TRABAJOS DE ESTADISTICA
Vol. 5, núm. 2, 1990, pp. 9 a 22

ROBUSTEZ CUALITATIVA EN REGIONES DE CONFIANZA*

CUEVAS, A., y SANZ, P.
Dpto. de Matemáticas
Facultad de Ciencias, y
Dpto. de Análisis Económico
Facultad de CC. Económicas
Universidad Autónoma de Madrid

SUMMARY

In this paper, Hampel's concept of qualitative robustness (1968, 1971) is adapted to the problem of estimation by confidence regions. The basic idea is to consider the confidence regions as «generalized estimates» taking values in the space of compact sets endowed with the Hausdorff metric.

In section 3, the qualitative robustness is analyzed in five particular cases, which include confidence regions and tolerance intervals of common use. Section 4 is devoted to discussion and coments.

Key words: Confidence interval, qualitative robustness, random sets, Hausdorff metric.

AMS subject classification: 62F35.

RESUMEN

En este trabajo se propone una adaptación del concepto de robustez cualitativa de Hampel (1968, 1971) al problema de estimación por regiones de confianza. La idea básica de esta adaptación es considerar las regiones de confianza como «estimadores generalizados» que toman valores en un espacio de conjuntos compactos dotado de la métrica de Hausdorff.

En la sección 3, se aplica esta definición en cinco ejemplos de regiones de confianza e intervalos de tolerancia comúnmente usados en Estadística.

Recibido Noviembre 1989.
Revisado Marzo 1990.
* Este trabajo ha sido parcialmente financiado por una beca DGYCIT, PB88-0178.

Por último se incluye una sección en la que se discuten y comentan los resultados.

Palabras clave: Intervalo de confianza, robustez cualitativa, conjuntos aleatorios, distancia de Hausdorff.

AMS clasificación: 62F35.

1. INTRODUCCION

El concepto de robustez cualitativa fue inicialmente propuesto y analizado por Hampel (1968, 1971) para el caso de estimadores puntuales (con valores en $\mathbb{R}$ o en $\mathbb{R}^k$). Posteriormente, dicho concepto se aplicó también al contraste de hipótesis (Rieder, 1982; Lambert, 1982).

En este artículo se estudia la posibilidad de adaptar la teoría de la robustez cualitativa de Hampel a la estimación por regiones de confianza. Esto tiene a nuestro juicio el interés metodológico y conceptual de mostrar que la noción de robustez admite un tratamiento formal unificado en los tres problemas clásicos de la Inferencia Paramétrica.

El punto de vista que se adopta en el presente trabajo, se asemeja a los planteamientos de la «Inferencia Abstracta» en el sentido de interpretar una método de construcción de regiones de confianza C_n, como una variable aleatoria que toma como valores subconjuntos del espacio paramétrico, es decir como un «estimador generalizado» al cual se le puede aplicar la definición y los resultados fundamentales de Hampel convenientemente adaptados.

El planteamiento formal es el siguiente:

Sea $(\mathscr{X}, \mathscr{B}(\mathscr{X}))$ un espacio medible donde $\mathscr{X}$ es un espacio métrico completo y separable y $\mathscr{B}(\mathscr{X})$ denota el σ-álgebra de Borel en $\mathscr{X}$. Si $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ es el espacio «paramétrico», se consideran las aplicaciones medibles C_n

$$C_n : (\mathscr{X}^n, \mathscr{B}(\mathscr{X}^n)) \to (K_\Omega, \mathscr{B}(K_\Omega)) \tag{1}$$

donde $K_\Omega = \{\text{subconjuntos compactos no vacíos de } \Omega\}$ y $\mathscr{B}(K_\Omega)$ es la σ-álgebra de Borel en K_Ω, asociada a la métrica de Hausdorff.

En los casos particulares que se considerarán aquí, C_n será una región de confianza, un intervalo de tolerancia o una banda de confianza para una función de distribución con soporte compacto; en cada una de estas situaciones K_Ω será una familia de subconjuntos compactos del espacio Ω adecuado a cada problema. Los casos de intervalos de tolerancia y bandas de confianza presentan matices diferentes a los del problema clásico de estimación paramétrica por regiones de confianza, si bien tienen en común con este último, el hcho de que el «resultado final» de la estimación es un conjunto aleatorio.

Las hipótesis y notaciones que se utilizarán en el desarrollo posterior son las siguientes:

Se supone $\mathscr{X} = \mathbb{R}$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^k$. En $\mathbb{R}^n$ se considera definida la estructura producto usual con la métrica $d(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \text{máx}\,\{|x_i - x_i'|;\ i = 1, ..., n\}$ donde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ y $\mathbf{x}' = (x_1', x_2', ..., x_n')$. En K_Ω se considera la distancia de Hausdorff d_H, definida entre conjuntos compactos no vacíos por

$$\begin{aligned} d_H(A_1, A_2) &= \inf\{\delta > 0 / A_1 \subset A_2 + \delta\bar{B}(0,1),\ A_2 \subset A_1 + \delta\bar{B}(0,1)\} = \\ &= \inf\{\delta > 0 / A_1 \subseteq A_2^\delta \quad , \quad A_2 \subseteq A_1^\delta\}. \end{aligned}$$

$\forall\, A_1, A_2 \in K_\Omega$, siendo $\bar{B} \equiv \bar{B}(\mathbf{0}, 1) =$ la bola cerrada de $\mathbb{R}^n$ de centro $\mathbf{0}$ y radio unidad y $A_i^\delta = \bigcup_{\mathbf{x} \in A} \bar{B}(\mathbf{x}, \delta)$, denotándose por «+» la suma de Minkowski.

El espacio K_Ω, dotado de la métrica d_H, tiene la propiedad de ser un espacio métrico completo, separable y localmente compacto (Lay, 1982).

Se supondrá también que los estadísticos C_n son invariantes por permutaciones, por lo que podrá considerarse, $C_n(x_1, x_2, ..., x_n) = C_n(\hat{F}_n)$, donde $\hat{F}_n$ denota la distribución empírica asociada a la muestra $(x_1, x_2, ..., x_n)$ de tamaño n, designándose por $\mathscr{F}_n$ el conjunto de las distribuciones empíricas de orden n y por $\mathscr{F}$ el conjunto de todas las funciones de distribución.

2. DEFINICIONES Y RESULTADOS

A partir del planteamiento indicado en (1), una adaptación sencilla de la definición de robustez cualitativa de Hampel (1971) sería la siguiente:

Definición 1. Se dice que la sucesión $\{C_n\}$ de aplicaciones medibles del tipo (1) es cualitativamente robusta en $F \in \mathscr{F}$ respecto de la métrica de Prohorov d_p si y sólo si

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 / \forall\, n,\ \forall\, G\ d_p(F, G) < \delta\ \Rightarrow\ d_p(\mathscr{L}_F(C_n), \mathscr{L}_G(C_n)) < \varepsilon, \qquad (2)$$

siendo $\mathscr{L}_F(C_n)$ y $\mathscr{L}_G(C_n)$ las medidas de probabilidad inducidas por C_n en $\mathscr{B}(K_\Omega)$ bajo F y G, respectivamente.

Debido al supuesto de invariancia ante permutaciones de los estadísticos C_n es también válida en este contexto, la siguiente adaptación directa de la definición de continuidad (para sucesiones de estimadores) propuesta por Hampel (1971).

Definición 2. La sucesión $\{C_n\}$ es continua casi seguro en F si y sólo si

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \exists n_0 / \forall n, \ m \geqslant n_0 \ \ \forall \hat{F}_n, \hat{F}_m \ \ \hat{F}_n \in \mathscr{F}_n \ , \ \hat{F}_m \in \mathscr{F}_m$$

$$d_p(F, \hat{F}_n) < \delta \ \ d_p(F, \hat{F}_m) < \delta \ \Rightarrow \ d_H(C_n(\hat{F}_n), \ C_m(\hat{F}_m)) < \varepsilon \quad \text{c.s. } F$$

La interpretación intuitiva de la Definición 1 es similar a la correspondiente para la definición original de Hampel. En este caso, $\mathscr{L}_F(C_n)$ denotan medidas de probabilidad de variables aleatorias que toman como valores conjuntos, lo cual dificulta el manejo efectivo de esta definición. Puede sin embargo comprobarse (Cuevas, 1988), que las principales condiciones necesarias y condiciones suficientes demostradas por Hampel, se adaptan también con las modificaciones naturales para el caso de estimadores que toman valores en espacios métricos; por tanto, no será preciso el conocimiento exacto de $\mathscr{L}_F(C_n)$.

En particular se verifican los siguientes resultados:

Teorema 1. Si la sucesión $\{C_n\}$ es continua c.s. en F, entonces $\{C_n\}$ es consistente hacia algún $C_\infty(F)$ bajo F, es decir, $\mathscr{L}_F(C_n) \xrightarrow[n \to \infty]{d} C_\infty(F)$.

Teorema 2. Si la sucesión $\{C_n\}$ es tal que:

i) $\{C_n\}$ es continua casi seguro en $F \in \mathscr{F}$.

ii) C_n es continua en $\mathbb{R}^n$ respecto a d_H, para cada n.

Entonces $\{C_n\}$ es robusta en F.

Teorema 3. Sea $\mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F}$ y sea $\{C_n\}$ una sucesión robusta en $F \in \mathscr{F}_0$. Supongamos que

$$\mathscr{L}_G(C_n) \xrightarrow[n \to \infty]{d} C_\infty(G) \in K_\Omega \quad \forall \, G \in \mathscr{U}$$

siendo $\mathscr{U} = \mathscr{U}(F) \subset \mathscr{F}_0$ un entorno de F en la topología relativa de $\mathscr{F}_0$. Entonces la función $C_\infty : \mathscr{U} \to K_\Omega$ es continua en F.

En el Teorema 3 se da una condición necesaria para que se verifiquen la robustez y consistencia simultáneamente. Dicha condición será utilizada en la próxima sección para establecer la no robustez (de acuerdo con la Definición 1) de algunos intervalos de confianza de uso frecuente en la Estadística clásica. A partir de la condición suficiente que se indica en el Teorema 2, se obtienen resultados positivos de robustez en dos ejemplos.

3. EJEMPLOS

En primer lugar, se analiza la robustez de dos ejemplos típicos de intervalos de confianza.

3.1. Intervalo de confianza para la media de una distribución normal de varianza desconocida

Sea $F \sim N(\mu, \sigma)$, con σ desconocida. Para cada n, dado $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, se define el intervalo de confianza para μ, de coeficiente $1 - \alpha$ por

$$C_n(\mathbf{x}) = [\bar{x} - (a_n/\sqrt{n})s \quad \bar{x} + (a_n/\sqrt{n})s] \tag{3}$$

donde a_n es el cuantil de orden $1 - \alpha/2$ de la distribución t de Student con $n - 1$ grados de libertad y $s^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2/(n - 1)$.

Como $\lim_{n\to\infty} \bar{x} \pm (a_n/\sqrt{n})s = \mu$ c.s. F, ya que, $\lim_{n\to\infty} a_n = k$ (k es el cuantil de orden $1 - \alpha/2$ de la distribución $N(0, 1)$) se verifica que la sucesión $\{C_n\}$ es consistente en F, esto es,

$$C_n(\mathbf{x}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \{\mu\} = C_\infty(F) \in K_{\Omega'} \text{ c.s. } F,$$

pero la función $C_\infty(G) = \left\{\int x\, dG(x)\right\}$ no es débilmente continua en F (respecto a d_H). Así pues, por el Teorema 3 la sucesión de intervalos de confianza, dada en (3), no es cualitativamente robusta en F.

3.2. Intervalo de confianza para la varianza de una distribución normal con media desconocida

Para cada n, dado $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ se define el intervalo

$$C_n(\mathbf{x}) = [c_1 s^2 \quad c_2 s^2] \tag{4}$$

siendo $(n-1)/c_1$ y $(n-1)/c_2$ los cuantiles de orden $1-\alpha/2$ y $\alpha/2$, respectivamente, de una distribución χ^2 con n − 1 grados de libertad.

Teniendo en cuenta que para $i = 1, 2$ $\lim_{n\to\infty} c_i = 1$ es obvio que

$$C_n(\mathbf{x}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \{\sigma^2\} = C_\infty(F) \in K_\Omega \text{ c.s. } F$$

donde $C_\infty(F) = \left\{ \int (x - T(F))^2 \, dF(x) \right\}$ y $T(F) = \int x \, dF(x)$. Como $C_\infty(\cdot)$ no es una función continua en F, razonando como en el ejemplo anterior, se obtiene la no robustez en F de la sucesión de intervalos definidos por (4).

Resultados análogos pueden obtenerse para el intervalo de confianza de la varianza de una distribución normal de media conocida y para el elipsoide de nivel $1-\alpha$ de la media de una distribución normal p-dimensional con matriz de varianzas conocida o desconocida. En todos estos casos, la clave de la no robustez es la consistencia hacia un funcional (la media o la varianza) discontinuo.

A continuación, se proponen dos ejemplos de regiones aleatorias (usadas frecuentemente en Estadística) que verifican la condición (2) de robustez cualitativa.

3.3. Intervalo de tolerancia

Dados $0 < \alpha < \beta < 1$ consideremos el intervalo de tolerancia definido por

$$C_n(\mathbf{x}) = C_n(x_1, \ldots, x_n) = C(\hat{F}_n) = [\hat{F}_n^{-1}(\alpha), \hat{F}_n^{-1}(\beta)] \tag{5}$$

donde $\hat{F}_n^{-1}(t) = \inf\{x / \hat{F}_n(x) \geqslant t\}$. Obsérvese que $C_n(\mathbf{x}) = C(\hat{F}_n)$, siendo $C(F) = [F^{-1}(\alpha), F^{-1}(\beta)]$.

Utilizando el Teorema 2 veremos que si F^{-1} es continua en α y β la sucesión $\{C_n\}$ es robusta en F. Para ello necesitamos demostrar

i) $\{C_n\}$ es continua c.s. en F.

ii) Cada C_n es una función continua en $\mathbb{R}^n$.

En efecto, si F^{-1} es continua en α y β (Clarke, 1983), se verifica

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 / d_p(F, G) < \delta \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ \text{máx}\{|F^{-1}(\alpha) - G^{-1}(\alpha)|, |F^{-1}(\beta) - G^{-1}(\beta)|\} < \varepsilon \qquad (6)$$

lo cual, teniendo en cuenta la definición de d_H, equivale a la continuidad de C en F. Esto prueba i).

Para obtener ii) es suficiente demostrar la continuidad como función de $\mathbb{R}^n$ de $\hat{F}_n^{-1}(\alpha)$ y $\hat{F}_n^{-1}(\beta)$. Se ha de comprobar por tanto (limitándonos al primer caso) que

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 / d(x, y) = \underset{1 \leqslant i \leqslant n}{\text{máx}} |x_i - y_i| < \delta \ \Rightarrow \ |g(x) - g(y)| < \varepsilon$$

donde $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, ..., y_n)$ son elementos de $\mathbb{R}^n$ y

$$g(x_1, ..., x_n) = \inf\{x/\hat{F}_n(x) \geqslant \alpha\}.$$

Supongamos que $g(x_1, ..., x_n) = x_h$. Dado $\varepsilon > 0$, tomemos $\delta = \text{mín}(\varepsilon/2, a/2)$ donde $a = \text{mín}\{|x_i - x_j|, x_i \neq x_j\}$ (si todas las x_i son iguales se tomaría $\delta = \varepsilon$).

Si $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \delta$, entonces $g(y_1, ..., y_n) = y_h$ o bien, si hay elementos repetidos $g(y_1, ..., y_n) = y_k$ como $|y_h - y_k| < \delta$. En cualquiera de los dos casos

$$|g(x_1, ..., x_n) - g(y_1, ..., y_n)| < 2\delta \leqslant \varepsilon$$

como se quería probar.

3.4. Banda de confianza para una función de distribución.

Dada una muestra $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, se denotará por $\underline{x} = (\underline{x}_1, ..., \underline{x}_n)$ el vector definido a partir de $\mathbf{x}$ cuando se ordenan sus componentes de menor a mayor.

Suponemos aquí que F es una función de distribución continua con soporte contenido en el intervalo $[a, b]$. Se define la banda de confianza para F basada en el estadístico de Kolmogorov-Smirnov por

$$S_n(x_1, x_2, ..., x_n) = \bigcup_{i=1}^{n+1} C_i(x_1, x_2, ..., x_n)$$

siendo

$$C_i(x_1, ..., x_n) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / \underset{\sim}{x}_{i-1} \leqslant u \leqslant \underset{\sim}{x}_i,$$
$$\text{máx}\,\{0, \hat{F}_n(\underset{\sim}{x}_i) - d_{1-\alpha}(n)\} \leqslant v \leqslant \text{mín}\,\{1, \hat{F}_n(\underset{\sim}{x}_i) + d_{1-\alpha}(n)\}\}$$

donde

$$i = 1, ..., n+1 \;\; \underset{\sim}{x}_0 = a, \;\; \underset{\sim}{x}_{n+1} = b, \;\; \hat{F}_n(\underset{\sim}{x}_0) = 0, \;\; \hat{F}_n(\underset{\sim}{x}_{n+1}) = 1, \;\; \hat{F}_n(\underset{\sim}{x}_i) = (i-1)/n$$

y $d_{1-\alpha}(n)$ es tal que

$$P[\sup_x |\hat{F}_n(x) - F(x)| < d_{1-\alpha}(n)] = 1 - \alpha,$$

verificándose que $1/n < d_{1-\alpha}(n) = d'_{1-\alpha}/\sqrt{n}$ con $d'_{1-\alpha} < 2$ (Johnson y Leone, 1964). En lo sucesivo $d_{1-\alpha}(n)$ se denotará simplemente por d.

En definitiva, C_i para $i = 1, ..., n + 1$ viene dado por

$$C_i(x_1, ..., x_n) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / \underset{\sim}{x}_{i-1} \leqslant u \leqslant \underset{\sim}{x}_i,$$
$$\text{máx}\left\{0, \frac{i-1}{n} - d\right\} \leqslant v \leqslant \text{mín}\left\{1, \frac{i-1}{n} + d\right\}\Bigg\} \tag{7}$$

Cada uno de estos conjuntos es convexo, compacto y de interior no vacío ya que $x_i \neq x_j \; \forall\, i, j = 1, ..., n + 1$ con probabilidad 1.

Para analizar la robustez de S_n se emplea el Teorema 2, por lo que es preciso demostrar:

i) S_n es continua como función de $\mathbb{R}^n$ para cada n.

Es decir, para toda sucesión $\{\mathbf{x}^k\} \subset \mathbb{R}^n$, tal que $\mathbf{x}^k \xrightarrow[k \to \infty]{} \mathbf{x}$ se ha de verificar

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, k_0 / k \geqslant k_0 \;\Rightarrow\; d_H(S_n(\mathbf{x}^k), \; S_n(\mathbf{x})) < \varepsilon. \tag{8}$$

Esto se prueba en dos pasos:

i1) Para cada $i = 1, ..., n + 1$ se verifica que, dado $\varepsilon > 0$

$$\exists\, k_i / k \geqslant k_i \;\Rightarrow\; d_H(C_i(\mathbf{x}^k), \; C_i(\mathbf{x})) < \varepsilon. \tag{9}$$

En efecto, teniendo en cuenta la forma de los conjuntos $C_i(\cdot)$ dada en (7) y la definición de la distancia d_H se tiene,

$$d_H(C_i(\mathbf{x}^k), \; C_i(\mathbf{x})) = \text{máx}\,\{|x_i - x_i^k|, \; |x_{i-1} - x_{i-1}^k|\}.$$

Por otra parte, si $\mathbf{x}^k \xrightarrow[k \to \infty]{} \mathbf{x}$ entonces

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists k^*/k \geqslant k^* \Rightarrow d(\mathbf{x}^k, \mathbf{x}) < \varepsilon$$

Como $d(\mathbf{x}^k, \mathbf{x}) < \varepsilon \Rightarrow d(\underline{\mathbf{x}}^k, \underline{\mathbf{x}}) < \varepsilon$ (Huber, 1977) se tiene pues que dado $\varepsilon > 0$, el valor $k_i = k^*$ verifica la condición (9) para todo $i = 1, \ldots, n+1$.

i2) La expresión (8) se verifica también tomando $k_0 = k^*$. En efecto, dado $\varepsilon > 0$, se deduce de (9) y de la definición de d_H

$$k \geqslant k_0 \Rightarrow \{C_i(\mathbf{x}) \subset C_i(\mathbf{x}^k) + \varepsilon \bar{B}\} \wedge \{C_i(\mathbf{x}^k) \subset C_i(\mathbf{x}) + \varepsilon \bar{B}\} \ \forall i = 1, \ldots, n+1,$$

por tanto, para todo $k \geqslant k_0$

$$S_n(\mathbf{x}) = \bigcup_{i=1}^{n+1} C_i(\mathbf{x}) \subset \bigcup_{i=1}^{n+1} (C_i(\mathbf{x}^k) + \varepsilon \bar{B}) =$$

$$= \bigcup_{i=1}^{n+1} (\bigcup_u \{\bar{B}((\mathbf{u}, \varepsilon) : \mathbf{u} \in C_i(\mathbf{x}^k)\}) =$$

$$= \bigcup_u \left\{ \bar{B}(\mathbf{u}, \varepsilon) : \mathbf{u} \in \bigcup_{i=1}^{n+1} C_i(\mathbf{x}^k) \right\} =$$

$$= \bigcup_{i=1}^{n+1} C_i(\mathbf{x}^k) + \varepsilon \bar{B} = S_n(\mathbf{x}^k) + \varepsilon \bar{B},$$

análogamente,

$$S_n(\mathbf{x}^k) = \bigcup_{i=1}^{n+1} C_i(\mathbf{x}^k) \subset \bigcup_{i=1}^{n+1} C_i(\mathbf{x}) + \varepsilon \bar{B} = S_n(\mathbf{x}) + \varepsilon \bar{B} \quad \forall k \geqslant k_0,$$

lo cual prueba (8).

ii) $\{S_n\}$ continua c.s. en F.

Por la Definición 2 hay que comprobar

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \exists n_0 / \forall n, m \geqslant n_0 \ \forall \hat{F}_n, \hat{F}_m \in \mathscr{F}_n, \hat{F}_m \in \mathscr{F}_m$$
$$d_p(F, \hat{F}_n) < \delta \ d_p(F, \hat{F}_m) < \delta \Rightarrow d_H(S_n(\hat{F}_n), S_m(\hat{F}_m)) < \varepsilon \quad \text{c.s. } F,$$

donde $S_n(\hat{F}_n) = S_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ definida al comienzo de 3.4.

Para ello basta demostrar que

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_1 / n \geqslant n_1 \Rightarrow d_H(S_n(\hat{F}_n), \text{Graf}(F)) < \frac{1}{2} \varepsilon \quad \text{c.s. } F, \tag{10}$$

siendo

$$\mathrm{Graf}(F) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / u \in [a, b],\ v = F(u)\}.$$

En efecto,

$$d_H(S_n(\hat{F}_n), \mathrm{Graf}(F)) \leqslant$$
$$\leqslant d_H(S_n(\hat{F}_n, \overline{\mathrm{Graf}(\hat{F}_n)}) + d_H(\overline{\mathrm{Graf}(\hat{F}_n)}, \mathrm{Graf}(F))$$

el primer término del segundo miembro es menor que $2/\sqrt{n}$ y el segundo es menor o igual que $\sup_x |\hat{F}_n(x) - F(x)|$ que, en virtud del teorema de Glivenko-Cantelli, tiende a cero c.s. F. Esto demuestra (10).

Se ha impuesto la restricción de soporte compacto para F con objeto de manejar conjuntos $S_n(\mathbf{x})$ compactos, para los cuales está definida la distancia de Hausdorff. No obstante, el desarrollo efectuado sería válido si se considera la banda de confianza en un intervalo.

4. ALGUNOS RESULTADOS COMPLEMENTARIOS. DISCUSION

Las regiones aleatorias analizadas en los ejemplos 3.3 y 3.4, para las cuales se obtuvo la propiedad de robustez de acuerdo con la Definición 1, dependen de estadísticos robustos (cuantil muestral $\hat{F}_n^{-1}(\alpha)$ y distribución empírica $\hat{F}_n$, respectivamente) bajo las hipótesis consideradas, mientras que los intervalos de confianza de los ejemplos 3.1 y 3.2 que están construidos a partir de estimadores no robustos, resultaron ser inestables. A la vista de esto, podría justificarse intuitivamente la estabilidad o inestabilidad de una región aleatoria o intervalo de confianza a partir del cumplimiento o incumplimiento de la propiedad de robustez cualitativa de los estadísticos de los cuales dependen dichas regiones o intervalos.

A continuación estableceremos un resultado de este tipo para lo cual necesitaremos el siguiente lema

Lema 1. Sea $\{T_n\}$ una sucesión de estimadores ($T_n : \mathscr{F}_n \to \mathbb{R}^k$ para cada n) robusta en F y sea $\{W_n\}$ tal que $W_n = g \circ T_n$ con $g : \mathbb{R}^k \to E$, siendo E un espacio métrico completo y separable dotado de la métrica d.

Si g es una aplicación contractiva (i.e., $d(g(\mathbf{x}), g(\mathbf{y})) \leqslant \alpha \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ con $\alpha \leqslant 1$) entonces la sucesión de estimadores $\{W_n\}$ es robusta en F.

Demostración. De acuerdo con la definición de sucesión de estimadores robusta en una función de distribución F (ver Hampel, 1971), habrá que demostrar

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, \delta > 0/\forall\, G,\; \forall\, n : d_p(F, G) < \delta \;\Rightarrow\; d_p(\mathscr{L}_F(W_n), \mathscr{L}_G(W_n)) < \varepsilon,$$

siendo $\mathscr{L}_F(W_n)$ y $\mathscr{L}_G(W_n)$ las medidas de probabilidad inducidas en $(E, \mathscr{B}(E))$ por W_n bajo F y G, respectivamente.

Obsérvese primero, que para todo $A \in \mathscr{B}(E)$ se verifica

$$\mathscr{L}_F(W_n)(A) = P_F(g(T_n) \in A) = P_F(T_n \in g^{-1}(A)) = \mathscr{L}_F(T_n)(g^{-1}(A)). \quad (11)$$

donde $\mathscr{L}_F(T_n)$ es la medida de probabilidad inducida en $(\mathbb{R}^k, \mathscr{B}(\mathbb{R}^k))$ por T_n bajo F.

Dado $\varepsilon > 0$ por ser $\{T_n\}$ robusta en F existe $\delta^* > 0$ para el que se cumple

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, \delta^* > 0/\forall\, G,\; \forall\, n : d_p(F, G) < \delta \;\Rightarrow\; d_p(\mathscr{L}_F(T_n), \mathscr{L}_G(T_n)) < \varepsilon.$$

se tiene entonces

$$d_p(\mathscr{L}_F(W_n), \mathscr{L}_G(W_n)) = \inf\{\delta > 0/\mathscr{L}_F(T_n)(g^{-1}(A)) \leqslant$$
$$\leqslant \mathscr{L}_G(T_n)(g^{-1}(A^\delta)) + \delta,\; \forall\, A \in \mathscr{B}(E)\} \leqslant \inf\{\delta > 0/\mathscr{L}_F(T_n)(g^{-1}(A)) \leqslant$$
$$\leqslant \mathscr{L}_G(T_n)((g^{-1}(A))^\delta) + \delta,\; \forall\, A \in \mathscr{B}(E)\},$$

ya que por ser g contractiva, para todo $\delta > 0$ y para todo $A \in \mathscr{B}(E)$ se tiene

$$(g^{-1}(A))^\delta = g^{-1}(A) + \delta \bar{B}_k \subset g^{-1}(A^\delta),$$

donde $\bar{B}_k$ denota la bola cerrada de centro el origen y radio 1 de $\mathbb{R}^k$.

Por otra parte, como $\{g^{-1}(A)/A \in \mathscr{B}(E)\} \subset \mathscr{B}(\mathbb{R}^k)$ se obtiene que

$$d_p(\mathscr{L}_F(W_n), \mathscr{L}_G(W_n)) \leqslant \inf\{\delta > 0/\mathscr{L}_F(T_n)(C) \leqslant$$
$$\leqslant \mathscr{L}_G(T_n)(C^\delta) + \delta,\; \forall\, C \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^k)\} = d_p(\mathscr{L}_F(T_n), \mathscr{L}_G(T_n)) < \varepsilon,$$

siempre que $d_p(G, F) < \delta^*$.

Teorema 4. Sea una sucesión $\{C_n\}$ de intervalos de confianza en $\mathbb{R}$ definidos para cada n y cada muestra x por

$$C_n(\mathbf{x}) = [U_n(\mathbf{x}), V_n(\mathbf{x})]$$

($U_n(\mathbf{x}) \leqslant V_n(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$). Si la sucesión $\{T_n = (U_n, V_n)\}$ es robusta en F, entonces lo es la sucesión de intervalos de confianza.

Demostración. Dada la sucesión bivariante $\{T_n = (U_n, V_n)\}$ robusta en F, si se define la aplicación

$$h(x, y) = [x, y] \quad \text{con} \quad x \leqslant y$$

se obtiene que

$$C_n(\mathbf{x}) = h \circ T_n(\mathbf{x})$$

ahora bien, la aplicación h es contractiva ($\alpha = 1$) ya que

$$\begin{aligned} d_H(h(T_n(\mathbf{x})), h(T_n(\mathbf{y}))) &= \text{máx}\,\{|U_n(\mathbf{x}) - U_n(\mathbf{y})|, |V_n(\mathbf{x}) - V_n(\mathbf{y})|\} = \\ &= d(T_n(\mathbf{x}), T_n(\mathbf{y})), \end{aligned}$$

por tanto, se sigue el resultado buscado a partir del Lema 1. ■

Por último, algunos breves comentarios relativos a ideas que no se desarrollan en este trabajo, pero que podrían tener algún interés:

a) Obsérvese que a lo largo de todo el desarrollo anterior, aplicado a regiones de confianza, no se ha hecho mención del parámetro que se pretende estimar ni, en consecuencia, del nivel de confianza, elemento característico de este método de estimación. Podría pensarse, por tanto, en considerar una definición alternativa expresada en términos del nivel, que tuviera en cuenta la estructura paramétrica del problema.

Un enfoque de este tipo puede verse en Cuevas (1983). El planteamiento, en resumen, es como sigue:

Se supone que la distribución básica es del tipo $F_\theta(x) = F(u_\theta(x))$, siendo $u_\theta(x)$ biyectiva y bicontinua para cada $\theta \in \Omega$. Dada una región de confianza $C_n(x)$, se define su nivel por

$$N_\theta^n(F) = F_\theta^n\{x \in \mathbb{R}^n / \theta \in C_n(x)\}.$$

El nivel aparece así, como una función de la «forma» general F de la familia paramétrica subyacente. Puede, por tanto, definirse la estabilidad en términos de la continuidad de esta función; es decir,

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, \delta > 0 / d_p(F, G)\, \delta \;\Rightarrow\; |N_\theta^n(F) - N_\theta^n(G)| < \varepsilon, \tag{12}$$

esta condición, puede imponerse uniformemente en θ y/o n (o incluso en F), obteniéndose versiones con diferente grado de exigencia.

En Cuevas (1983) aparece una condición suficiente para que se verifique (12). Utilizando esta condición se obtiene la estabilidad de los intervalos de los ejemplos 3.1 y 3.2, en el sentido indicado por (12).

Cuando una sucesión $\{C_n\}$ de regiones de confianza es robusta en F, de acuerdo con la Definición 1, el cumplimiento de (2) implica

$$\lim_{G \to F} \mathscr{L}_G(C_n)\{A\} = \mathscr{L}_F(C_n)\{A\} \;\; \forall\, A \in \mathscr{B}(K_\Omega) \text{ tal que } \mathscr{L}_F(C_n)\{\partial A\} = 0$$

para cada n, cuando $d_p(F, G) \to 0$.

En particular, si para cada $\theta \in \Omega$ el conjunto $\mathscr{A}_\theta$ de K_Ω (formado por los subconjuntos de Ω que contienen a θ) pertenece a $\mathscr{B}(K_\Omega)$ y es tal que $\mathscr{L}_F(C_n)\{\partial \mathscr{A}_\theta\} = 0$ se obtiene

$$\lim_{G \to F} N_\theta^n(G) = N_\theta^n(F)$$

para cada $\theta \in \Omega$, cuando $d_p(F, G) \to 0$.

b) La extensión del concepto de curva de influencia (ver Hampel, 1974) a este contexto presenta varias dificultades técnicas, motivadas en parte por los «valores» que toman los estadísticos considerados y también por la imposibilidad, en la mayor parte de los casos, de obtener las aplicaciones C_n definidas en (1) mediante la restricción de un funcional al conjunto $\mathscr{F}_n$ de distribuciones empíricas de orden n.

c) Como ya se indicó en la introducción, el estudio de un concepto formalizado de robustez en tests de hipótesis ha sido abordado por Lambert (1982) (en términos de estabilidad de los P-valores) y Rieder (1982) (en términos de estabilidad de la potencia); ahora bien, siguiendo la línea de este trabajo, si tratamos de unificar al máximo la noción de robustez en los tres métodos clásicos de Inferencia Paramétrica puede efectuarse un desarrollo análogo al expuesto para regiones de confianza y regiones aleatorias, aplicando la condición de Hampel a la función que define el test (ver Sanz, 1988).

REFERENCIAS

CLARKE, B. R. (1983): «Uniqueness and Fréchet differentiability of functional solutions to maximum likelihood type equations», *Ann. of Statist.*, **11**, 4, 1196-1205.

CUEVAS, A. (1983): «Una definición de estabilidad en regiones de confianza», *Actas del 44 Período de Sesiones del ISI*, 111-114.

CUEVAS, A. (1988): «Qualitative robustness in abstract inference», *Journal of Statistical Planning and Inference*, **18**, 277-289.

HAMPEL, F. R. (1968): «Contributions to the theory of robust estimation», *Ph. D. Thesis*, University of California, Berkeley.

HAMPEL, F. R. (1971): «A general qualitative definition of robutness», *Ann. Math. Statis.*, **42**, 1887-1896.

HAMPEL, F. R. (1974): «The influence curve and its role in robust estimation», *J. Amer. Statist. Assoc.*, **64**, 383-393.

HUBER, C. (1977): «Robustesse des L-estimateurs», *Arterisque*, **43-44**, 198-202.

JOHNSON, N. L., y LEONE, F. C. (1964): *Statistics Experimental Design*, vol. I, Wiley, New York.

LAMBERT, D. (1982): «Qualitative robustness of tests», *J. Amer. Statist. Assoc.*, **77**, 378, 352-357.

LAY, S. R. (1982): *Convex Sets and Their Applications*, Wiley, New York.

RIEDER, H. (1982): «Qualitative robustness of rank tests», *Ann. of Statist.*, **10**, 1, 205-211.

SANZ, P. (1988): «Algunas aportaciones a la Teoría de la Robustez en Inferencia Estadística», Tesis Doctoral, Universidad Complutense de Madrid.