HOMENAJE AL PROFESOR SIXTO RIOS
TRABAJOS DE ESTADISTICA Y DE INVESTIGACION OPERATIVA
Vol. 36, Núm. 3, 1985, pp. 217 a 225

UN TEOREMA DE MECANICA ESTADISTICA RELATIVISTA Y LOS ESPACIOS DE HILBERT-LOBATSCHEWSKY

Dario Maravall Casesnoves

Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid.
c/ Valverde 22. 28013 Madrid.

Se expone la geometría diferencial del espacio de las velocidades relativistas y se obtiene la función de distribución de velocidades de un gas de partículas relativistas, que modifica la función de Maxwell de Mecánica Estadística Clásica. Se introducen los espacios de Hilbert-Lobatschewsky.

Palabras clave: Mecánica Estadística Relativista; Espacios deHilbert-Lobatschewsky.

Clasificación AMS (1980): Primaria, 60K35.

A Theorem of the Relativistic Statistical Mechanics and the Hilbert-Lobatschewsky Spaces

The differential geometry of the relativistic velocities space is presented and the distribution function of the velocities of the relativistic particles of gas is obtained. This distribution function modifies the Maxwell function of the Classical Statistical Mechanics. The Hilbert-Lobatschewsky spaces are introduced.

Key words: Relativistic Statistical Mechanics; Hilbert-Lobatschewsky Spaces.

AMS Classification (1980): Primary, 60K35.

1. EL ESPACIO DE LOBATSCHEWSKY DE LAS VELOCIDADES RELATIVISTAS

La ley clásica de la composición de velocidades paralelas es:

$$v_{12} = v_1 + v_2 \tag{1}$$

donde v_1 y v_2 son las velocidades que se suman o componen, y v_{12} la velocidad resultante. Si en (1) hacemos la sustitución:

$$v_{12} = ds; \quad v_1 = -v; \quad v_2 = v + dv \tag{2}$$

se obtiene:

$$ds = dv \tag{3}$$

que expresa que el espacio unidimensional de las velocidades clásicas rectilineas tiene la estructura métrica de la recta euclidea.

La ley relativista de la composición de velocidades parelelas de Einsten es:

$$v_{12} = (v_1 + v_2) / (1 + v_1 v_2 / c^2) \tag{4}$$

y si en ella efectuamos la sustitución (2) se obtiene:

$$ds = dv / (1 - v^2/c^2) \tag{5}$$

que muestra que la métrica del espacio unidimensional de las velocidades relativistas paralelas no es euclidea, es la de la recta de Lobatschewsky (veáse el 4).

Para las velocidades clásicas en cualquier número de dimensiones, la ley de composición es:

$$\mathbf{v}_{12} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \tag{6}$$

y si en ella efectuamo la sustitución:

$$|\mathbf{v}_{12}| = ds; \quad \mathbf{v}_1 = -\mathbf{v}; \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{v} + d\mathbf{v} \tag{7}$$

se obtiene:

$$ds = |d\mathbf{v}| \tag{8}$$

que es una métrica euclidea.

A la ley composición de velocidades relativistas de Einsten se le puede dar la forma:

$$|\mathbf{v}_{12}|^2 = (|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2|^2 - |\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2|^2/c^2) / (1 + (\mathbf{v}_1 . \mathbf{v}_2/c^2))^2 \tag{9}$$

válida para cualquier número de dimensión. Haciendo en (9) la sustitución (7) se obtiene:

$$ds^2 = \left(|dv|^2 - |v \wedge dv|^2/c^2 \right) / \left(1 - |v|^2/c^2\right)^2 \tag{10}$$

Como se cumple que:

$$|v_1|^2 |v_2|^2 = (v_1 . v_2)^2 + |v_1 \wedge v_2|^2 \tag{11}$$

a (9) se le puede dar la forma:

$$|v_{12}|^2 = \left(|v_1 + v_2|^2 - \left(|v_1|^2 |v_2|^2 - (v_1 . v_2)^2 \right)/c^2 \right) / \left(1 + v_1 . v_2/c^2\right)^2 \tag{12}$$

y si en ésta efectuamos la sustitución (7), se obtiene:

$$ds^2 = \left(|dv|^2 - \left(|v|^2 |v + dv|^2 - (v.(v + dv))^2\right)/c^2 \right) / \left(1 - |v|^2/c^2\right)^2 \tag{13}$$

y como:

$$|v + dv|^2 = |v|^2 + |dv|^2 + 2\, v.dv$$

$$v.(v + dv) = |v|^2 + v.dv \tag{14}$$

es también:

$$|v + dv|^2 |v|^2 = |v|^4 + |v|^2 |dv|^2 + 2|v|^2 (v.dv)$$

$$(v.(v + dv))^2 = |v|^4 + 2|v|^2 (v.dv) + (v.dv)^2 \tag{15}$$

y de aquí la (13) es igual a:

$$ds^2 = \left(|dv|^2 (1 - |v|^2 / c^2) + (v.dv)^2 / c^2 \right) / \left(1 - |v|^2 / c^2\right)^2 \tag{16}$$

La (10) y (16) son iguales. En el caso de dos dimensiones si v_1 y v_2 son las coordenadas cartesianas de v, y v, φ son sus coordenadas polares es:

$$v_1 = v \cos\varphi; \qquad v_2 = v \,\mathrm{sen}\,\varphi; \qquad v^2 = v_1^2 + v_2^2 = |v|^2 \tag{17}$$

y la (10) por ser:

$$|d\mathbf{v}|^2 = dv^2 + v^2\, d\varphi^2; \qquad |\mathbf{v} \wedge d\mathbf{v}| = v^2\, d\varphi \tag{18}$$

se escribe:

$$ds^2 = (\, dv^2 / (1 - v^2 / c^2)^2\,) + (\, v^2\, d\varphi^2 / (1 - v^2 / c^2)\,) \tag{19}$$

que es la métrica del plano Lobatschewskiano. Al ds (diferencial de longitud) (19) corresponde la diferencial de area dV:

$$dV = v\, dv\, d\varphi / (1 - v^2 / c^2)^{3/2} \tag{20}$$

en coordenadas polares y:

$$dV = dv_1\, dv_2 / (1 - v^2 / c^2)^{3/2} \tag{21}$$

en coordenadas cartesianas.

En el caso de tres dimensiones, en coordenadas esféricas v, θ, φ si v_1, v_2, v_3 son las coordenadas cartesianas, se tiene:

$$v_1 = v \operatorname{sen}\theta \cos\varphi; \qquad v_2 = v \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi; \qquad v_3 = v \cos\theta \tag{22}$$

como es:

$$\begin{aligned} |d\mathbf{v}|^2 &= dv^2 + v^2(\, d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2\,) \\ |\mathbf{v}|^2 &= v^2 \\ \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} &= v\, dv \end{aligned} \tag{23}$$

la (16) se escribe:

$$ds^2 = dv^2 / (1 - v^2/c^2)^2 + v^2 (\, d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2\,) / (1 - v^2/c^2) \tag{24}$$

que es la métrica del espacio tridimensional de Lobatschewsky. El elemento diferencial de volumen dV que corresponde al ds (24) es el:

$$dV = v^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\varphi / (1 - v^2 / c^2)^2 = dv_1 dv_2 dv_3 / (1 - v^2/c^2)^2 \tag{25}$$

el primero en coordenadas esféricas y el segundo en cartesianas.

2. LA DISTRIBUCION ESTADISTICA DE VELOCIDADES EN UN GAS RELATIVISTA

La energía total de una partícula relativista de masa m y velocidad v es:

$$E = mc^2 / (1 - v^2 / c^2)^{1/2} \tag{26}$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío.

Como la función de densidad de la distribución estadística de partículas de energía E es:

$$A e^{-E/kT} dV \tag{27}$$

siendo A un coeficiente de normalización, k, la constante de Boltzmann, T la temperatura absoluta y dV el el elemento diferencial de volumen del espacio de las velocidades, se tiene que en una dimensión es:

$$A_1 e^{-\delta} dv /(1- v^2 / c^2) \tag{28}$$
$$\delta = mc^2 / kT(1- v^2/c^2)^{1/2}$$

en dos dimensiones:

$$A_2 e^{-\delta} dv_1 dv_2 / (1 - v^2/c^2)^{3/2} \tag{29}$$

y para el módulo de la velocidad:

$$B_2 e^{-\delta} v \, dv / (1- v^2/c^2)^{3/2} \tag{30}$$

donde B_2 es el nuevo coeficiente de normalización.

En tres dimensiones es:

$$A_3 e^{-\delta} dv_1 dv_2 dv_3 / (1 - v^2/c^2)^2 \tag{31}$$

y para el módulo de la velocidad:

$$B e^{-\delta} v^2 dv / (1 - v^2/c^2)^2 \tag{32}$$

Como la diferencia entre la energía total y la másica es:

$$mc^2 / (1 - v^2/c^2)^{1/2} - mc^2 \tag{33}$$

se puede sustituir el exponente (26) en todas las fórmulas anteriores por el (33) porque $e^{-\rho}$ ($\rho = mc^2$) queda absorbido por el coeficiente de normalización. Y como el límite de (33) para c tendiendo a infinito es:

$$mv^2 / 2 \tag{34}$$

se sigue que todas las fórmulas anteriores cuando c tiende a infinito, tienden a las de Maxwell de la mecánica estadística clásica.

Las fórmulas (9) a (16) son invariantes para las rotaciones (transformaciones ortogonales de coordenadas) pero no para las traslaciones.

3. CASO DE N DIMENSIONES

En el caso de n dimensiones, si $v_1,...,v_n$ son las n coordenadas cartesianas, en coordenadas esféricas el ds se escribe:

$$ds^2 = dv^2 / (1 - v^2 / c^2)^2 + v^2 d\sigma^2 / (1 - v^2 / c^2) \tag{35}$$

siendo $d\sigma$ el elemento diferencial de distancia ds sobre la superficie esférica enedimensional de radio la unidad, porque las últimas (23) se conservan y la primera es ahora:

$$|dv|^2 = dv^2 + v^2 d\sigma^2 \tag{36}$$

El elemento diferencial de volumen dV correspondiente al ds (35) es:

$$dV = v^{n-1} dv\, dW / (1 - v^2/c^2)^{(n+1)/2} \tag{37}$$

donde dW es el elemento diferencial de volumen sobre la superficie esférica enedimensional de radio la unidad. En coordenadas cartesianas es:

$$dV = dv_1,...,dv_n / (1 - v^2/ c^2)^{(n+1)/2} \tag{38}$$

El ds (35) corresponde a la métrica del espacio enedimensional de Lobastschewsky. Cualquiera que sea el número de dimensiones, la fórmula (10) se escribe también:

$$v_{12}^2 = (v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 \cos\alpha - (v_1^2 v_2^2 \operatorname{sen}^2\alpha / c^2)) / (1 + v_1 v_2 \cos\alpha / c^2) \qquad (39)$$

empleando las mismas letras para los vectores que para sus módulos. El ángulo α es el que forman entre si los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$. Si en (39) hacemos $v_2 = c$, resulta:

$$v_2 = c \Rightarrow v_{12} = c; \quad \forall v_1 \qquad (40)$$

De (9) o (12) se sigue que:

$$\mathbf{v}_1 = -\mathbf{v}_2 \Rightarrow v_{12} = 0 \qquad (41)$$

Vamos a demostrar que se cumple también la implicación en sentido inverso:

$$v_{12} = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_1 = -\mathbf{v}_2 \qquad (42)$$

Para ello se tiene que el numerador de la (39) cuando v_1 es fijo, es mínimo o máximo si:

$$\begin{aligned} &\partial/\partial v_2(\,) = 2(v_2 + v_1 \cos\alpha - (v_1^2 v_2 \operatorname{sen}^2\alpha)/c^2) = 0 \\ &\partial/\partial\alpha(\,) = -2 v_1 v_2 \operatorname{sen}\alpha\,(1 + (v_1 v_2/c^2)\cos\alpha) = 0 \end{aligned} \qquad (43)$$

por el paréntesis indicamos el numerador de (39).

Como:

$$0 < v_1 < c; \quad 0 < v_2 < c; \quad \partial/\partial\alpha(\,) = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = 0 \qquad (44)$$

y la primera (43), por ser v_1 y v_2 positivas, da:

$$(v_1 = v_2; \ \cos\alpha = -1) \Rightarrow \mathbf{v}_1 = -\mathbf{v}_2 \qquad (45)$$

que es el mínimo, por ser v_{12} no negativa, se sigue que:

$$v_{12} = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_1 = -\mathbf{v}_2 \qquad (46)$$

que demuestra (42).

Obsérvese que (10)= (12)= (39) son simétricas respecto a v_1 y v_2.

4. EL ESPACIO DE HILBERT-LOBATSCHEWSKY

Las fórmulas (12) y (39) se extienden al espacio de Hilbert. Llamamos bola lobatschewskiana abierta, de centro a y radio r, al conjunto de puntos x del espacio de Hilbert, tales que:

$$(x,a)^2 = (|x - a|^2 - (|x|^2 |a|^2 - \langle x,a\rangle^2) / c^2) /(1- \langle x,a\rangle /c^2)^2 < r^2 \qquad (47)$$

Llamamos espacio de Hilbert-Lobatschewsky al conjunto de puntos del espacio de Hilbert interiores a la bola de radio c, dotado de la topología de las bolas lobatschewskianas, es decir que:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a \iff \forall \varepsilon>0, \quad \exists N \mid \forall n > N: (x_n,a) < \varepsilon \qquad (48)$$

La fórmula (47) es también válida para el espacio de Hilbert complejo, si sustituimos el producto interno por su módulo:

$$\langle x,a\rangle \to |\langle x,a\rangle| \qquad (49)$$

En el caso particular en que el espacio de Hilbert sea R^n la (47) coincide con la (12). En el caso en que el espacio de Hilbert sea R, la (47) que se escribe:

$$(x,a) = |x - a| / (1- xa / c^2) \qquad (50)$$

es una distancia. Llamamos recta de Lobatschewsky al conjunto de números reales de valores absolutos inferior a c, dotados de la distancia (50).

Así como la distancia según la norma en el espacio de Hilbert es invariante para las traslaciones, la (47) para el espacio de Hilbert-Lobatschewsky no lo es, pero en cambio si es invariante para los operadores unitarios (rotaciones), porque si M es un operador unitario, se tiene que;

$$(|Mx| = |x|; \ \langle Mx,Ma\rangle = \langle x,a\rangle) \Rightarrow (Mx,Ma) = (x,a) \qquad (51)$$

Obsérvese que los puntos de la frontera del espacio de Hilbert-Lobastschewsky, es decir aquellos para los que la norma es igual a c, gozan de la propiedad de que su sustitución en (47) como x para cualquier a del mismo dan siempre el mismo valor c^2, por lo visto en el &3.

Conclusiones. Las expresiones intrínsecas (9) y (12) de la ley de composición de velocidades de Einstein, permite generalizarla a cualquier número de dimensiones del espacio, incluso al de Hilbert, y a espacios complejos, y definir el nuevo espacio de Hilbert-Lobatschewsky.

La aplicación de estos resultados que hemos hecho en el &2 permiten obtener la modificación de la función de distribución de las velocidades de las moléculas de un gas ideal de Maxwell de la mecánica estadística clásica, para el caso de un gas de partículas de velocidades muy altas, y establecer los fundamentos de una mecánica estadística relativista.