TRABAJOS DE ESTADISTICA
Vol. 4. Núm. 1, 1989 pp. 67 a 81

SOBRE UNA SOLUCION RECURSIVA PARA UNA CADENA DE MARKOV n-DIMENSIONAL EN TIEMPO CONTINUO

F. REQUENA
Dpto. de Matemáticas
Universidad de Extremadura

RESUMEN

Se considera una solución recursiva para una cadena de Markov n-dimensional en tiempo continuo, basada en una función entera K y en la que aparece una familia de polinomios. Se hace un estudio de esta familia, a partir del análisis de una clase de subconjuntos de $Im(K)$, con el objetivo de encontrar la subfamilia de polinomios que aparece explícitamente en la solución recursiva, en términos de la distribución de probabilidad absoluta de la cadena, y la subfamilia que es necesario y suficiente calcular en el procedimiento recursivo, con lo que se consiguen ventajas considerables en el tratamiento automatizado de tal solución. Se da, además, una nueva expresión para la citada solución.

Palabras clave: Cadena de Markov en tiempo continuo, solución recursiva.
Clasificación A.M.S.: 60J27.

ABSTRACT

A recursive solution for a n-dimensional Markov Chain in continuous time, based in an integer function K, is considered. A work on the family of polynomials which arise in that solution is presented, in order to get the subfamily of polynomials that appears explicitely in the recursive solution, in terms of the absolute probability distribution, and the subfamily that is necessary and sufficient to compute in the recursive procedure, which brings about a substantial advantage in the automatic processing of such solution. This is carried out by the analysis of a class of subsets of $Im(K)$. Moreover, a new expression for the solution is given.

Title: On a recursive solution for a n-dimensional Markov chain in continuous time.
Key words: Markov chain in continuous time, recursive solution.
A.M.S. Classification: 60J27.

Revisado, febrero 1989.

1. INTRODUCCION

Consideremos la cadena de Markov $\{X_i(t),\ i = 1, ..., n,\ t \geqslant 0\}$ con espacio de estados $W_{Nn} = \{w = (x_1, ..., x_n)/x_i \in Z^+,\ \sum x_i \leqslant N\}$, dado un entero N. Sea

$$\begin{array}{lll} (x_1, ..., x_{n-1} + v, x_n - v + 1) & \to w & v = 0, 1 \\ (x_1, ..., x_i - 1, ..., x_n) & \to w & 1 \leqslant i \leqslant n - 2 \\ (x_1, ..., x_{i-1}, ..., x_j + 1, ..., x_n) & \to w & 1 \leqslant i < j \leqslant n \end{array}$$

el conjunto de las únicas transiciones posibles a $w = (x_1, ..., x_n) \in W_{Nn}$ en un intervalo $(t, t + dt)$ (la probabilidad de que en este intervalo ocurran más de una de las anteriores transiciones la suponemos de orden infinitesimal inferior a dt), que podemos representar como

$$w^\theta \to w \qquad \forall\, \theta \in I, \qquad w^\theta \in W_{Nn}$$

donde

$$w^\theta = (x_1, ..., x_r + b - a, ..., x_s - b + c, ..., x_n) \tag{1}$$

$$I = \{\theta = (a, b, c, r, s) \quad a, b, c, r, s \in Z \;/\; 0 \leqslant a \leqslant 1 \;\;;\;\; 0 \leqslant b \leqslant 1 - a \;\;;$$
$$1 - a \leqslant c \leqslant 1 \;\;;\;\; (n - 2)(1 - a) + 1 \leqslant r \leqslant n - 2 + c \;\;;\;\; r < s \leqslant n$$
$$\text{si} \quad a + c = 2 \quad \text{y} \quad s = n \quad \text{si} \quad a + c \neq 2\}$$

Y notemos por $q(w^\theta)$ la intensidad de transición al estado $w \in W_{Nn}$ dado el estado $w^\theta \in W_{Nn}$ y por $q_0(w)$ la intensidad de paso dado $w \in W_{Nn}$.

Demos una interpretación física de este modelo. Sea una población Q de tamaño $N_1(t)$ en el instante t y cada elemento de esta población pertenece a una de las n clases o categorías disjuntas $Q_1, ..., Q_n$, siendo $\cup Q_i = Q$. Supongamos que en el instante t existen $N_2(t)$ elementos que están fuera de la población Q y existe un intercambio de elementos de Q con el exterior, cumpliéndose que $N_1(t) + N_2(t) = N\ \forall\, t$. Definimos $X_i(t)$ $i = 1, ..., n$ como el número de elementos de Q que pertenecen a la categoría Q_i en el instante t. Evidentemente, $\sum X_i(t) \leqslant N\ \forall\, t$ y el estado de los N elementos en cada instante queda determinado por el vector $\{X_i(t)\ i = 1, ..., n\}$. El espacio de estados será W_{Nn}. Los únicos cambios de estado o transiciones permitidas en un pequeño intervalo de tiempo son los producidos al pasar un elemento de la clase Q_j a la clase Q_i $(1 \leqslant i < j \leqslant n)$ o al entrar en la clase Q_i $(1 \leqslant i \leqslant n - 2)$ de la población un elemento procedente del exterior o al emigrar al exterior un elemento de la clase Q_i $(i = n - 1, n)$ de la población. En la última sección comentaremos una aplicación más concreta.

Esta cadena de Markov puede ser resuelta mediante el método recursivo propuesto en Requena (1981), versión más general que los propuestos en Severo (1969a, 1969b). Siguiendo dicho método, dado un N, definimos en W_{Nn} la función

$$K(w; N) = R(w; N) - S(w; N)$$

donde

$$R(w; N) = S_2(d_{n-2}) + \sum_{i=3}^{n} [S_i(d_{n-i}) - S_i(d_{n-i+1})]$$

$$S(w; N) = (d_{n-2} + 1)x_n - S_2(x_n - 2) + x_{n-1}$$

$$d_j = N - \sum_{i=1}^{j} x_i \quad \text{y} \quad S_j(z) = \binom{z+j}{j}$$

En Requena (1981) se hace un amplio estudio de esta función. Es una función entera cuya imagen es el conjunto de enteros

$$Im(K) = \{k \in Z \,/\, 1 \leqslant k \leqslant S_n(N)\}$$

y es biunívoca. Esta función nos permite, pues, asignar a cada estado $w \in W_{Nn}$ un entero de $Im(K)$. Así, notaremos en adelante a los estados de W_{Nn} mediante $w_k = (x_{k1}, ..., x_{kn})$, donde el subíndice representa el entero que le corresponde por la función, esto es, $k = K(w_k; N)$. Igualmente, dado $w_k \in W_{Nn}$, si consideramos un $w_k^\theta \in W_{Nn}$, definido como en (1), para algún $\theta \in I$, escribiremos $k^\theta = K(w_k^\theta; N)$. También utilizaremos la notación, más simplificada, q_k^θ y q_{0k} para la intensidad de transición $q(w_k^\theta)$ y la intensidad de paso $q_0(w_k)$, respectivamente.

Si dado cualquier $\theta = (a, b, c, r, s) \in I$ y $w_k \in W_{Nn}$ tomamos

$$y_k^\theta = \begin{cases} N - \sum x_{ki} - 1 & \text{si} \quad a = 0 \\ x_{kr} - 1 & \text{si} \quad a = 1 \end{cases}$$

se cumple que

$$y_k^\theta \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad w_k^\theta \in W_{Nn} \quad \Rightarrow \quad k^\theta < k \tag{2}$$

lo que nos dice que cualquier transición entre dos estados se corresponde con un incremento en sus valores enteros asociados o, también, que si w_i y w_j son el estado inicial y final, respectivamente, de una realización del proceso, se tiene que $i < j$.

Haciendo uso de esta función se llega a una solución recursiva de la cadena de Markov en términos de la distribución de probabilidad absoluta, $p_{w_k}(t)$ $w_k \in W_{Nn}$, para unas condiciones iniciales $\{u_j = p_{w_j}(0), 1 \leqslant j \leqslant S_n(N)\}$ arbitrarias (sólo sujetas a la restricción obvia de $\sum u_j = 1$) (Requena (1981)), que puede escribirse como

$$p_{w_k}(t) = \sum_{i=1}^{k} P_{ki} \cdot \exp(-q_{oi}t) \tag{3}$$

donde $k = K(w_k; N)$, y $\mathscr{F} = \{P_{ki}\}_{k=1,\dots,S_n(N);\, i=1,\dots,k}$ es una familia de polinomios en t de coeficientes $c_s(k, i)(s \geqslant 0)$

$$P_{ki} = \sum_{j=1}^{k-i} g_j(k, i)\delta_{j-1}(q_{0k} - q_{0i}) \qquad i < k \tag{4}$$

$$P_{kk} = u_k - \sum_{j=1}^{k-1} c_0(k, j) \tag{5}$$

siendo

$$\delta_h(y) = \begin{cases} (h!/y^{h+1}) \sum\limits_{r=0}^{h} (-1)^{h-r}(yt)^r/r! & y \neq 0 \\ t^{h+1}/(h+1) & y = 0 \end{cases} \tag{6}$$

$$g_j(k, i) = \sum_{\theta \in I} \varepsilon(y_k^\theta) q_k^\theta c_{j-1}(k^\theta, i) \qquad 1 \leqslant j \leqslant k - i \tag{7}$$

con $g_j(k, i) = 0$ en otro caso, donde

$$c_{j-1}(k^\theta, i) = 0 \qquad \text{para} \qquad k^\theta < i + j - 1 \tag{8}$$

y $\varepsilon(x) = 0$ si $x < 0$ y $\varepsilon(x) = 1$ si $x \geqslant 0$.

En la expresión (3) aparecen los polinomios P_{ki} que intervienen explícitamente en la obtención de $p_{w_k}(t)$. Pero de las expresiones (4) a (7) vemos que los polinomios de la familia $\mathscr{F}$ se obtienen mediante un proceso recursivo, esto es, los P_{ki} de (3) se obtendrán en función de otros polinomios de $\mathscr{F}$. En este sentido, la solución (3) no nos muestra explícitamente la subfamilia de polinomios de $\mathscr{F}$ que es necesario y suficiente calcular para $p_{w_k}(t)$. Así, en la practica, para obtener $p_{w_k}(t)$ se calcularía la subfamilia $\{P_{sj}\}_{s=1,\dots,k;\, j=1,\dots,s}$, aunque al final veríamos que no era necesario el cálculo de muchos de estos polinomios.

Ya en trabajos anteriores, hemos hecho un estudio de estos polinomios para el caso particular de un modelo epidemiológico estocástico (Requena y Ortega (1985)) y para el caso de una cadena de Markov

$\{X_i(t)\ i = 1, 2, 3,\ t \geqslant 0\{$ (Requena (1986)) donde, en este último, se obtiene la subfamilia de polinomios que es suficiente calcular para $p_{w_k}(t)$, dado un estado inicial. El objetivo de este trabajo es hacer un estudio más exhaustivo de la familia $\mathscr{F}$ para el caso n-dimensional con unas condiciones iniciales arbitrarias, $\{u_j\}$, y obtener la subfamilia de polinomios necesaria y suficiente para el proceso recursivo, con lo que la cantidad de memoria y tiempo de computación se reducirán (en este tipo de solución está indicado el tratamiento automatizado). Se da también, una nueva expresión para la solución.

Con un objetivo similar aunque por un camino distinto Billard (1981) estudia, partiendo del método recursivo dado en Severo (1969a, 1969b), la solución de un proceso de nacimiento y muerte bidimensional.

2. ESTUDIO DE LA FAMILIA $\mathscr{F}$

Definición 1

Dados los enteros $0 < i \leqslant k \leqslant S_n(N)$ definimos la clase de subconjuntos $\{T_m^{ki}\}_{m=1,2,\dots}$ formada por todos los posibles subconjuntos de la forma

$$T_m^{ki} = \{k_s \in Z,\ s = 1, \dots, r_m, k_1 = i, k_{r_m} = k \,/\, k_{s-1} = k_s^\theta \text{ para algún } \theta \in I,$$
$$q_{k_s}^\theta > 0\ y_{k_s}^\theta \geqslant 0 \quad , \quad 1 < s \leqslant r_m\} \quad \text{para} \quad i < k$$

y

$$T_m^{kk} = \{k\}$$

Tal como se han definido, cada subconjunto T_m^{ki} $(i < k)$ está constituido por los enteros correspondientes a todos los estados que forman una trayectoria o realización del proceso con estado inicial w_i y el estado final w_k. Para cada una de estas trayectorias tendremos un subconjunto T_m^{ki}, a cuyo cardinal le notamos por r_m. Para el caso en que el estado inicial y final coincidan (caso $i = k$), la clase en realidad posee sólo el subconjunto $T_1^{kk} = \{k\}$.

Según (2), los elementos de cada T_m^{ki} $(m = 1, 2, \dots)$ están ordenados. El mínimo es i y el máximo es k.

Definición 2

Dados los enteros $0 < i \leqslant k \leqslant S_n(N)$ definimos el conjunto de enteros

$$G_{ki} = \bigcup_m T_m^{ki} \qquad i < k$$

Este, lógicamente, será el conjunto de los enteros correspondientes a todos los estados de todas las trayectorias o realizaciones posibles del proceso con estado inicial w_i y final w_k. Dado que en Requena (1981) se dan las expresiones de k^θ en función de k $\forall\, \theta \in I$, es fácil construir un algoritmo que nos permita obtener G_{ki} de una forma sencilla, dados i, k. Para $i = k$, $G_{kk} = \{k\}$. Evidentemente, si no es posible ninguna trayectoria con estado inicial w_i y estado final w_k $(i < k)$, $T_m^{ki} = \phi$ $\forall\, m$ y $G_{ki} = \phi$. Y si $j \in G_{ki}$ se tendrá $i \leqslant j \leqslant k$.

Definición 3

Dados dos enteros $0 < i < k \leqslant S_n(N)$ y la clase $\{T_m^{ki}\}$, definimos la clase de subconjuntos $\{D_m^{ki}\}$ con

$$D_m^{ki} = \{j \in T_m^{ki} \,/\, q_{0j} = q_{0i} \quad j > i\} \qquad \mathrm{m} = 1, 2, ...$$

Dada la realización del proceso determinada por T_m^{ki}, el subconjunto D_m^{ki} lo constituyen los enteros asignados a los estados de esta trayectoria (distintos del estado inicial) cuyas intensidades de paso coinciden con la del estado inicial. Estas clases de subconjuntos las utilizaremos para obtener el grado de los polinomios de la familia $\mathscr{F}$.

De la propia definición 1 se deduce directamente la

Propiedad 1

Para $0 < i \leqslant j \leqslant k \leqslant S_n(N)$, se tiene

$$T_1 \in \{T_m^{ji}\} \;,\; T_2 \in \{T_m^{kj}\} \;,\; T_1 \text{ y } T_2 \text{ no vacíos} \Rightarrow T_1 \cup T_2 = T \in \{T_m^{ki}\}$$

y

$$T \in \{T_m^{ki}\} \;,\; j \in T \Rightarrow \exists\, T_1 \in \{T_m^{ji}\} \;,\; T_2 \in \{T_m^{kj}\} \text{ no vacíos } / \; T_1 \cup T_2 = T$$

La interpretación de esta propiedad en términos de trayectorias o realizaciones del proceso es obvia. También es evidente la generalización de la propiedad al caso en que sean $T_1, ..., T_r$ los subconjuntos y T la unión de ellos.

Veamos otras propiedades de los conjuntos G_{ki}.

Propiedad 2

Para $0 < i \leqslant k \leqslant S_n(N)$ se cumple

$$j \in G_{ki} \quad \Leftrightarrow \quad G_{ji} \neq \phi \quad G_{ji} \subset G_{ki} \quad \Leftrightarrow \quad G_{kj} \neq \phi \quad G_{kj} \subset G_{ki}$$

Demostración:

Veamos la primera equivalencia. Si $j \in G_{ki}$, existirá un $T \in \{T_m^{ki}\}$ tal que $j \in T$ y, de la segunda parte de la propiedad 1, se tiene $T_1 \in \{T_m^{ji}\}$ y $T_2 \in \{T_m^{kj}\}$ ambos no vacíos / $T_1 \cup T_2 = T$ y, por tanto, $G_{ji} \neq \phi$. Además, si $j' \in G_{ji}$, existirá un $T'_1 \in \{T_m^{ji}\}$ tal que $j' \in T'_1$, con lo que, según la primera parte de la propiedad 1, $T^{x\prime}_1 \cup T_2 = T' \in \{T_m^{ki}\}$ siendo así $j' \in T'$ y, por la definición 2, $j' \in G_{ki}$ y queda probado que $G_{ji} \subset G_{ki}$. La implicación inversa es evidente.

Igualmente se demuestra la equivalencia entre la primera y la tercera proposición.

Propiedad 3

Dado cualquier conjunto finito de enteros $0 < i = k_1 \leqslant \cdots \leqslant k_e = k \leqslant S_n(N)$ tal que $G_{k_s k_{s-1}} \neq \phi$ $1 < s \leqslant e$, siempre se cumple que $\bigcup_s G_{k_s k_{s-1}} \subset G_{ki}$.

Demostración:

Como $G_{k_s k_{s-1}} \neq \phi \; \forall s$, tendremos las clases de subconjuntos $\{T_m^{k_2 k_1}\} \cdots \cdots \{T_m^{k_e k_{e-1}}\}$. Si tomamos un subconjunto arbitrario en cada una de estas clases, por la generalización de la propiedad 1, tendremos que la unión de ellos nos dará un subconjunto de la clase $\{T_m^{ki}\}$, esto es,

$$\bigcup_s T_s = T \qquad T_s \in \{T_m^{k_s k_{s-1}}\} \qquad T \in \{T_m^{ki}\}$$

Así, para un s arbitrario, si $j \in G_{k_s k_{s-1}}$ existirá un $T_s \in \{T_m^{k_s k_{s-1}}\}$ tal que $j \in T_s$ y como, según lo anterior, $T_s \subset T$ donde T es algún subconjunto de la clase $\{T_m^{ki}\}$, se tiene que $j \in T$ y por tanto $j \in G_{ki}$ y la propiedad queda probada.

Estudiemos ya algunos resultados interesantes sobre la familia $\mathscr{F}$, basados en los conjuntos anteriores y sus propiedades y que nos van a permitir una nueva expresión para la solución del proceso y obtener la subfamilia de polinomios que interviene en el procedimiento recursivo.

Los dos primeros resultados nos permiten conocer, para cada polinomio P_{ki}, su grado y el conjunto de polinomios de la familia $\mathscr{F}$ en función de los cuales se obtiene. Estos resultados son importantes para conocer el procedimiento recursivo por el que se calculan los polinomios de $\mathscr{F}$.

De (4), (6), (7) y (8) se deduce directamente el siguiente

Teorema 1

Para todo $i, k / 0 < i < k \leqslant S_n(N)$ y $P_{ki} \neq 0$, se cumple que al menos uno de los polinomios $P_{k^\theta i}$ $\theta \in I$ / $y_k^\theta \geqslant 0$ $q_k^\theta > 0$ y $k^\theta \geqslant i$ será no nulo y estos polinomios no nulos intervienen y son los únicos que intervienen explícitamente en la obtención de P_{ki}.

Teorema 2

Para todo i, k / $0 < i < k \leqslant S_n(N)$ y $P_{ki} \neq 0$, el grado de P_{ki} viene dado por la expresión

$$z_{ki} = \max_m \operatorname{card}(D_m^{ki}) \tag{9}$$

Además, para $j < k$ el polinomio P_{ji} interviene en el proceso recursivo para calcular P_{ki} si y sólo si $j \in G_{ki}$.

Demostración:

Tomemos k_s, $k_{s+1} \in T_m^{ki}$ (por simplificar los notaremos por h y h', respectivamente). Si z_{hi} es el grado de P_{hi}, de (4) y (6) se tiene que $P_{h'i}$ posee término de grado $z_{hi} + 1$ si $q_{oh'} = q_{oi}$ o de grado z_{hi} en otro caso. Por tanto y ya que de (5) P_{ii} sólo tiene término independiente, P_{ki} posee término de grado $\operatorname{card}(D_m^{ki})$. Si esto lo repetimos $\forall\, m$ tendremos finalmente (9).

Para la segunda parte del teorema, supongamos en primer lugar que P_{ji} $(j < k)$ interviene en el proceso recursivo para obtener P_{ki}, entonces por aplicación reiterada del teorema 1, tendremos una sucesión finita de r polinomios $P_{k_1 i}, \ldots, P_{k_r i}$ con $i = k_1 < \cdots < k_r = k$ y $k_{s-1} = k_s^\theta$ $1 < s \leqslant r$ para algún $\theta \in I$ / $q_{k_s}^\theta > 0$ $y_{k_s}^\theta \geqslant 0$ (esto es, para cualquier $1 < s \leqslant r$ $P_{k_{s-1} i}$ interviene explícitamente en el cálculo de $P_{k_s i}$ y, por tanto, $P_{k_1 i}, \ldots, P_{k_{r-1} i}$ intervienen en el proceso recursivo para obtener P_{ki}) y tal que $j = k_s$ para algún s, $1 \leqslant s < r$. De donde y según la definición 1, j pertenece a algún T_m^{ki}, con lo que $j \in G_{ki}$.

Por otro lado, para la implicación inversa, si $j \in G_{ki}$ tendremos $j \in T_m^{ki}$ para un m determinado y, según la definición 1, la sucesión finita $i = k_1 < \cdots < k_{r_m} = k$ que constituyen los elementos de T_m^{ki} dan lugar a la sucesión finita de polinomios $P_{k_1 i}, \ldots, P_{ki}$ tal que para $1 < s \leqslant r_m$ $k_{s-1} = k_s^\theta$ para algún $\theta \in I \,/\, q_{k_s}^\theta > 0$ y $y_{k_s}^\theta \geqslant 0$, con lo que según el teorema 1, para cada s $P_{k_{s-1}i}$ interviene explícitamente en el cálculo de $P_{k_s i}$ y por tanto todos los polinomios de la sucesión, salvo P_{ki}, intervienen en el proceso recursivo para el cálculo de P_{ki} y como $j \in T_m^{ki}$, P_{ji} intervendrá en el citado procedimiento recursivo y el teorema queda demostrado.

De los teoremas anteriores se deducen directamente.

Corolario 1

Para $0 < i < k \leqslant S_n(N)$ se cumple

$$P_{ii} = 0 \quad \Rightarrow \quad P_{ki} = 0$$

Corolario 2

Para $0 < i < k \leqslant S_n(N)$ se verifica

$$G_{ki} = \phi \quad \Rightarrow \quad P_{ki} = 0$$

Estos corolarios junto con el siguiente teorema y el corolario 3 posterior nos van a permitir saber qué polinomios de $\mathscr{F}$ son nulos y las condiciones en que ello ocurre. Así pues, en el método recursivo no procederemos a calcular estos polinomios y, lógicamente, dichos polinomios no van a estar en la subfamilia que es necesaria y suficiente calcular para obtener $p_{w_k}(t)$.

Para el teorema y corolarios siguientes y dadas unas condiciones iniciales $\{u_m \; 1 \leqslant m \leqslant S_n(N)\}$, utilizaremos el conjunto

$$E_0 = \{m \,/\, u_m > 0\} \tag{10}$$

y notaremos $m_0 = \min E_0$.

Teorema 3

Dadas unas condiciones iniciales $\{u_m \; 1 \leqslant m \leqslant S_n(N)\}$ siempre se cumple que el mínimo valor de $m \,/\, P_{mm} \neq 0$ es $m_0 = \min E_0$. Además, dados $0 < i < k \leqslant S_n(N)$, $P_{ki} = 0$ si $i \notin G_{km}$ $\forall\, m \in E_0$ $m < k$, con E_0 definido en (10).

Demostración:

Es obvio que si $m_0 = 1$ se cumple la primera parte del teorema, al ser $P_{11} \neq 0$, según (5). Sea ahora $m_0 > 1$ con lo que, de (5), $P_{11} = 0$. Esta primera parte quedaría demostrada si probamos que $\forall\, m < m_0$ $P_{mm} = 0$, ya que en ese caso, según (5) y el corolario 1, sería $P_{m_0 m_0} \neq 0$. Supongamos un $m < m_0 \,/\, P_{mm} \neq 0$. Entonces, de (5), existe un m_1 $(1 \leqslant m_1 < m)$ tal que $P_{mm_1} \neq 0$ y según corolario 1 tendríamos $P_{m_1 m_1} \neq 0$, con lo que existe, a su vez, un m_2 $(1 \leqslant m_2 < m_1)$ tal que $P_{m_1 m_2} \neq 0$ y sería $P_{m_2 m_2} \neq 0$. Se tendría, pues, una sucesión finita $m_1, ..., m_r = 1$ y llegaríamos a $P_{11} \neq 0$, en contra de lo establecido anteriormente. Para la segunda parte del teorema, sea $i \notin G_{km}$ $\forall\, m \in E_0$ $m < k$ y supongamos que $P_{ki} \neq 0$. Utilicemos la notación $k_e = k$ y $k_{e-1} = i$. Si $i < m_0$, según corolario 1 sería $P_{ii} \neq 0$, lo que contradice la primera parte de este teorema, con lo que $P_{ki} = 0$. Veamos el caso en que sea $i \geqslant m_0$. Si $P_{ki} \neq 0$, por el corolario 2 tendremos que $G_{ki} \neq \phi$ y según el corolario 1, $P_{ii} \neq 0$. Esto a su vez implicaría, según (5) y ya que $i \notin E_0$, que $P_{ik_{e-2}} \neq 0$ para algún $k_{e-2} < i$, con lo que $G_{k_{e-1}k_{e-2}} \neq \phi$ y $P_{k_{e-2}k_{e-2}} \neq 0$. Reiterando este proceso y si en ningún paso se contradice la primera parte del teorema, siempre podremos tener una clase de conjuntos $G_{k_s k_{s-1}} \neq \phi$ $1 \leqslant s \leqslant e$, donde $k_0 \in E_0$. Y aplicando la propiedad 3, se cumplirá $\bigcup\limits_s G_{k_s k_{s-1}} \subset G_{kk_0}$. Ahora bien, como $k_{e-1} = i \in G_{k_e k_{e-1}}$ se tiene, de lo anterior, que $i \in G_{kk_0}$, en contra de la hipótesis, lo que completa la demostración del teorema.

Podemos preguntarnos si la inversa de la segunda parte de este teorema es cierta, esto es, para $0 < i < k \leqslant S_n(N)$

$$i \in G_{km} \quad \text{para algún} \quad m \in E_0 \quad m < k \quad \Rightarrow \quad P_{ki} \neq 0 \tag{11}$$

Esto no siempre es cierto. Como $i \in G_{km}$, según la propiedad 2 $G_{ki} \neq \phi$ y según el teorema 2 en P_{ki} intervienen todos los P_{ji} $j \in G_{ki}$ y para que $P_{ki} \neq 0$ tendrá que ser $P_{ii} \neq 0$. Pero esto no necesariamente se cumple. Según (5), si $u_i = 0$ y todos los polinomios P_{ih} $1 \leqslant h \leqslant i - 1$ que no sean nulos carecen de término independiente, sería $P_{ii} = 0$. Y esto último ocurrirá, como se desprende de (4) y (6), cuando la intensidad de paso q_{oi} coincida simultáneamente con todas las intensidades de paso q_{oh} para los h en que P_{ih} no sea nulo. Esto no es frecuente que ocurra en las aplicaciones prácticas y, por tanto, lo habitual es que se cumpla la proposición (11).

En adelante vamos a considerar esta situación, es decir, un modelo con unas intensidades y unas condiciones iniciales tales que cumplan (11). Para estos casos obtendremos la subfamilia que es necesaria y suficiente calcular en el proceso recursivo. Para los modelos en los que no se cumpla (11), el método recursivo para llegar a la solución es el mismo, sólo que al calcular la subfamilia de polinomios para llevar a cabo tal método, nos daremos cuenta que alguno de los polinomios son nulos y no hubiese sido necesario su cálculo.

Del teorema anterior se deduce directamente

Corolario 3

Para $k > m_0 = \min E_0$, con E_0 definido en (10), se cumple

$$G_{km} = \phi \quad \forall\, m \in E_0 \quad m < k \quad \Rightarrow \quad P_{ks} = 0 \quad \forall\, s < k$$

También, del teorema anterior y teniendo en cuenta (4), (5) y (6), se deduce el siguiente corolario, que nos permite conocer qué polinomios intervienen directamente en el cálculo de los P_{kk}.

Corolario 4

Para $1 < k \leqslant S_n(N)$ y $P_{kk} \neq 0$, los polinomios P_{ki} $i < k$ que intervienen explícitamente en la obtención de P_{kk} son aquellos en los que $i \in G_{km}$ para algún $m \in E_0$ $m < k$ y $q_{ok} \neq q_{oi}$, con E_0 definido en (10).

3. NUEVA EXPRESION PARA LA SOLUCION RECURSIVA

Aplicando el teorema 3 a la expresión (3) de la solución recursiva de la cadena de Markov se obtiene, después de algunos cálculos que omitimos, una nueva expresión para la misma, presentada en el siguiente teorema.

En adelante notaremos

$$H_k = \bigcup_{\substack{m \in E_0 \\ m \leqslant k}} G_{km}$$

Teorema 4

Para cualquier instante t y dadas unas condiciones iniciales $\{u_j, 1 \leqslant j \leqslant S_n(N)\}$, la función de probabilidad absoluta de la cadena de

Markov estudiada $\{X_i(t)\ 1 \leqslant i \leqslant n,\ t \geqslant 0\}$ se puede escribir como

$$p_{w_k}(t) = h(k) + \sum_{i \in D_k} [P_{ki} \exp(-q_{oi}t) -$$
$$-c_0(k, i) \exp(-q_{ok}t)] \qquad w_k \in W_{Nn}$$

donde $D_k = H_k - \{k\}$ si $H_k \neq \phi$ y $D_k = \phi$ en otro caso y

$$h(k) = \begin{cases} u_k \exp(-q_{ok}t) & \text{si} \quad k \in E_0 \\ 0 & \text{si} \quad k \notin E_0 \end{cases}$$

De este teorema se desprende que la subfamilia de polinomios que aparece explícitamente en la solución es $\mathscr{F}_k = \{P_{ki} / i \in H_k\}$. Ahora bien, la subfamilia de polinomios que hay que calcular a lo largo del proceso recursivo es mucho más amplia que ésta. En la obtención de cada uno de los P_{ki} de $\mathscr{F}_k$ interviene, como se deduce del teorema 1, una serie de polinomios que habrá que calcular (entre ellos P_{ii}). Igualmente, en el cálculo de P_{ii} intervienen otros polinomios, según se muestra en el corolario 4. El siguiente resultado nos da precisamente la subfamilia de polinomios que explícita o implícitamente intervienen en la solución recursiva y que, por tanto, hay que calcular.

Teorema 5

Dada la cadena de Markov $\{X_i(t)\ 1 \leqslant i \leqslant n,\ t \geqslant 0\}$ estudiada, para la que se cumple (11), la subfamilia de polinomios que es necesaria y suficiente calcular en el proceso recursivo para obtener $p_{w_k}(t)$ $w_k \in W_{Nn}$ es

$$\mathscr{B}_k = \bigcup_{j \in H_k} \mathscr{F}_j = \{P_{ji} / j \in H_k \quad i \in H_j\} \tag{12}$$

Demostración:

Probemos, en primer lugar, que cualquier polinomio que interviene en el proceso recursivo pertenece a la subfamilia $\mathscr{B}_k$. Para ello y dado que los polinomios $\{P_{ki} / i \in H_k\}$, que son los que intervienen explícitamente en la solución $p_{w_k}(t)$ (según el teorema 4), pertenecen obviamente a $\mathscr{B}_k$, habrá que demostrar que dado cualquier $p_{ji} \in \mathscr{B}_k$ todos los polinomios que intervengan explícitamente en la obtención de p_{ji} pertenecen a $\mathscr{B}_k$. Veámoslo primero para $i < j$. Según teoremas 1 y 2, para cualquier polinomio, $P_{j'i}$, que intervenga explícitamente en el cálculo de P_{ji} se tiene $j' \in G_{ji}$ y por la propiedad 2 se cumplirá $G_{jj'} \neq \phi$ y $G_{j'i} \neq \phi$.

Por otro lado, al ser $P_{ji} \in \mathscr{B}_k$, tendremos $j \in H_k$ e $i \in H_j$, con lo que $j \in G_{km}$ e $i \in G_{jm'}$ para algún $m, m' \in E_0$ y nuevamente por la propiedad 2 se cumplirá $G_{kj} \neq \phi$ y $G_{im'} \neq \phi$. Con todo ello, al aplicar la propiedad 3 al conjunto de enteros $m' \leqslant i \leqslant j' < j \leqslant k$ deducimos directamente que $j' \in G_{km'}$, esto es, $j' \in H_k$ e igualmente al aplicarla al conjunto $m' \leqslant i \leqslant j'$ tendremos que $i \in G_{j'm'}$, esto es, $i \in H_{j'}$. Y por tanto $P_{j'i} \in \mathscr{B}_k$. Para el caso $i = j$, si $P_{ii} \in \mathscr{B}_k$ tendremos $i \in H_k$ y, según el corolario 4, para cualquier polinomio, $P_{ii'}$, que intervenga explícitamente en el cálculo de P_{ii} se tendrá $i' \in G_{im}$ para algún $m \in E_0$, con lo que $i' \in H_i$. Y por tanto $P_{ii'} \in \mathscr{B}_k$.

Probemos la inversa, esto es, que es necesario el cálculo de todos los polinomios de $\mathscr{B}_k$, para lo que habra que probar que todo polinomio de $\mathscr{B}_k$ interviene en el proceso recursivo y es no nulo. Sea $P_{ji} \in \mathscr{B}_k$. Si $j = k$, por el teorema 4 es evidente que P_{ki} interviene en el proceso recursivo. Consideremos, ahora, el caso $j < k$. De (12) tendremos $j \in H_k$ e $i \in H_j$, es decir, $j \in G_{km}$ e $i \in G_{jm'}$ para algún $m, m' \in E_0$ y por la propiedad 2 serán $G_{kj} \neq \phi$, $G_{ji} \neq \phi$ y $G_{im'} \neq \phi$, con lo que podemos aplicar la propiedad 3 al conjunto de enteros $i \leqslant j < k$ y deducimos que $j \in G_{ki}$ y aplicando el teorema 2 tendremos que P_{ji} interviene en el cálculo de P_{ki}. Pero, por otro lado, si aplicamos la propiedad 3 al conjunto de enteros $m' \leqslant i \leqslant j < k$ deduciremos $i \in G_{km'}$, $i \in H_k$ y, por tanto, $P_{ki} \in \mathscr{B}_k$, con lo que estamos en el caso anterior $j = k$ y P_{ki} interviene en el proceso recursivo, lo que prueba que P_{ji} interviene también en el proceso recursivo. Finalmente de (11) y (12) se deduce fácilmente que P_{ji} es no nulo.

4. APLICACION

Como aplicación podemos considerar un modelo epidemiológico estocástico. Sea una población de la que sus individuos son catalogados como inmunes a una determinada infección, infectados en la población o susceptibles de ser infectados. Notemos por $X_1(t)$, $X_2(t)$ y $X_3(t)$, respectivamente, al número de personas pertenecientes a cada una de las anteriores categorías en el instante t. El tamaño de la población será $N_1(t) = X_1(t) + X_2(t) + X_3(t)$. Consideremos, por otro lado, la categoría de individuos infectados que han sido aislados de la población, sean estos $N_2(t)$, cumpliéndose $\forall\, t$ que $N_1(t) + N_2(t) = N$, número total de personas. Admitimos que un individuo infectado en la población puede ser aislado y, de la misma manera, un infectado aislado puede ser curado y volver a la población como inmune. Además, dentro de la población, un individuo susceptible puede ser infectado por contagio o ser inmunizado mediante el tratamiento adecuado.

Este modelo lo podemos describir mediante una cadena de Markov tridimensional $\{X_i(t)\ i = 1, 2, 3,\ t \geqslant 0\}$, con espacio de estados $W_{N3} = \{w = (x_1, x_2, x_3) / x_i \in Z^+,\ \sum x_i \leqslant N\}$ y siendo

$$\begin{array}{ll} (x_1, x_2 - 1, x_3 + 1) & \to w \\ (x_1 - 1, x_2, x_3 + 1) & \to w \\ (x_1, x_2 + 1, x_3) & \to w \\ (x_1 - 1, x_2, x_3) & \to w \end{array} \tag{13}$$

las posibles transiciones a $w = (x_1, x_2, x_3) \in W_{N3}$ en el intervalo $(t, t+dt)$.

Podemos utilizar este modelo para ilustrar los ahorros que se obtienen en memoria y tiempo de computación al resolverlo utilizando los resultados de los teoremas 4 y 5 en lugar de la expresión (3). En este sentido, se ha resuelto por ambos procedimientos, para el caso de $N = 7$ y tomando como intensidades de transición para las transiciones (13), $\beta_1(x_2 - 1)(x_3 + 1)$, $\beta_2(x_3 + 1)$, $\beta_3(x_2 + 1)$ y $\beta_4(N - x_1 - x_2 - x_3 + 1)$, respectivamente, y siendo la intensidad de paso $\beta_1 x_2 x_3 + \beta_2 x_3 + \beta_3 x_2 + \beta_4(N - x_1 - x_2 - x_3)$, dado el estado $w = (x_1, x_2, x_3) \in W_{N3}$, donde $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ y β_4 son parámetros del modelo. Se ha utilizado para ello un IBM PS/2 Mod 50.

Los ahorros que se consiguen son variables, estando en función de las probabilidades que deseemos obtener y dependiendo también de factores tales como el valor de N, las transiciones permitidas en el modelo y el estado inicial. En cualquier caso se ha observado un ahorro considerable. A título ilustrativo, se ha obtenido la distribución de probabilidad absoluta en un instante de tiempo t para el modelo anterior, haciendo variar el estado inicial y se ha observado que el ahorro mínimo es del 42 % en tiempo de computación y del 40 % en memoria necesaria, pudiendo llegar el ahorro a ser superior al 90 %, tanto en memoria como en tiempo, al considerar determinados estados iniciales. Igualmente, se ha medido en este modelo los ahorros que se consiguen al calcular las colas de determinadas distribuciones de interés, como por ejemplo, el tamaño de la infección en un instante t (definido como $TI(t) = X_2(t) + N_2(t)$). Así, para obtener $P(TI(t) \geqslant 6)$, variando el estado inicial, se observa un ahorro mínimo del 53 % en tiempo y del 61 % en memoria necesaria, llegando el ahorro a ser superior al 90 % para determinados estados iniciales.

REFERENCIAS

BILLARD, L. (1981): «Generalized two-dimensional bounded birth and death processes and some applications». *J. Appl., Prob.*, 18, 335-347.

REQUENA, F. (1981): «Procedimiento de solución para una cadena de Markov *n*-dimensional de parámetro continuo». *Cuadernos de Estadística Matemática*, 6, 49-65.

REQUENA, F., y ORTEGA, L. (1985): «Sobre la solución de un modelo epidemiológico estocástico con inmunización». XV Reunión Nacional de Estadística e I. O., Gijón, 23 al 26 de septiembre.

REQUENA, F. (1986): «Estudio de una solución recursiva para una cadena de Markov en tiempo continuo, con aplicaciones epidemiológicas». XVI Reunión Nacional de Estadística e I. O., Málaga, 3 al 6 de noviembre.

SEVERO, N. C. (1969a): «A recursion theorem on solving differential-difference equations and applications to some stochastic processes». *J. Appl. Prob.*, 6, 673-681.

SEVERO, N. C. (1969b): «Right-Shift processes». Proc. Nat. Acad. Sci., U.S.A., 64, 1162-1164.