HOMENAJE AL PROFESOR SIXTO RIOS
TRABAJOS DE ESTADISTICA Y DE INVESTIGACION OPERATIVA
Vol. 36, Núm. 3, 1985, pp. 269 a 279

UN PROBLEMA SIMPLE DE DECISION Y UN PROBLEMA DE ESPERA

L.A. Santaló

Departamento de Matemáticas.Universidad de Buenos Aires.
Cochabamba 780. 1150 Buenos Aires, Argentina.

El viaje de P a Q se puede hacer por diferentes líneas de autobuses que pasan por P según una ley de Poisson dada y tienen distintas velocidades. En esta nota analizamos la estrategia óptima para un pasajero que llega al azar a la parada P y desea trasladarse a Q en un tiempo mínimo. Al final (n.5) consideramos un problema de espera para autobuses que no siguen una distribución de Poisson.

Palabras Clave: Decisión; Proceso de Poisson; Proceso Aleatorio; Distribución Uniforme; Tiempo de espera.

Clasificación AMS (1980): Primaria, 90D35; Secundaria, 60K30.

A simple problem of decision and a waiting time problem

The travel form P to Q can be achieved by different lines of buses, passing the bus stop P according to a given Poisson distribution and having different velocities. We analyze the strategy for a passenger arriving at random at P in order to arriving at Q in the minimum of time. We also consider (n.5) a problem of waiting time at P when the buses follow processes which are not of Poisson.

Key words: Decision; Poisson Process; Random Processes; Uniform Distribution; Waiting time.

AMS Classification (1980): Primary, 90D35; Secondary, 60K30.

0. EL PROBLEMA

El problema que vamos a tratar es el siguiente, del cual consideramos también algunas variantes. El viaje del punto P al punto Q puede hacerse por distintos medios de transporte, sean $B_1, B_2, \ldots, B_m$ que supondremos, por facilidad de expresión, que son todos líneas de autobuses diferentes. Hacemos las siguientes hipótesis:

a) Los autobueses B_i pasan por P según una ley de Poisson de intensidad λ_i, es decir, λ_i, es el número medio de autobuses B_i que pasan por P por unidad de tiempo;

b) Los autobuses de la línea B_i hacen el recorrido de P a Q en el tiempo t_i. Diremos que λ_i, t_i son las características de los autobuses B_i $(i=1,...,m)$.

Un pasajero que llega a P en un momento al azar, desea trasladarse a Q en el mínimo tiempo. Para ello tiene que decidir entre distintas estrategias, como ser:

a) Esperar el autobús mas rápido;

b) Tomar el primer autobús que llegue a P;

c) Esperar durante un cierto tiempo a un determinado autobús, precindiendo de los demás, y luego decidir.

El problema consiste en averiguar cual debe ser la estrategia a seguir para que la esperanza del tiempo transcurrido desde que el pasajero llega a P hasta que llega a Q tenga el mínimo valor.

Al final, nº 5, consideramos el problema del tiempo de espera en P cuando los autobuses no siguen una ley de Poisson, si no que están programados para pasar a intervalos regulares, aunque se admite una tolerancia de adelanto o retraso limitada y uniformemente distribuida.

1. PROCESOS DE POISSON. ALGUNOS RESULTADOS CONOCIDOS.

Consideremos la recta real como el eje de los tiempos t. Sean τ, τ_1 dos intervalos de tiempo, cuyas longitudes representaremos por las mismas letras. Supogamos $\tau \leq \tau_1$.

Si se eligen al azar, con ley uniforme, m puntos en el intervalo τ_1, la probabilidad de que exactamente r de ellos pertenezcan a τ, es (distribución binomial)

$$p_r = C(m,r)\,(\tau/\tau_1)^r\,(1 - \tau/\tau_1)^{m-r}. \tag{1.1}$$

Supongamos que τ_1, m tiendan a infinito, con la condición de que $m / \tau_1 \rightarrow \lambda$ (constante). Resulta entonces que

$$P_r = \lim p_r = (\lambda\tau)^r / r! \;\; e^{-\lambda\tau} \quad (r = 0,1,2,...) \tag{1.2}$$

es la probabilidad de que en un intervalo de tiempo τ se encuentren exactamente r puntos de los dados al azar de manera uniforme. La constante λ es el número medio de puntos por unidad de tiempo. Un proceso de puntos sobre la recta con la ley de distribución (1.2) se llama un proceso de Poisson de intensidad λ.

La probabilidad de que en el intervalo τ no haya ningún punto del proceso (r=0), será

$$P_0 = e^{-\lambda\tau} \tag{1.3}$$

y la probabilidad de que contenga "por lo menos" un punto será $1 - P_0 = 1 - e^{-\lambda\tau}$. Por lo tanto, salvo infinitésimos de orden superior, la probabilidad de que un intervalo de longitud $\Delta\tau$ contenga por lo menos un punto del proceso es $\lambda.\Delta\tau$.

La probabilidad de que la distancia desde un punto cualquiera del eje de los tiempos al punto mas próximo del proceso a la izquierda (o a la derecha) esté comprendida entre τ y $\tau + d\tau$ es el producto de (1.3) por la probabilidad de que el intevalo τ, $\tau + d\tau$ de longitud $d\tau$ contenga por lo menos un punto del proceso, o sea

$$\lambda\, e^{-\lambda\tau}\, d\tau. \tag{1.4}$$

Por tanto, el valor medio de la distancia (en tiempo) entre un punto cualquiera del eje de los tiempos y el puntos mas próximo del proceso a su izquierda (o a su derecha) será

$$E(\tau) = \int_{(0,\infty)} e^{-\lambda\tau}\, \lambda\, \tau\, d\tau = 1 / \lambda \tag{1.5}$$

Puesto que el punto considerado sobre el eje del tiempo puede ser o no ser un punto del proceso, (1.5) nos dice que $1/\lambda$ es el tiempo esperado (o valor medio) entre un punto cualquiera tomado al azar y el punto mas próximo del proceso (a la derecha o a la izquierda) y también el tiempo esperado entre dos puntos consecutivos del proceso. Esta aparente paradoja ha sido discutida por W. Feller (1966, Vol II, p. 11).

Finalmente recordemos que si se tienen m diferentes procesos de Poisson de intensidades λ_1, λ_2, ... λ_m superpuestos sobre el mismo eje, el resultado es un nuevo proceso de Poisson de intensidad $\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_m$. Por tanto, la distancia media entre un punto dado al azar y el punto del proceso mas próximo a su izquierda (o a su derecha) es $(\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_m)^{-1}$.

Para mas detalles y demostraciones rigurosas de estos simples resultados sobre los procesos de Poisson, se puede ver cualquier libro de probabilidades, por ejemplo W. Feller (1950,1966) A. Levine (1971) o S. Rios (1967).

2. EL CASO DE DOS LINEAS DE AUTOBUSES.

Empecemos por el caso de dos líneas de autobuses, B_1 de características λ_1, t_1 y B_2 de características λ_2, t_2.

Un pasajero que llegue a P en un instante al azar y desee trasladarse a Q en el menor tiempo posible puede elegir entre tres estrategias posibles:

1) Esperar el autobús B_1;

2) Esperar el autobús B_2;

3) Tomar el primer autobús que llegue a P.

Si sigue la estrategia 1, el tiempo de espera en P, de acuerdo con (1.5) tiene el valor medio $E(\tau) = 1 / \lambda_1$ y por tanto, el tiempo medio total del viaje hasta que llega a Q es

$$E_1(T) = 1 / \lambda_1 + t_1. \tag{2.1}$$

Analogamente, si el pasajero decide esperar el autobús B_2 el tiempo medio total del viaje es

$$E_2(T) = 1 / \lambda_2 + t_2. \tag{2.2}$$

Por la estrategia 3, el tiempo medio total es

$$E_3(T) = \int_{(0,\infty)} \exp(-\lambda_1\tau)\,\lambda_1 \exp(-\lambda_2\tau)\,(\tau + t_1)\,d\tau \qquad (2.3)$$

$$+ \int_{(0,\infty)} \exp(-\lambda_2\tau)\,\lambda_2 \exp(-\lambda_1\tau)\,(\tau + t_2)\,d\tau$$

$$= (1 + \lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2) / (\lambda_1 + \lambda_2)$$

donde la primera integral corresponde al caso en que llega primero un autobús B_1 (el integrando es el producto de la probabilidad (1.4) de que un autobús B_1 llegue en el intervalo τ, $\tau + d\tau$, por la probabilidad (1.3) de que ningún autobús B_2 llegue en el intervalo 0, τ, por el tiempo total $\tau + t_1$ cuyo valor medio se desea encontrar) y la segunda integral corresponde al caso análogo para el caso de llegar primero un autobús B_2.

Llegamos por tanto a la siguiente regla: Suponiendo dos puntos P, Q conectados por dos líneas de autobuses B_1, B_2 de características λ_1, t_1 y λ_2, t_2 respectivamente, para decidir la estrategia óptima de un pasajero que llega a P en un momento al azar y desea trasladarse a Q en un tiempo mínimo, se consideran las tres cantidades

$$(1 / \lambda_1) + t_1, \quad (1 / \lambda_2) + t_2, \quad (1 + \lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2) / (\lambda_1 + \lambda_2) \qquad (2.4)$$

Si la menor de estas cantidades es $1 / \lambda_i + t_i$ $(i=1,2)$ la mejor estrategia es esperar el autobús B_i. Si la mínima cantidad es la tercera, la mejor estrategia consiste en tomar el primer autobús que llegue a P.

NOTAS.

a) Si el tiempo t_i depende unicamente de la velocidad v_i de los autobuses B_i y s indica la distancia de P a Q, es $t_i = s / v_i$ y por tanto los valores (2.4) se escriben

$$1 / \lambda_1 + s / v_1, \quad 1 / \lambda_2 + s / v_2, \quad 1 + s(\lambda_1 / v_1 + \lambda_2 / v_2), \quad (\lambda_1 + \lambda_2)^{-1} \qquad (2.5)$$

que dependen de la distancia s. Observando que

$$[1+ s(\lambda_1/v_1 + \lambda_2/v_2)]/(\lambda_1 + \lambda_2) - 1/\lambda_1 - s/v_1 = (s\lambda_1\lambda_2(v_1 - v_2) - \lambda_2 v_1 v_2)/(\lambda_1 + \lambda_2)\lambda_1 v_1 v_2$$

$$[1+ s(\lambda_1/v_1 + \lambda_2/v_2)]/(\lambda_1 + \lambda_2) - 1/\lambda_2 - s/v_2 = (s\lambda_1\lambda_2(v_2 - v_1) - \lambda_1 v_1 v_2)/(\lambda_1 + \lambda_2)\lambda_2 v_1 v_2$$

resulta que, suponiendo por ejemplo $v_1 > v_2$, si

$$s \leq v_1 v_2 / (\lambda_1(v_1 - v_2)). \tag{2.6}$$

es siempre preferible tomar el primer autobús que llegue a P. En cambio, para distancias mayores es mejor esperar el autobús que minimiza $1 / \lambda_i + s / v_i$.

b) Cabe preguntarse la probabilidad de llegar a Q en un tiempo $\leq$ T, a partir del instante en que el pasajero llega a P, suponiendo $T > t_1, t_2$. Si se decide por el autobús B_1, la probabilidad de llegar a Q en un tiempo $\leq$ T es

$$p(\leq T) = 1 - \exp(-\lambda_1(T - t_1))$$

y si se decide por el autobús B_2 es

$$p(\leq T) = 1 - \exp(-\lambda_2(T - t_2))$$

Si se decide a tomar el primer autobús que llegue a la parada P, es

$$P(\leq T) = 1 - \exp(-(\lambda_1 + \lambda_2)\, T + \lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2)$$

Por tanto: con la condición $T > t_1, t_2$, la probabilidad de llegar a Q en un tiempo igual o menor que T desde el momento de llegar a P, es máxima tomando el primer autobús que llegue a P.

3. OTRAS ESTRATEGIAS.

Aunque la falta de memoria de los procesos de Poisson permite asegurar que las estrategias anteriores son las únicas que deben tenerse en cuenta, vamos a considerar de manera directa algunos problemas relacionados.

a) Supongamos, para fijar las ideas, que

$$(1 / \lambda_1) + t_1 < (1 / \lambda_2) + t_2 \tag{3.1}$$

y que el pasajero que llega a la parada P decide esperar el autobús B_1 durante un cierto tiempo w, pasado el cual, si todavía no ha llegado, decide tomar el primero que venga. ¿Cuál es el valor óptimo de w?

Procediendo como se hizo para (2.3), resulta que el tiempo total esperado para la estrategia actual es

$$E_4(T) = \int_{(0,w)} \exp(-\lambda_1\tau)\,\lambda_1\,(\tau + t_1)\,d\tau \qquad (3.2)$$

$$+ \int_{(w,\infty)} \exp(-\lambda_1\tau)\,\lambda_1 \exp(-\lambda_2(\tau - w))\,(\tau + t_1)\,d\tau$$

$$+ \int_{(w,\infty)} \exp(-\lambda_2(\tau - w))\,\lambda_2 \exp(-\lambda_1\tau)\,(w + t_2)\,d\tau$$

$$= \exp(-\lambda_1 w)[((1+\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2)/(\lambda_1 + \lambda_2)) - ((1/\lambda_1) + t_1)] + (1/\lambda_1) + t_1$$

Por tanto, el mínimo valor de $E_4(T)$ corresponde a $w=\infty$ (el pasajero espera un autobús B_1), si

$$(1+\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2) / (\lambda_1 + \lambda_2) > (1/\lambda_1) + t_1 \qquad (3.3)$$

y a $w=0$ (el pasajero toma el primer autobús que llega) en el caso contrario.

b) Suponiendo nuevamente, para fijar las ideas, que se cumple (3.1), el pasajero que llega a P decide que, durante un cierto tiempo w, tomará el primer autobús que llegue, pero si, pasado este tiempo no pasó ningún autobús, entonces esperará hasta que pase el autobús B_1. ¿Cuál es el mejor valor para w?.

Procediendo como antes resulta fácilmente que en este caso el valor medio del tiempo total de viaje es

$$E_5(T) = \exp(-(\lambda_1 + \lambda_2)w)[\,(1/\lambda_1) + t_1 - (1+\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2)/(\lambda_1 + \lambda_2)\,]$$

$$+ (1+\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2)/(\lambda_1 + \lambda_2) \qquad (3.4)$$

Por tanto, suponiendo que se cumple (3.1), el mínimo valor de $E_5(T)$ corrresponde a $w=0$ (esperar un autobús B_1 desde el comienzo) si se cumple (3.3) y a $w=\infty$ (tomar el primer autobús que llegue) en el caso contrario.

4. CASO DE m AUTOBUSES.

Supongamos el caso general de que el recorrido P a Q esté servido por m líneas de autobuses B_i (i=1,2,...,m) con las las características λ_i, t_i. Las estrategias posibles para un pasajero que llega al azar a P y desea trasladarse a Q en un tiempo mínimo, consisten en dejar de lado ciertos autobuses, sean $B_{h+1},..., B_m$ y tomar el primero que llegue de los autobuses restantes $B_1,...,B_h$. El tiempo esperado por esta estrategia, teniendo en cuenta que los autobuses $B_1,...,B_{i-1}$, $B_{i+1},...,B_m$ llegan a P según un proceso de Poisson de intensidad $\lambda_1 + \lambda_2 +...+ \lambda_{i-1} + \lambda_{i+1} +...+ \lambda_m$, será

$$E_{12..h}(T) = \Sigma_i \int_{(0,\infty)} \exp(-\lambda_i\tau)\, \lambda_i \exp(-(\lambda_1+..+\lambda_{i-1}+\lambda_{i+1}+..+\lambda_h)\tau)(t_i+\tau)d\tau \quad (4.1)$$

$$= (1+\lambda_1 t_1 +... + \lambda_h t_h) / (\lambda_1 +...+ \lambda_h) \ ; i=1,...,h$$

Por tanto podemos anunciar la siguiente regla: Supongamos que las estaciones P y Q estén unidas por m líneas de autobuses B_i (i=1,2,...,m) que llegan a P de acuerdo con una ley de Poisson de intensidad λ_i y tardan un tiempo t_i para hacer el recorrido de P a Q.

Para decidir la estrategia óptima que minimice el tiempo de viaje para un pasajero que llegue al azar a P y deba trasladarse a Q , se considerarán todas las posibles expresiones de la forma

$$(1+\lambda_{i_1}t_{i_1} +... + \lambda_{i_h}t_{i_h}) / (\lambda_{i_1} +...+ \lambda_{i_h}) \quad (4.2)$$

para h=1,2,...,m, donde $(i_1,i_2,...,i_h)$ es cualquier subconjunto del conjunto de los números naturales (1,2,...,m). Cambiando si es necesario el nombre de los índices, con $1 \leq h \leq m$, supongamos que la expresión (4.2) que tiene el valor mínimo es

$$(1+\lambda_1 t_1 +... + \lambda_h t_h) / (\lambda_1 +...+ \lambda_h) \quad (4.3)$$

Entonces, la mejor estrategia consiste en ignorar los autobuses $B_{h+1},..., B_m$ y tomar el primer autobús que llegue dentro de los $B_1, B_2,..., B_h$. Si la expresión (4.3) que da el valor mínimo no es única, hay varias estrategias óptimas.

NOTA.

Si v_i es la velocidad de los autobuses B_i y s indica la distancia de P a Q, es $t_i = s / v_i$ y (4.3) se escribe

$$1 + s(\lambda_1 / v_1+...+ \lambda_h / v_h) / (\lambda_1+...+ \lambda_h) \quad (4.4)$$

Para s suficientemente pequeño, se tiene

$$1 + s(\lambda_1/v_1+...+\lambda_h/v_h)/(\lambda_1+...+\lambda_h) \geq 1+ s(\lambda_1/v_1+...+\lambda_m/v_m)/(\lambda_1+...+\lambda_m) \quad (4.5)$$

lo que nos dice que, para s suficientemente pequeño (justo el valor para el cual se cumple (4.5)) la mejor estrategia consiste en tomar el primer autobús que llegue. Para s suficientemente grande es

$$1 + s(\lambda_1/v_1+...+\lambda_h/v_h)/(\lambda_1+...+\lambda_h) \geq (1/\lambda_i) + t_i \quad (i=1,2,...,m) \qquad (4.6)$$

y por tanto, para s suficiente grande, de manera que se cumplan todas las condiciones (4.6), la mejor estrategia consiste en esperar el autobús para el cual la expresión $(1/\lambda_i) + t_i$ es mínima $(i=1,2,...,m)$

5. SOBRE EL TIEMPO DE ESPERA EN UNA ESTACION.

En los problemas anteriores juega un papel esencial el tiempo medio de espera en P, desde el momento en que el pasajero llega, hasta que toma el autobús elegido. Este tiempo medio depende de la distribución en el tiempo del paso de los autobuses. En lo que precede hemos supuesto distribuciones de Poisson, para las cuales, si la intensidad es λ, el tiempo medio de espera es $1/\lambda$, según (1.5).

Se pueden considerar otros casos. Supongamos el caso general de una sucesión de autobuses separados entre si por los intervalos de tiempos $h_1, h_2,...,h_n$. Si un pasajero llega en el intervalo h_i, el tiempo medio de espera es, evidentemente, $h_i/2$. Por otra parte, si se supone que llega al azar a la estación P según la ley uniforme, la probabilidad de llegar en el intervalo h_i es $h_i(h_1 + h_2 +...+ h_n)^{-1}$. Por tanto, el tiempo medio de espera τ es

$$E(\tau; h_1,...,h_n) = \Sigma_i 2^{-1} h_i^2 (h_1+...+ h_n)^{-1} \; ; i=1,...,n \qquad (5.1)$$

y si la sucesión h_i es estacionaria y los intervalos h_i satisfacen una ley fuerte de los grandes números, tomando el límite para $n \rightarrow \infty$, resulta, con probabilidad 1,

$$E(\tau) = E(h^2) / 2E(h) \qquad (5.2)$$

de acuerdo con el resultado de E.E.Osuna y G.F. Newell (1972).

Por ejemplo, para el caso de Poisson, según (1.3) y (1.5) es $E(h) = 1/\lambda$, $E(h^2) = 2/\lambda^2$ y por tanto $E(\tau) = 1/\lambda$, de acuerdo con (1.5).

Podemos aplicar (5.2) al siguiente caso, tal vez mas realista que el de Poisson. Supongamos sobre el eje del tiempo una sucesión de puntos equidistantes, sean 0, a, 2a, 3a, ... Supongamos que los autobuses de una línea que pasa por P están programados para pasar a intervalos regulares de amplitud a, pero que se admite un posible adelanto o retraso, no mayor que t, con distribución uniforme. Supongamos también $a \geq 2t$, sea $a = 2t + \delta$ $(\delta \geq 0)$ para que ningún autobús pueda adelantarse a otro de la sucesión.

Supongamos que un pasajero llega a P al azar, ¿cuál es el tiempo medio de espera?.

Llamando x, y a las abscisas sobre el eje del tiempo de los dos autobuses consecutivos que delimitan el intervalo en en que llega el pasajero a P, es

$$E(h) = (1 / 4t^2) \int_{(0,2t)} \int_{(a,a+2t)} (y - x) \, dx \, dy = a$$

$$E(h^2) = (1 / 4t^2) \int_{(0,2t)} \int_{(a,a+2t)} (y - x)^2 \, dx \, dy = a^2 + (2/3) t^2 .$$

Por tanto, según (5.2) el tiempo medio de espera es

$$E(\tau) = (a / 2) + (t^2 / 3a)$$

Es decir, el tiempo medio de espera aumenta con el cuadrado del tiempo de irregularidad permitido t. El tiempo mínimo de espera (en promedio) corresponde a un funcionamiento regular de los autobuses, sin adelanto ni atraso (t=0).

Si solamente se permite que los autobuses se atrasen hasta un tiempo máximo t $(t \leq a)$, pero que no puede adelantarse a su horario establecido, el tiempo medio de espera se calcula analogamente y el resultado es $E(\tau) = (a / 2) + (t^2 / 12a)$. Para t=a, resulta $E(\tau) = 7a / 12$.

Para el querido amigo Sixto Ríos, con admiración y afecto.

REFERENCIAS

FELLER. W. *An Introduction to Probability theory and its Applications*, John Willey, New York. Vol **I**, 1950. Vol. **II**, 1966.

LEVINE ARNOLD.(1971). *Theory of Probability*, Addison-Wesley Publishing Co. Reading, Mass (U.S.A).

OSUNA, E.E. y NEWLL, G.F.(1972). Control strategies of an idealized public transportation system. Transportation Science, Vol. **6**, 52-72.

RIOS, S. (1967). *Métodos Estadísticos*. McGraw-Hill, New York.