TRABAJOS DE ESTADISTICA
Vol. 1, Núm. 1, 1986, pp. 127 a 139

EL VALOR DIFUSO ESPERADO CON INTEGRALES SEMICONORMADAS

Fermín Suárez
Pedro Gil
Departamento de Matemáticas
Universidad de Oviedo

Revisado, noviembre 1985.

RESUMEN

En este trabajo usamos las integrales semiconormadas para ampliar la definición del valor difuso esperado (F.E.V.) (Kandel, 1979); extendemos algunas de las propiedades dadas por éste criticando su intención de que el F.E.V. sea lineal. Finalmente damos una condición necesaria y suficiente para que cualquier integral semiconormada tenga algunas propiedades de linealidad.

Palabras clave: Integral semiconormada. Valor difuso esperado. Medida difusa.

Clasificación A.M.S.: 03E72.

Title: Fuzzy expected value with semiconormed integrals

SUMMARY

In this paper we first use the semiconormed fuzzy integrals in order to extend the definition of the fuzzy expected value (F.E.V.) (Kandel, 1979). We generalize some of the properties due to Kandel with a criticism about his purpose of constraining the F.E.V. to be linear. Finally, a necessary and sufficient condiction is given in order to guarantee some linearity properties for any semiconormed fuzzy integral.

Key words: Semiconormed fuzzy integral. Fuzzy expected value. Fuzzy measure.

A.M.S. 1980 Subject Classification: 03E72.

1. Introducción

El proyecto de crear una estadística difusa dotada de instrumentos propios de la teoría de subconjuntos difusos ha venido preocupando a varios investigadores. Especialmente interesado parecer ser A. Kandel, quien introdujo el término de valor difuso esperado (F.E.V., *fuzzy expected value)* (ver Kandel, 1979, 1980 y 1981) como concepto paralelo al de esperanza matemática para medir promedios a través de medidas difusas y usando la integral de Sugeno (ver Sugeno, 1974).

En un intento de dotar al F.E.V. de propiedades de linealidad, Kandel incurre en un importante error puesto de manifiesto de forma independiente por Klement y Ralescu (1983) y F. Suárez (1983).

En esta primera parte daremos un breve resumen de los conceptos y notaciones utilizados en el resto del trabajo. En la segunda parte definimos el concepto de t-semiconorma en $[a, b]$, que será una importante herramienta en la definición de las integrales difusas, y damos un método de obtención. La tercera parte es un resumen del estudio de las integrales semiconormadas y de sus propiedades más importantes. Es en la cuarta parte en la que hacemos uso de los conceptos anteriores para definir una familia de operadores, los $\perp$-F.E.V., que contienen al F.E.V. de Kandel y de las que estudiamos su comportamiento ante transformaciones crecientes. Por último extraemos las conclusiones en la parte quinta con un teorema que nos da una condición necesaria y suficiente para que cualquier integral semiconormada sea lineal.

Veamos algunos de los conceptos generales de la teoría de subconjuntos difusos utilizados a lo largo de este trabajo.

1.1. Definición

Sea X un conjunto y β una σ-álgebra de subconjuntos de X. Una aplicación $g: \beta \to [0, 1]$ se dice que es una *medida difusa* si:

1.º $g(\phi) = 0;\ g(X) = 1$

2.º Si $A \subset B \Rightarrow g(A) \leqslant g(B)$

3.º Si $\{A_n\}_{n \in N}$ es una sucesión monótona de elementos de β ($A_n \subset A_{n+1}$ o $A_{n+1} \subset A_n$, $\forall\, n \in N$), entonces

$$\lim_{n \to \infty} g(A_n) = g\left(\lim_{n \to \infty} A_n\right)$$

A la terna (X, β, g) se le denomina *espacio de medida difusa.*

1.2. DEFINICIÓN

Sean $h\colon X \to [0,1]$, $H_\alpha^h = \{x/h(x) \geqslant \alpha\}$ y $H_\alpha'^h = \{x/h(x) > \alpha\}$. La función h se dice que es *β-medible* si $H_\alpha^h \in \beta$ o $H_\alpha'^h \in \beta$, $\forall\, \alpha \in [0,1]$.

Al conjunto de aplicaciones de $X \to [0,1]$ β-medibles lo denotaremos por $L^0(X)$.

1.3. DEFINICIÓN

Una aplicación $h\colon X \to [0,1]$ nos define un subconjunto difuso de X (normalmente la notación es μ_A). Cuando A es un conjunto clásico $\mu^A(x) \in \{0,1\}$, $\forall\, x \in X$ (ver Zadeh, 1965).

Para facilitar la notación enteńderemos por $I = [0,1]$, $x \vee y = \text{máx}\,(x,y)$ y por $x \wedge y = \text{mín}\,(x,y)$.

2. T-semiconormas

2.1. DEFINICIÓN

Una t-semiconorma en $[a,b]$ es una aplicación ${}_{ab}\!\perp$ de $[a,b] \times [a,b]$ en $[a,b]$, que denotaremos por $\perp$ para simplificar la notación, tal que verifique:

A) $\perp a, x) = \perp(x,a) = x$, $\forall\, x \in [a,b]$

B) Si $x_1 \leqslant x_2$ e $y_1 \leqslant y_2 \Rightarrow \perp(x_1, y_1) \leqslant$
$\leqslant \perp(x_2, y_2)$, $\forall\, x_1, x_2$, y_1 e y_2 de $[a,b]$.

Es inmediato comprobar que las siguientes aplicaciones verifican las propiedades A) y B) de la definición anterior.

2.2. EJEMPLOS

$$\perp_1(x,y) = x \wedge y$$

$$\perp_2(x,y) = b - \frac{(b-x)(b-y)}{(b-a)}$$

$$\perp_3(x,y) = b \wedge (x + y - a)$$

$$\perp_{4,\lambda}(x,y) = \begin{cases} x \vee y & \text{si} \quad x \wedge y \leqslant \lambda \\ b & \text{si} \quad x \wedge y > \lambda \end{cases} \quad \forall\, \lambda \in [a,b]$$

Se comprueba que para toda t-semiconorma en $[a,b]$ $\perp$ se verifica que

$$\perp_1(x,y) \leqslant \perp(x,y) \leqslant \perp_{4,0}(x,y) \ , \ \forall\, x, y \in [a,b]$$

Cuando $a = 0$ y $b = 1$ a la aplicación $\perp$ la llamaremos simplemente *t-semiconorma* y la representaremos por $\perp$.

Veamos cómo obtener t-semiconormas en $[a,b]$ a partir de otras t-semiconormas en $[a,b]$; para ello necesitamos de los siguientes resultados cuyas demostraciones omitimos por ser muy similares a las usadas para obtener resultados equivalentes para t-normas por Schweizer y Sklar (1961).

2.3. Lema

Sean $a_0 \in [a,b]$, $I_0 = [a,a_0]$, $I_1 = [a_0,b]$ y h una aplicación de $[a,b]$ en I_0 continua y estrictamente creciente, ($h(a) = a$ y $h(b) = a_0$). Sea h^* la aplicación

$$h^*(x) = \begin{cases} h^{-1}(x) & \text{si} \quad x \in I_0 \\ b & \text{si} \quad x \in I_1 \end{cases}$$

Se verifica que h^* es creciente y $h^*[h(x)] = x$, $\forall\, x \in [a,b]$.

Mediante el lema anterior obtenemos el siguiente teorema.

2. **Teorema**

Sea $\perp$ una t-semiconorma en $[a,b]$ y sean h, h^*, I_0 e I_1 definidos como en el lema anterior. Entonces la aplicación definida en $[a,b] \times [a,b]$ por $\perp_h(x,y) = h^*\{\perp[h(x),h(y)]\}$ es una t-semiconorma en $[a,b]$.

Este teorema refleja las ilimitadas posibilidades de definir t-conormas, lo que, a su vez, nos permitirá definir diferentes integrales semiconormadas, como veremos en la siguiente sección.

3. Las integrales semiconormadas

En lo que sigue supondremos que todas las funciones h son elementos de $L^0(X)$ y todos los conjuntos elementos de β.

En F. Suárez (1983) se definen las integrales semiconormadas como:

3.1. DEFINICIÓN

Sea (X, β, g) un espacio de medida difusa, $h \in L^0(X)$ y $\perp$ una t-semiconormada. La integral semiconormada $\perp$ de h sobre A con respecto a g se define:

$$\int_A h \perp g = \inf_{\alpha \in I} \perp [\alpha, g(A \cap H_\alpha'^h)] \tag{3.1}$$

Es inmediato comprobar que podemos cambiar I por $[0, 1)$ en (3.1) sin que ésta cambie de valor. Una mayor información, así como las demostraciones de las siguientes propiedades pueden encontrarse en Suárez y Brezmes (1984) y Suárez y Gil (86).

3.2. PROPOSICION

Para cualesquiera t-semiconorma $\perp$ y medida difusa g se verifican las siguientes propiedades:

— La integral de Sugeno es una integral semiconormada.

— $\int_A a \perp g = a, \ \forall\, a \in I$

— Si $h_1 \leqslant h_2 \Rightarrow \int_A h_1 \perp g \leqslant \int_A h_2 \perp g$

— Si $A \subset B \Rightarrow \int_A h \perp g \leqslant \int_B h \perp g, \ \forall\, h \in L^0(X)$

— $\int_A (a \wedge h) \perp g = a \wedge \int_A h \perp g, \ \forall\, a \in I$

— $\displaystyle\int_A h \perp g = \int_X (h \wedge \mu_A) \perp g$

— $\displaystyle\int_X \mu_A \perp g = g(A)$

— $\displaystyle\int_A h \perp_1 g \leqslant \int_A h \perp g \leqslant \int_A h \perp_{4,0} g, \quad \forall \perp$

— Sea $\perp$ una t-semiconorma continua y sea $\{h_n\}_N$ una sucesión de funciones de $L^0(X)/h_n \uparrow h$ (ó $h_n \downarrow h$). Se cumple que:

a) $h \in L^0(X)$

b) $\displaystyle\int_A h_n \perp g \uparrow \int_A h \perp g$ (respectivamente: $\displaystyle\int_A h_n \perp g \downarrow \int_A h \perp g$)

Como corolario de los anteriores resultados podemos considerar los siguientes.

3.3. COROLARIO

— $\displaystyle\int_A (h_1 \wedge h_2) \perp g \leqslant \int_A h_1 \perp g \wedge \int_A h_2 \perp g$

— $\displaystyle\int_A (h_1 \vee h_2) \perp g \geqslant \int_A h_1 \perp g \vee \int_A h_2 \perp g$

— $\displaystyle\int_{A \cap B} h \perp g \geqslant \int_A h \perp g \vee \int_B h \perp g$

— $\displaystyle\int_{A \cap B} h \perp g \leqslant \int_A h \perp g \wedge \int_B h \perp g$

— Sea $M = \displaystyle\int h \perp g$ y sea h^* definida por:

$$h^*(x) = \begin{cases} M & \text{si} \quad x \in H'^{h}{}_{M} \\ h(x) & \qquad\qquad \text{en otro caso} \end{cases}$$

entonces:

$$\int_A h^* \perp g = \int_A h \perp g$$

— Sea $\{h_n\}_{n \in N}$ una sucesión de $L^0(X)$. Para toda t-semiconorma $\perp$ continua se tiene que

$$\int_A \left(\liminf_{n \to \infty} h_n \right) \perp g \leqslant \liminf_{n \to \infty} \left\{ \int_A h_n \perp g \right\}$$

Esta última propiedad podemos considerarla como una versión del lema de Fatou para integrales semiconormadas (ver Suárez y Brezmes, 1984).

4. El valor difuso esperado

En varios trabajos, A. Kandel define el *valor difuso esperado* de una aplicación $h \in L^0(X)$ con respecto a la medida difusa g como

$$\text{F.E.V.}(h) = \sup_{\alpha \in I} \{\alpha \wedge g(H_\alpha^h)\} = \inf_{\alpha \in I} \{\alpha \vee g(H_\alpha^h)\} \tag{4.1}$$

Es inmediato comprobar que (4.1) es igual a

$$\inf_{\alpha \in I} \{\alpha \vee g(H_\alpha'^h)\} = \int_X h \perp_1 g$$

Esta definición, así como algunas propiedades del F.E.V., han sido expuestas en A. Kandel (1979, 1980 y 1981). En estas mismas referencias el autor extiende la definición del F.E.V. a aplicaciones que son los transformados afines $(G(h) = m \cdot h + n$, con $m \geqslant 0)$, de elementos de $L^0(X)$, aplicando a y a g en (4.1) la misma transformación que se le hace a h, es decir:

4.1. DEFINICIÓN (KANDEL)

$$\text{F.E.V.}(G \cdot h) = \sup_{\alpha \in [G(0), G(1)]} \{\alpha \wedge (G \circ g)(H_\alpha^{G \cdot h})\} \tag{4.2}$$

siendo $G(x) = mx + n$ con $m > 0$.

Con la anterior definición el autor obtiene el siguiente resultado.

4.2. PROPOSICIÓN

Sean $m > 0$ y n constantes, y sea $h \in L^0(X)$, entonces:

$$\text{F.E.V. } G(m \cdot h + n) = m \text{ F.E.V. } (h) + n$$

En Klement y Ralescu (1983) y F. Suárez (1983) se encuentran contraejemplos en los que queda de manifiesto que el F.E.V. (Gh) no está bien definido, con lo que se ve la necesidad de cambiar la notación y denotar a esta última expresión por $\text{F.E.V.}_G(Gh)$.

4.3. DEFINICIÓN

Sean $h \in L^0(X)$ y $\perp$ una t-semiconorma. Se define el $\perp$-valor difuso esperado como:

$$\perp\text{-F.E.V.}(h) = \int_X h \perp g \tag{4.3}$$

De manera análoga a la de Kandel podemos ampliar la definición anterior a aplicaciones transformadas de otras por medio de funciones crecientes cuyo conjunto imagen sea un intervalo cualquiera $[a, b]$ de R. Para ello necesitamos ampliar la definición de integral semicornomada como sigue:

4.4. DEFINICIÓN

Sea G una aplicación estrictamente creciente de I sobre $[a, b]$ y sea $\perp$ una t-semiconorma en $[a, b]$. Se define la integral semiconormada G:

$$(G) \int_X ((G \circ h) \perp g = \inf_{\alpha \in [a, b]} \perp \{\alpha, (G \circ g)(G_\alpha^{\prime G \circ h})\} \tag{4.4}$$

Con la anterior definición se generaliza la definición 4.3 como sigue.

4.5. DEFINICIÓN

Sea $h \in L^0(X)$ y $\perp$ una t-semiconorma en $[a, b]$; se define el $\perp_G$-valor difuso esperado de $G \circ h$ por:

$$\perp\text{-F.E.V. } G(G \circ h) = (G) \int_A (G \circ h) \perp g$$

Cuando $a = 0$, $b = 1$ y $\perp(x, y) = x \vee y$, lo denotamos por F.E.V. $_G(G \circ h)$.

4.6. PROPOSICIÓN

La definición 4.5 coincide con la 4.1 cuando $\perp(x, y) = x \vee y$.

En efecto, es fácil ver que

$$\inf_{\alpha \in [a,b]} \{\alpha \vee (G \circ g)(H'^{G \circ h}_{\alpha})\} = \inf_{\alpha \in [a,b]} \{\alpha \vee (G \circ g)(H^{G \circ h}_{\alpha})\}$$

Para simplificar la notación llamaremos:

$$(1) = \inf_{\alpha \in [a,b]} \{\alpha \vee (G \circ g)(H^{G \circ h}_{\alpha})\}$$
$$(2) = \sup_{\alpha \in [a,b]} \{\alpha \wedge (G \circ g)(H^{G \circ h}_{\alpha})\}$$

Es evidente que $(2) \leqslant (1)$. Veamos que la desigualdad no puede ser estricta; en caso contrario, existirá un $L \in [a, b]$ tal que

$$(2) < L < (1) \Rightarrow (G \circ g)(H^{G \circ h}_{L}) < L \Rightarrow L < (1) \leqslant$$
$$\leqslant L \vee (G \circ g)(H^{G \circ h}_{L}) = L$$

con lo que se llega a una contradicción.

4.7. DEFINICIÓN

Sea $\perp$ una t-semiconorma en $[a, b]$ y $\perp$ la correspondiente t-semiconorma en I. Diremos que una aplicación f de I sobre $[a, b]$ es *lineal* respecto a $\perp$ si

$$\perp[f(x), f(y)] = f[\perp(x, y)] \ , \ \forall\, x, y \in I$$

Se puede comprobar que cualquier aplicación estrictamente creciente y sobre es lineal respecto a la t-semiconorma $\perp_1(x, y) = x \vee y$.

4.8. PROPOSICIÓN

Sea G una aplicación de I sobre $[a, b]$ β-medible, estricramente creciente y lineal respecto respecto a la t-semiconorma $\perp$. Se verifica que

$$(G) \int_X (G \circ h) \perp g = G\left\{ \int_X h \perp g \right\}$$

Demostración

$$\begin{aligned}(G) \int_X (G \circ h) \perp g &= \inf_{\alpha \in [a,b]} \perp [\alpha, (G \circ g)(H'^{G \circ h}_{\alpha})] = \\ &= \inf_{\alpha \in [a,b]} \perp [G \circ G^{-1}(\alpha), G \circ g(H'^{G \circ h}_{\alpha})] \overset{(*)}{=} \\ &\inf_{\alpha \in [a,b]} G\{\perp[G^{-1}(\alpha), g(H'^{h}_{G^{-1}(\alpha)})]\} = \\ &\overset{(**)}{=} G\left\{ \inf_{\beta \in [0,1]} \perp[\beta, g(H'^{h}_{\beta})]\right\}\end{aligned}$$

(*) Por ser G lineal y $H'^{G \circ h}_{\alpha} = H'^{h}_{G^{-1}(\alpha)}$.
(**) Haciendo $G^{-1}(\alpha) = \beta$.

4.9. COROLARIO

La proposición 4.2 se verifica.
La demostración es inmediata con $\perp(x, y) = x \vee y$ y $G(x) = mx + n$.

5. Conclusión

La propia naturaleza de las medidas difusas hace que no se le puedan exigir propiedades de linealidad a las medidas de centralización obtenidas a partir de ellas.

En nuestra opinión, el problema le surge a Kandel por intentar que las integrales difusas sean lineales cuando, en general, no lo son, y es por eso por lo que queremos resaltar que si $G \circ h \in L^0(X)$, en general F.E.V. $(G \circ h)/ =$ F.E.V. $_G(H \circ h)$.

Si se quiere que las integrales difusas tengan propiedades de linealidad habría que usar el siguiente resultado.

5.1. TEOREMA

Sean $a, b \in R^+$, f y $h \in L^0(X)/af + bh \in L^0(X)$, entonces:

$$\int_X (af + bh) \perp g = a \int_X f \perp g + b \int_X h \perp g \ , \forall\, t\text{-semiconorma } \perp$$

si y sólo si g es una medida de probabilidad tal que $g(A) \in \{0, 1\}$, $\forall\, A \in \beta$.

La condición necesaria está probada en Klement y Ralescu (1983) para $\perp(x, y) = \text{máx}\,(x, y)$. Veamos la condición suficiente.

Es fácil probar que si $g(A) \in \{0, 1\}$, $\forall\, A \in \beta$, para toda t-semiconorma se verifica que

$$\int_X f \perp g = \inf\{\alpha \in [0, 1]/g(H'^f_\alpha) = 0\}$$

Por otra parte:

$$H'^f_\alpha \cap H'^h_\beta \subset H'^{f+h}_{\alpha+\beta} \subset H'^f_\alpha \cup H'^h_\beta \tag{5.1}$$

Sean

$$\alpha_0 = \inf\{\alpha \in I/g(H'^f_\alpha) = 0\} \tag{5.2}$$

$$\beta_0 = \inf\{\alpha \in I/g(H'^h_\alpha) = 0\} \tag{5.3}$$

$$\gamma_0 = \inf\{\alpha \in I/g(H'^{f+h}_\alpha) = 0\} \tag{5.4}$$

$$\Rightarrow g(H'^f_{\alpha_0}) = g(H'^h_{\beta_0}) = g(H'^{f+h}_{\gamma_0}) = 0 \tag{5.5}$$

$$\Rightarrow g(H'^{f+h}_{\alpha_0+\beta_0}) \leqslant g(H'^f_{\alpha_0}) + g(H'^h_{\beta_0}) = 0 \Rightarrow \alpha_0 + \beta_0 \geqslant \gamma_0$$

Si

$$\gamma_0 < \alpha_0 + \beta_0 \Rightarrow \gamma_0 = (\alpha_0 - \varepsilon) + (\beta_0 - \varepsilon)$$
$$\text{para algún } \varepsilon \Rightarrow g(H'^{f+h}_{\gamma 0}) \geqslant g(H'^{f}_{\alpha 0-\varepsilon} \cap H'^{h}_{\beta 0-\varepsilon}) \overset{(*)}{=} 1$$

en contra de (5.5). La igualdad (*) es debida a que g es una medida de probabilidad tal que $g(A) = g(B) = 1 \Rightarrow g(A \cap B) = 1$.

Por otra parte:

$$\int_X a \cdot f \perp g = \inf \{\alpha \in I / g(H'^{a \cdot f}_{a}) = 0\} =$$
$$= \inf \{\alpha \in I / g(H'^{f}_{\alpha/a}) = 0\} = \inf \{a \cdot \beta \in I / g(H'^{f}_{\beta}) = 0\} =$$
$$= a \cdot \inf \{\beta \in [0, 1/a] / g(H'^{f}_{\beta}) = 0\} \overset{(**)}{=}$$
$$= a \cdot \inf \{\beta \in I / g(H'^{f}_{\beta}) = 0\} = a \int_X f \perp g$$

(**) Ya que $H'^{f}_{\beta} = \phi, \forall \beta \geqslant 1/a$.

Análogamente, para

$$\int_X b \cdot h \perp g = b \cdot \int_X h \perp g$$

REFERENCIAS

KANDEL, A. (1979): «On fuzzy statistics», *Advances in Fuzzy Set Theory and Applications*, (Gupta, Ragade y Yager, eds.), North-Holland Pub., Amsterdam, págs. 321-338.

KANDEL, A. (1980): «Fuzzy dinamical systems and the nature of their solutions», *Fuzzy Sets Theory and Applications to Policy Analisis and Information Systems* (Wang y Chang, eds.), págs. 93-122.

KANDEL, A. (1981): «Fuzzy expectations in energy states in fuzzy media», *Fuzzy Sets Sys.*, *6*, núm. 2, págs. 145-160.

KLEMENT, E. P., y RALESCU, D. (1983): «Nonlinearity of the fuzzy integrals», *Fuzzy Sets and Sys.*, *11*, núm. 3, págs. 309-315.

SCHWEIZER, B., y SKLAR, A. (1963): «Associative functions and abstract semigroups», *Pub. Math. Debrecem*, *10*, págs. 69-81.

SUAREZ, F. (1983): *Familias de integrales difusas y medidas de entropía relacionadas*, Tesis Doctoral, Universidad de Oviedo.

SUAREZ, F., y BREZMES, T. (1984): *Teoremas de convergencia en integrales difusas*, actas del XIV Congreso Nacional de Estadística, I.O. e Informática, Granada, 1984, págs. 781-791.

SUAREZ, F., y GIL, P.: (1986) «Two families of fuzzy integrals», *Fuzzy Sets and Syst.*, 18, núm. 1, págs. 67-81.

SUGENO, M. (1974): *Theory of Fuzzy Integrals and its Applications*, Ph. D. Thesis Ins. of Technol., Tokyo.

ZADEH, L. H. (1965): «Fuzzy sets», *Inform. Contr.*, *8* págs. 338-353.