HOMENAJE AL PROFESOR SIXTO RIOS
TRABAJOS DE ESTADISTICA Y DE INVESTIGACION OPERATIVA
Vol. 36, Núm. 3, 1985, pp. 177 a 183

UNA MEJORA DEL METODO ITERATIVO DE BROWN PARA RESOLVER JUEGOS MATRICIALES

Eusebio Gómez Sánchez-Manzano

Depto. de Estadística e I.O. Facultad de Matemáticas. Universidad Complutense. 28040 Madrid.

Este trabajo presenta una mejora del conocido método iterativo, propuesto por Brown (1951), y cuya validez fue demostra por Robinson (1951), para resolver juegos matriciales mediante el desarrollo ficticio de una serie de partidas del juego.

La mejora consiste en dotar al método de una mayor flexibilidad en la elección del punto inicial del algoritmo.

Palabras Clave: Juegos matriciales; Estrategia aleatorizada; Nivel de seguridad; Valor.

Clasificacion AMS (1980): Primaria, 90D05; Secundaria, 65C20.

An Improvement in Brown's Iterative Method to solve Matrix Games

Brown's fictitious play method is endowed with a greater flexibility in the choice of its starting point.

Key words: Matrix game; Mixed strategy; Security level; Value.

AMS Classification (1980): Primary, 90D05; Secondary, 65C20.

1. INTRODUCCION

En las presentaciones usuales del algoritmo de Brown para resolver juegos matriciales, el punto de partida del proceso del consiste simplemente en la elección de una estrategia pura por parte de cada uno de los jugadores (véase McKinsey (1967), p. 92 y Owen (1968), p. 31 y 36) ó al menos por parte de uno de ellos (véase Brown (1951) y Luce y Raiffa (1957), p. 442), sin hacer previamente ninguna conjetura acerca del modo de jugar de su oponente, y sin tener ninguna idea preconcebida, fruto de la reflexión propia o de experiencias anteriores, acera de cuál va a ser o debería ser este modo de jugar de su contrario.

La demostración de Robinson (1951) supone una cierta ampliación formal de estas presentaciones usuales en cuanto que admite la existencia inicial de unos datos que podrían considerarse, con alguna aproximación, como "valores acumulados previos"; cuando estos valores previos son todos nulos se obtiene el proceso en su presentación usual.

La ampliación que presentamos en este trabajo tiene otro sentido: se supone que al iniciarse el proceso cada uno de los jugadores formula una conjetura acerca de cuál va a ser el modo de jugar de su oponente. Estas conjeturas constituyen el punto de partida del proceso. Sobre ellas se irá acumulando la información obtenida posteriormente, que las irá mejorando paulatinamente.

En la demostración de la convergencia del proceso desde este nuevo punto de partida se aprovecha la existencia de los "valores previos" introducidos por Robinson en su demostración.

Aunque la exposición formal del nuevo punto de partida se encuentra en los párrafos que siguen, puede ser conveniente hacer ahora una presentación intuitiva del mismo. Este nuevo punto inicial puede ser contemplado desde dos puntos de vista: uno estático y otro histórico o temporal.

Desde el punto de vista estático, hemos de considerar que cada jugador comienza suponiendo que su contrario va a jugar una determinada estrategia aleatorizada. La observación del comportamiento de su oponente a lo largo del proceso le sirve para ir modificando esta estrategia supuesta, tal como se indica más adelante.

Una particularidad de este planteamiento consiste en que cada jugador puede ponderar a su gusto la estrategia supuesta inicialmente, de modo que la haga más o menos inerte o ligera frente a la información que vaya recibiendo. (Para hacerla más inerte tiene que aumentar proporcionalmente todas las componentes del vector inicial s^0 o t^0, que introducimos en el epígrafe siguiente, y para hacerla más ligera tiene que disminuirlas).

Desde el punto de vista histórico o temporal, suponemos que cada jugador comienza fingiendo que se ha jugado ya un determinado número de partidas (no necesariamente el mismo número para los dos jugadores), y fingiendo también el número de veces que su oponente ha jugado cada una de sus estrategias puras. (Sin embargo, en el desarrollo formal no imponemos que estos números sean enteros).

Esta ficción equivale a situar a cada jugador en un estadio hipotético, factible o no, del desarrollo del proceso de Brown en su modo usual. A partir de aquí el proceso continúa según el modo convencional.

El método usual puede obtenerse como un caso particular del que presentamos en este apéndice. Para ello hay que tomar unos vectores iniciales s^0 y t^0 que tengan una componente igual a uno y las demás iguales a cero. Este procedimiento quiere decir, desde el punto de vista que hemos llamado estático, que cada jugador supone para su contrario una estrategia pura y adjudica a esta estrategia la misma ponderación que a cada uno de los elementos de información que va a ir recibiendo en cada partida. Desde el punto de vista temporal, equivale a fingir que se ha jugado una partida.

Otra manera de obtener el método usual, si bien aproximadamente, consiste en hacer que las componentes de los vectores s^0 y t^0 sean muy pequeñas. Esto equivale, desde el punto de vista estático, a otorgar muy poca poderación a las estrategias supuestas inicialmente. Desde el punto de vista temporal no tiene una interpretación afortunada ya que obligaría a suponer que se ha jugado un núnero de partidas menor que uno y muy próximo a cero.

La consecuencia práctica del método que presentamos es inmediata: el investigador que pretenda resolver un juego no se ve obligado a iniciar el algoritmo con estrategias puras, sino que puede partir de estrategias que considere cercanas a las óptimas o, en último caso, de estrategias uniformes si se siente animado de "espíritu minimaxista".

2. ELEMENTOS MATEMATICOS DEL PROCESO

Partimos de un juego matricial $\Gamma(A) = \{ I_m, I_n, A \}$. Si $x = (x_1,...,x_m)$ e $y = (y_1,...,y_n)$ representan estrategias aleatorizadas de J_1 y J_2, respectivamente, e i y j representan elementos de I_m e I_n, respectivamente, se aceptan las siguientes definiciones y notaciones:

$$M(x,y) = \Sigma_i \Sigma_j x_i a_{ij} y_j$$

$$M(x, j) = \Sigma_i x_i a_{ij}$$

$$M(i, y) = \Sigma_j a_{ij} y_j$$

$$\lambda(x) = \min_{y \in Sn} M(x, y)$$

$$\mu(y) = \max_{x \in Sm} M(x, y)$$

siendo S_m y S_n los conjuntos de estrategias aleatorizadas de J_1 y de J_2, respectivamente. Recordemos, a partir de la teoría de juegos matriciales, que

$$\lambda(x) = \min_{j \in In} M(x, j)$$

$$\mu(y) = \max_{i \in Im} M(i,y)$$

$$\lambda(x) \leq M(x, y) \leq \mu(y)$$

$$\max_{x \in Sm} \lambda(x) = \min_{y \in Sn} \mu(y) = v$$

siendo v el valor del juego.

Sean $s^0 = (s_1^0,...,s_m^0)$ y $t^0 = (t_1^0,...,t_n^0)$ una m-tupla y una n-tupla de números reales no negativos tales que

$$\sigma = \Sigma_i s_i^0 > 0 \quad y \quad \tau = \Sigma_j t_j^0 > 0$$

A partir de s^0 y t^0 se definen por recurrencia las sucesiones

$$\{s^k\}, \{t^k\}, \{x^k\}, \{y^k\}, \{i_k\}, \{j_k\}$$

donde, para todo k, s^k y t^k son una m-tupla y una n-tupla similares a s^0 y t^0, x^k e y^k son estrategias aleatorizadas del primero y del segundo jugador, e i_k y j_k son estrategias puras de los jugadores, del siguientes modo:

a) $x_i^k = s_i^k / \Sigma_l s_l^k, \quad \forall \ i \in I_m$

$y_j^k = t_j^k / \Sigma_l t_l^k, \quad \forall \ j \in I_n$

b) i_k es un elemento de I_m que maximiza en i la función $M(i, y^k)$, es decir, tal que

$$M(i_k, y^k) = \mu(y^k)$$

y j_k es un elemento de I_n que minimiza en j la función $M(x^k, j)$, es decir, tal que $M(x^k, j_k) = \lambda(x^k)$

c) $s_{i(k)}^{k+1} = s_{i(k)}^{k} + 1$ y $s_i^{k+1} = s_i^k, \quad \forall\ i \in I_m - \{i_k\}$

$t_{j(k)}^{k+1} = {}'t_{j(k)}^{k} + 1$ y $t_j^{k+1} = t_j^k, \quad \forall\ j \in I_n - \{j_k\}$

Obsérvse que, para todo valor de k, se tiene

$$\Sigma_i s_i^k = \Sigma_i s_i^0 + k = \sigma + k \tag{1}$$

$$\Sigma_j t_j^k = \Sigma_j t_j^0 + k = \tau + k \tag{2}$$

y $\quad x^k = s^k / (\sigma + k) \qquad y^k = t^k / (\tau + k)$

3. TEOREMA DE CONVERGENCIA

En este apartado presentamos un teorema que pone de manifiesto la convergencia del algoritmo.

Teorema. $\lim_{k \to \infty} \lambda(x^k) = \lim_{k \to \infty} \mu(y^k) = v$

Demostración . Para todo número natural k definimos los vectores

$$u^k = (u_1^k, \ldots, u_n^k) \qquad v^k = (v_1^k, \ldots, v_m^k)$$

de R^n y R^m, respectivamente, del siguiente modo:

$$u_j^k = (\sigma + k)\ M(x^k, j) + C, \quad \forall\ j \in I_n \tag{3}$$

siendo

$$C = \tau\, \mu(y^0) - \sigma\, \lambda(x^0),$$

$$v_i^k = (\tau + k)\ M(i, y^k), \quad \forall\ i \in I_n \tag{4}$$

Unas expresiones alternativas de u_j^k y de v_i^k son

$$u_j^k = \Sigma_i s_i^k a_{ij} + C$$

$$v_i^k = \Sigma_j t_j^k a_{ij}$$

Las sucesiones $\{u^k\}$ y $\{v^k\}$ forman un sistema vectorial para A según la definición dada por Robison (1951). En efecto, la primera condición de esta definición se cumple, ya que

$$\min_{j \in In} u_j^0 = \sigma \lambda(x^0) + C = \tau \mu(y^0) = \max_{i \in Im} v_i^0$$

y también se cumple la segunda condición ya que, por una parte, tenemos que el valor de i que maximiza v_i^k es precisamente i_k, con lo que

$$u_j^{k+1} = \Sigma_i s_i^{k+1} a_{ij} + C = \Sigma_i s_i^k a_{ij} + a_{i(k)j} + C = u_j^k + a_{i(k)j}$$

y $\quad u^{k+1} = u^k + A_{i(k)\cdot}$

donde $A_{i(k)\cdot} = (a_{i(k)1},\dots,a_{i(k)n})$ y, por otra parte, tenemos, análogamente, que el valor de j que minimiza u_j^k es j_k, con lo que

$$v_i^{k+1} = \Sigma_j t_j^{k+1} a_{ij} = \Sigma_j t_j^k a_{ij} + a_{i j(k)} = v_i^k + a_{i j(k)}$$

y $\quad v^{k+1} = v^k + A_{\cdot j(k)}$

siendo $A_{\cdot j(k)} = (a_{1 j(k)},\dots,a_{m j(k)})$.

Aplicando el teorema de Robinson se tiene que

$$\lim_{k\to\infty} \{ (\min_{j \in In} u_j^k) / k\} = \lim_{k\to\infty} \{ (\max_{i \in Im} v_i^k) / k\} = v.$$

Ahora bien, de (1) y de (3) se tiene que

$$M(x^k, j) = (u_j^k - C) / (\sigma + k) = (u_j^k / k)(k / (\sigma + k)) - (C / (\sigma + k))$$

luego

$$\lambda(x^k) = (\min j \in I_n u_j^k / k)(k / (\sigma + k)) - (C / (\sigma + k))$$

y $\quad \lim_{k \to \infty} \lambda(x_k) = \lim_{k \to \infty} \{ (\min j \in I_n u_j^k) / k \} = v.$

Análogamente, de (2) y de (4) se tiene que

$$M(i,y^k) = (v_i^k / (\tau + k)) = (v_i^k / k) (k / (\tau + k))$$

luego

$$\mu(y^k) = (\max_{i \in Im} v_i^k / k) (k / (\tau + k))$$

y $\quad \lim_{k \to \infty} \mu(y_k) = \lim_{k \to \infty} \{ (\max i \in I_m v_i^k) / k \} = v.$

Con esto queda demostrado el teorema.

REFERENCIAS

BROWN, G.W. (1951). "Iterative solutions of games by fictitious play". Incluido en Koopmans, p. 374-376.

LUCE, R.D. y H. RAIFFA. (1957) Games and Decisions. Wiley, Nueva York.

McKINSEY, J.C.C. (1967). Introducción a la Teoría Matemática de los Juegos. Aguilar, 2a. ed. Madrid.

OWEN, G. (1968). Game Theory , Saunders, Filadelfia.

ROBINSON, J. (1951). "An iterative method of solving a game". *Annals of Mathematics*, **54**, 296-301.