcal{N} \in \mathcal{N}^*} \mathcal{P}(\mathcal{N})\left(\int_\Theta \mathcal{P}(\theta/\mathcal{N})^\alpha \, d\lambda(\theta)\right)^\beta - \left(\int_\Theta p(\theta)^\alpha \, d\lambda(\theta)\right)^\beta = 0$$

y como $H_\alpha^\beta(\mathcal{X}^*, p(\cdot)) \geqslant 0$; sin más que aplicar la desigualdad generalizada de Minkowsky (G. H. Hardy, J. E. Littlewood y G. Polya (1983)) y la de Jensen, se tiene

$$H_\alpha^\beta(\mathcal{X}^*, p(\cdot)) \geqslant 0 = H_\alpha^\beta(\mathcal{N}^*, p(\cdot)), \ \forall\, p(\cdot) \quad \text{y} \quad \forall\, \mathcal{X}^*$$

Por tanto

$$\mathcal{X}^* \geqslant \mathcal{N}^*, \ \forall\, p(\cdot) \quad \text{y} \quad \forall\, \mathcal{X}^*$$ ■

El siguiente resultado pone de manifiesto la relación entre los sistemas de información difusa y los sistemas de información completamente difusa. Una *información difusa* $\mathcal{X} \in \mathcal{X}^*$ es *completamente difusa* si su función de pertenencia es constante sobre X, siendo X el espacio de observaciones al que está asociado el sistema de información difusa $\mathcal{X}^*$. Un sistema de información para el que las informaciones difusas asociadas son completamente difusas se denomina *sistema de información completamente difusa.*

Propiedad 2

Sea $\mathcal{X}^*$ un sistema de información completamente difusa y sea $\mathcal{Y}^*$ cualquier sistema de información difusa. Entonces

$$\mathcal{Y}^* \geqslant \mathcal{X}^*, \ \forall\, p(\cdot)$$

Demostración

Al ser $\mathcal{X}^*$ un sistema de información completamente difusa

$$\mu_{\mathcal{X}}(x) = k, \ \forall\, \mathcal{X} \in \mathcal{X}^* \quad \text{y} \quad \forall\, x \in X$$

en consecuencia

$$\mathcal{P}(\mathcal{X}) = \int_X \mu_{\mathcal{X}}(x) f(x) \, d\nu(x) = k$$

y por tanto

$$\mathcal{P}(\theta/\mathcal{X}) = \int_X \mu_{\mathcal{X}}(x) \frac{f(x/\theta)}{\mathcal{P}(\mathcal{X})} p(\theta) \, d\nu(x) = p(\theta)$$

es decir, si $\mathscr{X}^*$ es un sistema de información completamente difusa la distribución de probabilidad sobre $\mathscr{X}^*$ no depende del parámetro $\theta \in \Theta$ luego razonando como en el teorema anterior resulta que

$$\mathscr{Y}^* \geqslant \mathscr{X}^*, \ \forall \, p(\cdot) \qquad \blacksquare$$

Como consecuencia de las dos propiedades anteriores podemos afirmar que *cualquier sistema de información difusa es más informativo que un sistema de información difusa asociado a un sistema de información probabilístico que no proporcione información probabilística sobre el espacio paramétrico y que un sistema de información difusa que sólo suministra información uniformemente imprecisa.*

Propiedad 3

Sean $\mathscr{X}^*$ e $\mathscr{Y}^*$ dos sistemas de información difusa asociados a los sistemas de información probabilísticos A y B. Entonces

$$\mathscr{X}^* \times \mathscr{Y}^* \geqslant \mathscr{X}^*, \ \forall \, p(\cdot)$$

dándose la indiferencia, si $\mathscr{P}(y/\mathscr{X}, \theta)$ es independiente de θ, $\forall \, \mathscr{X} \in \mathscr{X}^*$ y $\forall \, \mathscr{Y} \in \mathscr{Y}^*$, o bien si el sistema de información difusa $\mathscr{Y}^*$ es completamente difuso. Donde $\mathscr{X}^* \times \mathscr{Y}^* = \{(\mathscr{X} \times \mathscr{Y})/\mathscr{X} \in \mathscr{X}^*, \mathscr{Y} \in \mathscr{Y}^*\}$ y se denomina Sistema de Información Difusa Combinado.

Demostración

Consideremos en primer lugar el caso en que $\alpha > 1$.

Aplicando la desigualdad generalizada de Minkowsky se tiene

$$\left[\int_\Theta \mathscr{P}(\theta/\mathscr{X})^\alpha \, d\lambda(\theta)\right]^{1/\alpha} = \left[\int_\Theta \left(\sum_{\mathscr{Y} \in \mathscr{Y}^*} \mathscr{P}(\theta, \mathscr{Y}/\mathscr{X})\right)^\alpha d\lambda(\theta)\right]^{1/\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\mathscr{Y} \in \mathscr{Y}^*} \mathscr{P}(\mathscr{Y}/\mathscr{X}) \left(\int_\Theta \mathscr{P}(\theta/\mathscr{X}, \mathscr{Y})^\alpha \, d\lambda(\theta)\right)^{1/\alpha}$$

luego

$$\left(\int_\Theta \mathscr{P}(\theta/\mathscr{X})^\alpha \, d\lambda(\theta)\right)^\beta \leqslant \left[\sum_{\mathscr{Y} \in \mathscr{Y}^*} \mathscr{P}(\mathscr{Y}/\mathscr{X}) \left(\int_\Theta \mathscr{P}(\theta/\mathscr{X}, \mathscr{Y})^\alpha \, d\lambda(\theta)\right)^{1/\alpha}\right]^{\alpha\beta} \qquad \text{(I)}$$

Sea $Z_{\theta,\mathscr{X}}(\mathscr{Y})$ la variable aleatoria que toma los valores

$$\left(\int_{\Theta} \mathscr{P}(\theta/\mathscr{X}, \mathscr{Y})^{\alpha}\, d\lambda(\theta)\right)^{1/\alpha}, \quad \forall\, \mathscr{X} \in \mathscr{X}^*$$

con probabilidades $\mathscr{P}(\mathscr{Y}/\mathscr{X})$ y consideremos la función convexa $t(x) = x^{\alpha\beta}$ $\forall\,(\alpha, \beta) \in D$, se tiene entonces:

$$E\left[Z_{\theta,\mathscr{X}}(\mathscr{Y})\right] = \sum_{\mathscr{Y} \in \mathscr{Y}^*} \mathscr{P}(\mathscr{Y}/\mathscr{X}) \left(\int_{\Theta} \mathscr{P}(\theta/\mathscr{X}, \mathscr{Y})^{\alpha}\, d\lambda(\theta)\right)^{1/\alpha}$$

y

$$t\left(Z_{\theta,\mathscr{X}}(\mathscr{Y})\right) = \left(\int_{\Theta} \mathscr{P}(\theta/\mathscr{X}, \mathscr{Y})^{\alpha}\, d\lambda(\theta)\right)^{\beta}$$

además

$$E\left[t\left(Z_{\theta,\mathscr{X}}(\mathscr{Y})\right)\right] = \sum_{\mathscr{Y} \in \mathscr{Y}^*} \mathscr{P}(\mathscr{Y}/\mathscr{X}) \left(\int_{\Theta} \mathscr{P}(\theta/\mathscr{X}, \mathscr{Y})^{\alpha}\, d\lambda(\theta)\right)^{\beta}$$

Aplicando la desigualdad de Jensen resulta:

$$\begin{aligned} &\left[\sum_{\mathscr{Y} \in \mathscr{Y}^*} \mathscr{P}(\mathscr{Y}/\mathscr{X}) \left(\int_{\Theta} \mathscr{P}(\theta/\mathscr{X}, \mathscr{Y})^{\alpha}\, d\lambda(\theta)\right)^{1/\alpha}\right]^{\alpha\beta} \leqslant \\ &\leqslant \sum_{\mathscr{Y} \in \mathscr{Y}^*} \mathscr{P}(\mathscr{Y}/\mathscr{X}) \left(\int_{\Theta} \mathscr{P}(\theta/\mathscr{X}, \mathscr{Y})^{\alpha}\, d\lambda(\theta)\right)^{\beta} \end{aligned} \tag{II}$$

y teniendo en cuenta (I) y (II) se llega a que

$$\left(\int_{\Theta} \mathscr{P}(\theta/\mathscr{X})^{\alpha}\, d\lambda(\theta)\right)^{\beta} \leqslant \sum_{\mathscr{Y} \in \mathscr{Y}^*} \mathscr{P}(\mathscr{Y}/\mathscr{X}) \left(\int_{\Theta} \mathscr{P}(\theta/\mathscr{X}, \mathscr{Y})^{\alpha}\, d\lambda(\theta)\right)^{\beta}$$

En el caso $0 < \alpha < 1$ se procede de forma análoga al caso anterior. Multiplicando ahora por $\mathscr{P}(\mathscr{X})$ y sumando en $\mathscr{X}^*$ se obtiene:

$$\begin{aligned} &\sum_{\mathscr{X} \in \mathscr{X}^*} \mathscr{P}(\mathscr{X}) \left(\int_{\Theta} \mathscr{P}(\theta/\mathscr{X})^{\alpha}\, d\lambda(\theta)\right)^{\beta} \leqslant \\ &\leqslant \sum_{\mathscr{X} \in \mathscr{X}^*} \sum_{\mathscr{Y} \in \mathscr{Y}^*} \mathscr{P}(\mathscr{X}, \mathscr{Y}) \left(\int_{\Theta} \mathscr{P}(\theta/\mathscr{X}, \mathscr{Y})^{\alpha}\, d\lambda(\theta)\right)^{\beta} \end{aligned}$$

es decir

$$\mathscr{X}^* \times \mathscr{Y}^* \geqslant \mathscr{X}^*$$

Veamos ahora que si $\mathscr{P}(y/\mathscr{X}, \theta)$ no depende de θ se da la indiferencia.

En efecto, al ser $\mathcal{P}(y/\mathcal{X}, \theta) = \mathcal{P}(y/\mathcal{X})$ se tiene que

$$\mathcal{P}(\theta, y/\mathcal{X}) = \frac{\mathcal{P}(y/\mathcal{X}, \theta)\mathcal{P}(\mathcal{X}, \theta)}{\mathcal{P}(\mathcal{X})} = \frac{\mathcal{P}(y/\mathcal{X})\mathcal{P}(\mathcal{X}, \theta)}{\mathcal{P}(\mathcal{X})} = \mathcal{P}(y/\mathcal{X})\mathcal{P}(\theta/\mathcal{X})$$

Por otra parte

$$\mathcal{P}(\theta, \mathcal{Y}/\mathcal{X}) = \frac{\int_X \int_Y \mu_{\mathcal{Y}}(y)\mu_{\mathcal{X}}(x) f(\theta, x, y)\, dv_1(x)\, dv_2(y)}{\mathcal{P}(\mathcal{X})} = \mathcal{P}(\mathcal{Y}/\mathcal{X})\mathcal{P}(\theta/\mathcal{X})$$

de donde

$$\mathcal{P}(\theta/\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \frac{\mathcal{P}(\theta, \mathcal{Y}/\mathcal{X})\mathcal{P}(\mathcal{X})}{\mathcal{P}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})} = \frac{\mathcal{P}(\mathcal{Y}/\mathcal{X})\mathcal{P}(\theta/\mathcal{X})\mathcal{P}(\mathcal{X})}{\mathcal{P}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})} = \mathcal{P}(y/\mathcal{X})\mathcal{P}(\theta/\mathcal{X})$$

por lo tanto

$$\mathcal{X}^* \times \mathcal{Y}^* \simeq \mathcal{X}^*$$

en el caso de que $\mathcal{P}(y/\mathcal{X}, \theta)$ sea independiente de θ, $\forall\, \mathcal{X} \in \mathcal{X}^*$, $\forall\, y \in Y$.

Queda por ver que si el sistema de información difusa $\mathcal{Y}^*$ es completamente difuso se verifica que $\mathcal{X}^* \times \mathcal{Y}^* \simeq \mathcal{X}^*$.

Ahora bien, al ser $\mathcal{Y}^*$ completamente difuso sobre Y se tiene que

$$\mu_{\mathcal{Y}}(y) = k, \ \forall\, \mathcal{Y} \in \mathcal{Y}^*, \ \forall\, y \in Y$$

por tanto

$$\mathcal{P}(\theta/\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \frac{\int_X \int_Y \mu_X(x) f(\theta, x, y)\, dv_1(x)\, dv_2(y)}{\int_X \int_Y \mu_{\mathcal{X}}(x) f(x, y)\, dv_1(x)\, dv_2(y)} = \frac{\mathcal{P}(\theta, \mathcal{X})}{\mathcal{P}(\mathcal{X})} = \mathcal{P}(\theta/\mathcal{X})$$

y como consecuencia

$$H_\alpha^\beta(\mathcal{X}^* \times \mathcal{Y}^*, p(\cdot)) = H_\alpha^\beta(\mathcal{X}^*, p(\cdot)), \ \forall\, p(\cdot)$$

luego

$$\mathcal{X}^* \times \mathcal{Y}^* \simeq \mathcal{X}^* \qquad \blacksquare$$

Este resultado afirma que *todo sistema de información difusa combinado es al menos tan informativo como cada uno de los sistemas de información componentes.*

Corolario 1

Si $\mathscr{X}^*_{(n)}$ es una muestra aleatoria difusa de orden n obtenida a partir de un sistema de información difusa $\mathscr{X}^*$ se verifica que

$$\mathscr{X}^*_{(n)} \geqslant \mathscr{X}^*_{(n-1)} \qquad (n \geqslant 2)$$

Es decir, cuanto mayor sea el tamaño de la muestra aleatoria difusa más información se tendrá acerca del parámetro θ.

El siguiente resultado prueba que *cualquier sistema de información difusa a partir de otro por la «condensación» determinada por el agrupamiento de sus elementos proporciona menos información que este último.*

Propiedad 4

Si el sistema de información difusa $\mathscr{X}^*$ es un refinamiento del sistema de información difusa $\mathscr{X}^*_0$ entonces

$$\mathscr{X}^* \leqslant \mathscr{X}^*_0, \ \forall\, p(\cdot)$$

Donde se dice que el sistema de información difusa $\mathscr{X}^* = \{\mathscr{X}^m, m \in M\}$ es un refinamiento del sistema de información difusa $\mathscr{X}^*_0 = \{\mathscr{X}^j_0, j \in J\}$ si para cada $\mathscr{X}^m \in \mathscr{X}^*$ existe $J(m) \subset J$ tal que $\mu_{\mathscr{X}^m}(x) = \sum_{j \in J(m)} \mu_{\mathscr{X}^j_0}(x)$ donde $\{J(m), m \in M\}$ es una partición de J. (Ken Kuriyama (1983)).

Demostración

Por ser $\mathscr{X}^*$ un refinamiento de $\mathscr{X}^*_0$, para cada $\mathscr{X}^m \in \mathscr{X}^*$ existe un subconjunto $J(m)$ de J tal que

$$\mu_{\mathscr{X}^m}(x) = \sum_{j \in J(m)} \mu_{\mathscr{X}^j_0}(x)$$

con $\{J(m),\ m \in M\}$ partición de J.

Sea $\alpha > 1$.

Aplicando la desigualdad generalizada de Minkowsky se tiene

$$\left(\int_\Theta \mathscr{P}(\theta/\mathscr{X}^m)^\alpha \, d\lambda(\theta)\right)^{1/\alpha} = \left[\int_\Theta \left(\sum_{j \in J(m)} \frac{\mathscr{P}(\theta/\mathscr{X}^j_0)\mathscr{P}(\mathscr{X}^j_0)}{\sum_{j \in J(m)} \mathscr{P}(\mathscr{X}^j_0)}\right)^\alpha d\lambda(\theta)\right]^{1/\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j \in J(m)} \frac{\mathscr{P}(\mathscr{X}^j_0)}{\sum_{j \in J(m)} \mathscr{P}(\mathscr{X}^j_0)} \left(\int_\Theta \mathscr{P}(\theta/\mathscr{X}^j_0)\, d\lambda(\theta)\right)^{1/\alpha}$$

Por tanto

$$\left(\int_\Theta \mathscr{P}(\theta/\mathscr{X}^m)^\alpha \, d\lambda(\theta)\right)^\beta \leqslant$$

$$\left[\sum_{j\in J(m)} \frac{\mathscr{P}(\mathscr{X}_0^j)}{\sum_{j\in J(m)} \mathscr{P}(\mathscr{X}_0^j)} \left(\int_\Theta \mathscr{P}(\theta/\mathscr{X}_0^j)^\alpha \, d\lambda(\theta)\right)^{1/\alpha}\right]^{\alpha\beta} \tag{I}$$

Sea $Z_\theta(\mathscr{X}_0^j)$ la variable aleatoria que toma los valores

$$\left(\int_\Theta \mathscr{P}(\theta/\mathscr{X}_0^j)^\alpha \, d\lambda(\theta)\right)^{1/\alpha}$$

con probabilidades

$$\mathscr{P}(\mathscr{X}_0^j) / \sum_{j\in J(m)} \mathscr{P}(\mathscr{X}_0^j)$$

Considerando la función convexa $t(x) = x^{\alpha\beta}$, $\forall (\alpha, \beta) \in D$ y aplicando la desigualdad de Jensen, resulta:

$$\left[\sum_{j\in J(m)} \frac{\mathscr{P}(\mathscr{X}_0)}{\sum_{j\in J(m)} \mathscr{P}(\mathscr{X}_0^j)} \left(\int_\Theta \mathscr{P}(\theta/\mathscr{X}_0^j)^\alpha \, d\lambda(\theta)\right)^{1/\alpha}\right]^{\alpha\beta} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j\in J(m)} \frac{\mathscr{P}(\mathscr{X}_0^j)}{\sum_{j\in J(m)} \mathscr{P}(\mathscr{X}_0^j)} \left(\int_\Theta \mathscr{P}(\theta/\mathscr{X}_0^j)^\alpha \, d\lambda(\theta)\right)^\beta \tag{II}$$

Teniendo en cuenta (I) y (II) y que $\sum_{j\in J(m)} \mathscr{P}(\mathscr{X}_0^j) = \mathscr{P}(\mathscr{X}^m)$ se sigue que

$$\mathscr{P}(\mathscr{X}^m)\left(\int_\Theta \mathscr{P}(\theta/\mathscr{X}^m)^\alpha \, d\lambda(\theta)\right)^\beta \leqslant \sum_{j\in J(m)} \mathscr{P}(\mathscr{X}_0^j)\left(\int_\Theta \mathscr{P}(\theta/\mathscr{X}_0^j)^\alpha \, d\lambda(\theta)\right)^\beta$$

donde sumando en m se llega a que

$$\sum_{m\in M} \mathscr{P}(\mathscr{X}^m)\left(\int_\Theta \mathscr{P}(\theta/\mathscr{X}^m)^\alpha \, d\lambda(\theta)\right)^\beta \leqslant \sum_{j\in J} \mathscr{P}(\mathscr{X}_0^j)\left(\int_\Theta \mathscr{P}(\theta/\mathscr{X}_0^j)^\alpha \, d\lambda(\theta)\right)^\beta$$

en consecuencia, resulta que

$$\mathscr{X}^* \leqslant \mathscr{X}_0^*.$$

Para $0 < \alpha < 1$ se procede de forma análoga. ■

Seguidamente se pasará a establecer la relación entre la información que una muestra aleatoria difusa, extraída de un sistema de información difusa, proporciona acerca del parámetro desconocido θ y la que proporciona un estadístico. Entendiéndose como tal *a toda función real T_0 definida sobre $\mathscr{X}^*_{(n)}$*.

A partir de esta definición y admitiendo la relación probabilística considerada por M. A. Gil, M. T. López y P. Gil (1985):

$$\mathscr{P}(t_0/\theta) = P\left(\bigcup_{(\mathscr{X}^1,\dots,\mathscr{X}^n)\in\mathscr{X}^*_{(n)}/T_0(\mathscr{X}^1,\dots,\mathscr{X}^n)=t_0} \{(\mathscr{X}^1,\dots,\mathscr{X}^n)\}\right) =$$

$$= \sum_{(\mathscr{X}^1,\dots,\mathscr{X}^n)\in\mathscr{X}^*_{(n)}/T_0(\mathscr{X}^1,\dots,\mathscr{X}^n)=t_0} \mathscr{P}(\mathscr{X}^1,\dots,\mathscr{X}^n/\theta)$$

se tiene el siguiente resultado.

Propiedad 5

Sea $\mathscr{X}^*_{(n)}$ una muestra aleatoria difusa de orden n y T_0 una aplicación sobre $\mathscr{X}^*_{(n)}$ de tal forma que $T_0(\mathscr{X}^*_{(n)})$ sea un sistema de información difusa, verificándose:

$$\mathscr{P}(\theta, t_0) = \sum_{(\mathscr{X}^1,\dots,\mathscr{X}^n)\in\Lambda(t_0)} \mathscr{P}(\theta, \mathscr{X}^1,\dots,\mathscr{X}^n), \quad \forall\, \theta\in\Theta \text{ y}$$

para casi todo $t_0 \in T_0(\mathscr{X}^*_{(n)})$, donde

$$\Lambda(t_0) = \{(\mathscr{X}^1,\dots,\mathscr{X}^n)\in\mathscr{X}^*_{(n)}/T_0(\mathscr{X}^1,\dots,\mathscr{X}^n) = t_0\}$$

entonces

$$\mathscr{X}^*_{(n)} \geqslant T_0(\mathscr{X}^*_{(n)})$$

dándose la indiferencia si y sólo si

$$\mathscr{P}(\theta/\mathscr{X}^1,\dots,\mathscr{X}^n) = \mathscr{P}(\theta/t_0) \quad , \quad \forall\,(\mathscr{X}^1,\dots,\mathscr{X}^n)\in\Lambda(t_0) \quad , \quad \forall\, t_0\in T_0(\mathscr{X}^*_{(n)})$$

Demostración

La demostración se realiza de forma análoga a la de la propiedad 4.

Propiedad 6

Sea $\mathscr{X}^*$, $\mathscr{Y}^*$, $\mathscr{Z}^*$ tres sistemas de información difusa con $\mathscr{Z}^*$ tal que

$$\forall\,\theta\in\Theta \quad \mathscr{P}(\mathscr{Z}\times\mathscr{X}/\theta) = \mathscr{P}(\mathscr{Z}/\theta)\mathscr{P}(\mathscr{X}/\theta),\ \forall\,\mathscr{X}\in\mathscr{X}^*,\ \forall\,\mathscr{Z}\in\mathscr{Z}^*$$

$$\forall\,\theta\in\Theta \quad \mathscr{P}(\mathscr{Z}\times\mathscr{Y}/\theta) = \mathscr{P}(\mathscr{Z}/\theta)\mathscr{P}(\mathscr{Y}/\theta),\ \forall\,\mathscr{Z}\in\mathscr{Z}^*,\ \forall\,\mathscr{Y}\in\mathscr{Y}^*$$

Entonces si

$$\mathscr{X}^* \geqslant \mathscr{Y}^*, \ \forall \, p(\cdot)$$

se verifica que

$$\mathscr{X}^* \times \mathscr{Z}^* \geqslant \mathscr{Y}^* \times \mathscr{Z}^*, \ \forall \, p(\cdot)$$

Demostración

Al ser

$$H_\alpha^\beta(\mathscr{X}^*, p(\cdot)) \geqslant H_\alpha^\beta(\mathscr{Y}^*, p(\cdot)), \ \forall \, p(\cdot)$$

se tiene tomando como distribución a priori $\mathscr{P}(\theta/\mathscr{Z})$, que la distribución a posteriori es

$$\forall \, \mathscr{X} \in \mathscr{X}^* \quad \frac{\mathscr{P}(\mathscr{X}/\theta)\mathscr{P}(\theta/\mathscr{Z})}{\int_\Theta \mathscr{P}(\mathscr{X}/\theta)\mathscr{P}(\theta/\mathscr{Z})\, d\lambda(\theta)} = \frac{\mathscr{P}(\mathscr{X}, \theta/\mathscr{Z})}{\mathscr{P}(\mathscr{X}/\mathscr{Z})} = \mathscr{P}(\theta/\mathscr{X}, \mathscr{Z})$$

Por otra parte la distribución incondicional en $\mathscr{X}$, será:

$$\int_\Theta \mathscr{P}(\mathscr{X}/\theta, \mathscr{Z})\, d\lambda(\theta) = \mathscr{P}(\mathscr{X}/\mathscr{Z})$$

con lo cual

$$H_\alpha^\beta(\mathscr{X}^*, p(\cdot/z)) =$$

$$= \sum_{\mathscr{X} \in \mathscr{X}^*} \mathscr{P}(\mathscr{X}/\mathscr{Z})\left(\int_\Theta \mathscr{P}(\theta/\mathscr{X}, \mathscr{Z})^\alpha\, d\lambda(\theta)\right)^\beta - \left(\int_\Theta \mathscr{P}(\theta/\mathscr{Z})^\alpha\, d\lambda(\theta)\right)^\beta$$

De forma análoga

$$H_\alpha^\beta(\mathscr{Y}^*, p(\cdot/z)) =$$

$$= \sum_{\mathscr{Y} \in \mathscr{Y}^*} \mathscr{P}(\mathscr{Y}/\mathscr{Z})\left(\int_\Theta \mathscr{P}(\theta/\mathscr{Y}, \mathscr{Z})^\alpha\, d\lambda(\theta)\right)^\beta - \left(\int_\Theta \mathscr{P}(\theta/\mathscr{Z})^\alpha\, d\lambda(\theta)\right)^\beta$$

Por tanto, se tiene que

$$\sum_{\mathscr{X} \in \mathscr{X}^*} \mathscr{P}(\mathscr{X}/\mathscr{Z})\left(\int_\Theta \mathscr{P}(\theta/\mathscr{X}, \mathscr{Z})^\alpha\, d\lambda\,(\theta)\right)^\beta \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{\mathscr{Y} \in \mathscr{Y}^*} \mathscr{P}(\mathscr{Y}/\mathscr{Z})\left(\int_\Theta \mathscr{P}(\theta/\mathscr{Y}, \mathscr{Z})^\alpha\, d\lambda(\theta)\right)^\beta, \ \forall \, \mathscr{Z} \in \mathscr{Z}^*$$

Multiplicando a ambos miembros de la desigualdad por $\mathscr{P}(\mathscr{Z})$ y sumando en $\mathscr{Z} \in \mathscr{Z}^*$, se obtiene

$$\sum_{\mathscr{X} \in \mathscr{X}^*} \sum_{\mathscr{Z} \in \mathscr{Z}^*} \mathscr{P}(\mathscr{X}, \mathscr{Z}) \left(\int_\Theta \mathscr{P}(\theta/\mathscr{X}, \mathscr{Z})^\alpha \, d\lambda(\theta) \right)^\beta \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{\mathscr{Y} \in \mathscr{Y}^*} \sum_{\mathscr{Z} \in \mathscr{Z}^*} \mathscr{P}(\mathscr{Y}, \mathscr{Z}) \left(\int_\Theta \mathscr{P}(0/\mathscr{Y}, \mathscr{Z})^\alpha \, d\lambda(0) \right)^\beta$$

luego

$$H_\alpha^\beta(\mathscr{X}^* \times \mathscr{Z}^*, p(\cdot)) \geqslant H_\alpha^\beta(\mathscr{Y}^* \times \mathscr{Z}^*, p(\cdot)), \ \forall\, p(\cdot)$$

y por tanto

$$\mathscr{X}^* \times \mathscr{Z}^* \geqslant \mathscr{Y}^* \times \mathscr{Z}^*, \ \forall\, p(\cdot) \qquad \blacksquare$$

Es decir la relación de preferencia entre dos sistemas de información difusa se conserva cuando cada uno de ellos se combina con un sistema de información difusa independiente de los sistemas de información difusa iniciales.

Corolario 2

Sean $\mathscr{X}^*$, $\mathscr{Y}^*$, $\mathscr{Z}^*$, $\mathscr{W}^*$ cuatro sistemas de información difusa que proporcionan información sobre Θ y tales que

- $\mathscr{X}^* \geqslant \mathscr{Y}^* \ \forall\, p(\cdot)$
- $\mathscr{Z}^* \geqslant \mathscr{W}^* \ \forall\, p(\cdot)$
- $\forall\, \theta \ \mathscr{P}(\mathscr{X} \times \mathscr{Z}/\theta) = \mathscr{P}(\mathscr{X}/0)\mathscr{P}(\mathscr{Z}/0), \ \forall\, \mathscr{X} \in \mathscr{X}^* \ , \ \mathscr{Z} \in \mathscr{Z}^*$
- $\forall\, \theta \ \mathscr{P}(\mathscr{Y} \times \mathscr{W}/0) = \mathscr{P}(\mathscr{Y}/0)\mathscr{P}(\mathscr{W}/0), \ \forall\, \mathscr{Y} \in \mathscr{Y}^* \ , \ \mathscr{W} \in \mathscr{W}^*$

Entonces

$$\mathscr{X}^* \times \mathscr{Z}^* \geqslant \mathscr{Y}^* \times \mathscr{W}^*, \ \forall\, p(\cdot)$$

Demostración

Se consideran cuatro nuevos sistemas de información difusa $\mathscr{X}_0^*$, $\mathscr{Y}_0^*$, $\mathscr{Z}_0^*$ y $\mathscr{W}_0^*$ de forma que las distribuciones de probabilidad, condicionadas a cualquier θ, coinciden con las distribuciones de los sistemas de información difusa iniciales y supongamos además que

$$\forall\, \theta \in \Theta \ \mathscr{P}(\mathscr{Y}_0 \times \mathscr{Z}_0/\theta) = \mathscr{P}(\mathscr{Y}_0/\theta)\mathscr{P}(\mathscr{Z}_0/\theta), \ \forall\, \mathscr{Y}_0 \in \mathscr{Y}_0^*, \ \forall\, \mathscr{Z}_0 \in \mathscr{Z}_0^*$$

Entonces, teniendo en cuenta la propiedad anterior, se tiene que

$$H_\alpha^\beta(\mathscr{X}^* \times \mathscr{Z}^*, p(\cdot)) = H_\alpha^\beta(\mathscr{X}_0^* \times \mathscr{Z}_0^*, p(\cdot) \geqslant H_\alpha^\beta(\mathscr{Y}_0^* \times \mathscr{Z}_0^*, p(\cdot)) \geqslant$$
$$\geqslant H_\alpha^\beta(\mathscr{Y}_0^* \times \mathscr{W}_0^*, p(\cdot) = H_\alpha^\beta(\mathscr{Y}^* \times \mathscr{W}^*, p(\cdot) \ \forall\, p(\cdot)$$

Por tanto

$$\mathscr{X}^* \times \mathscr{Z}^* \geqslant \mathscr{Y}^* \times \mathscr{W}^*, \ \forall\, p(\cdot) \qquad \blacksquare$$

Por último veamos que también se puede relacionar un sistema de información probabilístico A y un sistema de información difusa asociado a él.

Propiedad 7

Sea $\mathscr{X}^*$ un sistema de información difusa asociado al sistema de información probabilístico A. Se verifica que

$$\mathscr{X}^* \leqslant A, \ \forall\, p(\cdot)$$

Demostración

Consideremos la variable aleatoria

$$Z_\theta(x) = \left(\int_\Theta p(\theta/x)^\alpha \, d\lambda(\theta)\right)^{1/\alpha}$$

con función de densidad

$$g(x) = f(x)\mu_{\mathscr{X}}(x)/\mathscr{P}(\mathscr{X})$$

y la función $\varphi(x) = x^{\alpha\beta}$ que es convexa $\forall\, (\alpha, \beta) \in D$ se tiene por la desigualdad de Jensen,

$$\left[\int_X \left(\int_\Theta p(\theta/x)^\alpha \, d\lambda(\theta)\right)^{1/\alpha} \frac{f(x)\mu_{\mathscr{X}}(x)}{\mathscr{P}(\mathscr{X})} \, dv_1(x)\right]^{\alpha\beta} \leqslant$$
$$\leqslant \int_X \left(\int_\Theta p(\theta/x)^\alpha \, d\lambda(\theta)\right)^\beta \frac{f(x)\mu_{\mathscr{X}}(x)}{\mathscr{P}(\mathscr{X})} \, dv_1(x)$$

es decir

$$\mathscr{P}(\mathscr{X})\left\{\int_X \left[\int_\Theta \left(\frac{p(\theta/x)f(x)\mu_{\mathscr{X}}(x)}{\mathscr{P}(\mathscr{X})}\right)^\alpha d\lambda(\theta)\right]^{1/\alpha} dv_1(x)\right\}^{\alpha\beta} \leqslant \qquad \text{(I)}$$

$$\leqslant \int_X \left(\int_\Theta p(\theta/x)^\alpha \, d\lambda(\theta) \right)^\beta f(x) \mu_{\mathscr{X}}(x) \, dv_1(x)$$

Ahora bien teniendo en cuenta que si $\alpha > 1$

$$\left[\int_X \left(\int_Y \phi(x) \psi(y) \, dv(y) \right)^\alpha dv(x) \right]^{1/\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant \int_X \left(\int_Y (\phi(x))^\alpha (\psi(y))^\alpha \, dv(x) \right)^{1/\alpha} dv(y)$$

y si $\alpha < 1$ se da la desigualdad en sentido contrario (G. H. Hardy, J. E. Littlewood y G. Polya, pág. 148), se tiene que si $\alpha > 1$

$$\int_X \left[\int_\Theta \left(\frac{p(\theta/x) f(x) \mu_{\mathscr{X}}(x)}{\mathscr{P}(\mathscr{X})} \right)^\alpha d\lambda(\theta) \right]^{1/\alpha} dv_1(x) \geqslant \left(\int_\Theta \mathscr{P}(\theta/\mathscr{X})^\alpha \, d\lambda(\theta) \right)^{1/\alpha}$$

y si $\alpha < 1$ se obtiene la desigualdad en sentido contrario.

En ambos casos se llega a que

$$\left\{ \int_X \left[\int_\Theta \left(\frac{p(\theta/x) f(x) \mu_{\mathscr{X}}(x)}{\mathscr{P}(\mathscr{X})} \right)^\alpha d\lambda(\theta) \right]^{1/\alpha} dv_1(x) \right\}^{\alpha\beta} \geqslant \qquad \text{(II)}$$

$$\geqslant \left(\int_\Theta \mathscr{P}(\theta/\mathscr{X})^\alpha \, d\lambda(\theta) \right)^\alpha$$

A partir de las desigualdades (I) y (II) se obtiene que

$$\mathscr{P}(\mathscr{X}) \left(\int_\Theta \mathscr{P}(\theta/\mathscr{X})^\alpha \, d\lambda(\theta) \right)^\beta \leqslant$$

$$\leqslant \int_X \left(\int_\Theta p(\theta/x)^\alpha \, d\lambda(\theta) \right)^\beta f(x) \mu_{\mathscr{X}}(x) \, dv_1(x)$$

y sumando en $\mathscr{X} \in \mathscr{X}^*$ se tiene

$$\sum_{\mathscr{X} \in \mathscr{X}^*} \mathscr{P}(\mathscr{X}) \left(\int_\Theta \mathscr{P}(\theta/\mathscr{X})^\alpha \, d\lambda(\theta) \right)^\beta \leqslant$$

$$\leqslant \int_X \left(\int_\Theta p(\theta/x)^\alpha \, d\lambda(\theta) \right)^\beta f(x) \, dv_1(x)$$

luego efectivamente

$$\mathscr{X}^* \leqslant A \qquad \blacksquare$$

Este teorema afirma que *todo sistema de información difusa suministra menos cantidad de información acerca de la cantidad de interés que el sistema de información probabilístico al que está asociado; esta disminución se debe a la indeterminación que aparece con la falta de nitidez en la observación del sistema de información probabilístico. Es decir, la difusidad siempre entraña pérdida de información.*

BIBLIOGRAFIA

BOEKEE, D. E., y VAN DER LUBBE, J. C. A. (1979): «Some aspect of error bounds in feature selection», *Pattern Recognition*, 11, pp. 353-360.

BOUCHON, B. (1982): «Comparison of Experiments and improvement of Models», *Proc. Sec. World Conf. on Math. at the servide of man*, 172-175, Canarias.

GARCIA CARRASCO, M. P. (1982): «Criterio Bayesiano para la comparación de experimentos basado en la maximización de la Ganancia de Energía Informacional, *XIII Reunión Nacional de Estadística, Investigación Operativa e Informática*, II, pp. 65-72.

GIL, M. A.; LOPEZ, M. T., y GIL, P. (1984): «Comparison between fuzzy information systems», *Kibernetes*, 13, pp. 245-251.

GIL, M. A.; LOPEZ, M. T., y GIL, P. (1985): «Quantity of information comparison between information systems. 2: Fuzzy States», *Fuzzy Sets and Systems*, 15, 2, pp. 129-145.

HARDY, G. H.; LITTLEWOOD, J. E., and POLYA, G. (1934): Inequalities, Cambridge Univ. Press, Cambridge.

KURIYAMA, K. (1983): «Entropy of a finite partition of fuzzy sets», *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 94, pp. 38-43.

PARDO, J. A. (1989): «La Energía Informacional de orden α y tipo β en el análisis y diseño de sistemas de información difusa», *Ph. D. Thesis*.

PARDO, L. (1977): «La Energía Informacional como fundamento de una teoría de la información», *Memoria Instituto Universitario de Estadística*, Madrid.

PARDO, L. (1981): «Energía Informacional Util», *Trabajos de Estadística e Investigación Operativa*, 32, pp. 85-94.

PARDO, L. (1982): «Algunas consideraciones acerca de la Energía Informacional», Estadística Española, 94, 113-122.

PARDO, L.: (1983): «The order α information energy gain in sequential design of experiments», *Proceedings Third European Young Statisticians Meeting,* pp. 140-147.

PARDO, L. (1984): «Plan de muestreo secuencial basado en la Energía Informacional en el modelo de Bernouilli», *Estadística Española,* 104, pp. 27-49.

PARDO, L. (1985): «Information Energy of a fuzzy event and of a partition of fuzzy events», *IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics*, 15, pp. 139-144.

PARDO, L.; MENENDEZ, M. L., y PARDO, J. A. (1986a): «The Information Energy Gain as a Criterion of Comparison between Fuzzy Information Systems, *Cybernetics and System'86,* pp. 599-608; D. Reidel Publishing Company.

PARDO, L.; MENENDEZ, M. L., y PARDO, J. A. (1986b): «The f^*-Divergence as a criterion of comparison between fuzzy information systems», *Kibernetes,* 15, 189-194.

PARDO, L.; MENENDEZ, M. L., and PARDO, J. A. (1988): «A sequential selection method of a fixed number of fuzzy information systems based on the information energy gain», *Fuzzy Sets and Systems,* 25, 97-105.

TANAKA, H.; OKUDA, T., and ASAI, K. (1979): «Fuzzy information and decision in statistical model», *Advances in Fuzzy Sets Theory and Applications,* pp. 303-320, North-Holland.

TANEJA, I. J.; MENENDEZ, M. L., and PARDO, J. A. (1989): «A Comprison criterion among Fuzzy Information Systems based on Concave functions», enviado a la revista *Fuzzy Sets and Systems.*

VAN DER LUBBE, J. C. A. (1981): «A generalized probabilistic theory of the measurement of certainty and information», *Ph. D. Thesis,* Dept. of Electrical Engineering, Delft Univ. of tecnology. Delft, The Netherlands.

ZADEH, L. A. (1965): «Fuzzy Sets», *Information and Control.*, 8, pp. 338-353.

ZADEH, L. A. (1968): «Probability measures of fuzzy events», *J. Math. Anal. Appl.,* 23, pp. 421-427.