HOMENAJE AL PROFESOR SIXTO RIOS
TRABAJOS DE ESTADISTICA Y DE INVESTIGACION OPERATIVA
Vol. 36, Núm. 3, 1985, pp. 165 a 176

SOBRE ADMISIBILIDAD Y CASI ADMISIBILIDAD

Javier Girón y Lina Martínez

Departamento de Estadística. Facultad de Ciencias. Universidad de Málaga. Campus de Teatinos s/n. 29071 Málaga.

La idea de casi-admisibilidad, esto es, admisibilidad salvo conjuntos de medida nula, se extiende a situaciones más generales que las hasta ahora consideradas. Se estudia el problema de su existencia y la relación con una subclase de las reglas de Bayes; en particular su relación con la regla de Cromwell. La idea de soporte de una distribución se extiende a esta nueva situación y se relaciona con el concepto clásico de soporte y otros conceptos como el de regularidad.

Palabras Clave: Admisibilidad; Casi-admisibilidad; Regla de Cromwell; Soporte.

Clasificación AMS (1980): Primaria, 62C15; Secundaria, 62C10.

On admissibility and almost-admissibility

The notion of almost-admissibility, i.e., admissibility up to sets of zero measure, is extended to more general situations than those hitherto considered. The problem of existence of almost-admissible rules and the relation to a subclass of Bayes rules is dealt with in the paper; in particular, we stress its connection with Cromwell's Rule. The idea of support of a probability distribution is extended as well, and its relation to the classic concept of support and the new concept of regularity is also discussed.

Key words: Admissibility; Almost-admissibility; Cromwell's rules; Support.

AMS Classification (1980): Primary, 62C15; Secondary, 62C10.

1. INTRODUCCION

La relación que existe entre las reglas de decisión admisibles y las reglas de Bayes correspondientes a un problema de decisión estadístico depende, en gran medida, de los elementos del problema de decisión, en particular, de la estructura del espacio paramétrico Ω (finito, espacio topológico, espacio medible, etc.) y del comportamiento de la función de riesgo (continuidad, convexidad respecto del parámetro $\theta \in \Omega$, etc).

Si $\mathbf{P} = (\Omega, D, R)$ es un problema de decisión y designamos por $\mathbf{B}^+(\mathbf{P})$ la clase de las reglas de Bayes respecto de distribuciones de probabilidad cuyo soporte sea todo Ω, por $\mathbf{B}(\mathbf{P})$ la clase de todas las reglas de Bayes y por $\mathbf{A}(\mathbf{P})$ la clase de las reglas de decisión admisibles, el resultado global

$$\mathbf{B}^+(\mathbf{P}) \subset \mathbf{A}(\mathbf{P}) \subset \overline{\mathbf{B}^+(\mathbf{P})} \subset \mathbf{B}(\mathbf{P})$$

donde —— representa la adherencia respecto de una topología adecuada en D, sólamente es válido bajo ciertas condiciones (véase, p.e., Blackwell and Girshick (1954) para el caso finito y Girón (1975) para el caso más general).

Alguna de las inclusiones es válida en condiciones más generales. Así si Ω es un espacio topológico que admite distribuciones de probabilidad cuyo soporte sea todo el espacio Ω, la función de riesgo es continua en θ para todo $d \in D$ y el riesgo de Bayes existe y es finito, entonces $\mathbf{B}^+(\mathbf{P}) \subset \mathbf{A}(\mathbf{P})$ (Blyth (1951)).

Este resultado no exige condición alguna de convexidad de la función de riesgo ni del conjunto de riesgo.

Condiciones bajo las cuales la función de riesgo es continua pueden verse en Ferguson (1967), Berger (1980) y Ríos (1981). Estas no incluyen, sin embargo, a casos que se presentan con frencuencia en la práctica cuando o bien la función de pérdida es discontinua o bien el espacio muestral depende del epacio paramétrico.

La importancia del teorema de Blyth está precisamente en el hecho de que es un criterio de fácil comprobación aunque, como contrapartida, supone fuertes exigencias en la estructura de Ω (espacio topológico, y de la función de riesgo (continuidad en θ).

Una noción menos restrictiva que la de *admisibilidad* es la de *casi-admisibilidad,* que ha sido considera en la literatura por Karlin (1958), Katz (1961), Farrel (1964), Ferguson (1967) y Zacks (1970) entre otros, en relación con ciertos problemas de estimación bajo pérdida cuadrática, cuando el espacio muestral depende del espacio paramétrico, y que, esencialmente equivale a la admisibilidad salvo conjuntos de medida nula.

En este artículo nos limitaremos a estudiar generalizaciones de la inclusión $\mathbf{B}^+(\mathbf{P}) \subset \mathbf{A}(\mathbf{P})$ dejando de lado el problema de cuándo las decisiones casi-admisibles son Bayes. En la sección 2 analizaremos el concepto de casi-admisibilidad en un contexto general, dando condiciones suficientes para su existencia, y lo relacionamos con la regla de Cromwell. En la sección 3 presentamos resultados que relacionan los conceptos de casi-admisibilidad y regla de Cromwell generalizada con los conceptos correspondientes al caso de espacios topológicos.

2. CASI-ADMISIBILIDAD. EXISTENCIA Y RELACION CON LA REGLA DE CROMWELL.

Sea (Ω, D, R) un problema de decisión en el que $(\Omega, \mathbf{B})$ es un espacio medible y $R(\theta, d)$ es la función de riesgo que supondremos acotada y $\mathbf{B}$-medible en θ para todo $d \in D$.

Sea μ una medida σ-finita definida sobre $(\Omega, \mathbf{B})$, de modo que los conjuntos de $\mathbf{B}$ μ-nulos son irrelevantes al problema de decisión que estamos considerando.

La introducción de μ en la formulación del problema de decisión conduce inmediatamente a las dos definiciones siguientes, la primera de las cuales generaliza el concepto de admisibilidad y la segunda contempla el aspecto Bayesiano del problema de decisión.

Definición 2.1. $d_0 \in D$ es una regla de decisión *casi-admisible* para el problema (Ω, D, R) si de ser $R(\theta,d) \leq R(\theta,d_0)$ para todo $\theta \in \Omega$ y para $d \in D$ se deduce que $R(\theta,d) = R(\theta,d_0)$ c.p.d.(μ).

Obsérvese que el concepto de casi-admisibilidad depende de la medida μ; no obstante, cuando no haya peligro de confusión, omitiremos de la definicion la referencia a dicha medida. Además, está claro que si d_0 es admisible, entonces es casi-admisible cualquiera que sea la medida μ.

La segunda definición restringe el espacio de las posibles distribuciones a priori $\mathbf{F}$ definidas sobre $(\Omega, \mathbf{B})$ a aquellas que asignan probabilidad 0 a los conjuntos μ-nulos de $\mathbf{B}$, lo cual parece razonable suponer desde un punto de vista puramente Bayesiano.

Definición 2.2 . $\mathbf{F}(\mu) = \{P \in \mathbf{F}$ tales que $P << \mu\}$.

El teorema de Radon-Nikodym nos asegura la existencia de las correspondientes μ-densidades, de modo que los elementos de $\mathbf{P}(\mu)$ vienen caracteterizados por el subconjunto de $L_1(\Omega, \mathbf{B}, \mu)$ definido por

$$\Omega^*(\mu) = \{ p \in L_1;\ \int_\Omega p(\theta)\, d\,\mu(\theta) = 1;\ \ p(\theta) \geq 0 \text{ c.p.d.}(\mu) \}.$$

Por último conviene destacar de **F** (o de $\mathbf{F}(\mu)$) un subconjunto importante que es el de las distribuciones de probabilidad que satisfacen la llamada regla de Cromwell (Lindley (1982), Girón et. al. (1982)). En general, una distribución de probabilidad satisface la regla de Cromwell si y solamente si tiene los mismos conjuntos nulos que μ, o lo que es equivalente

Definición 2.3. Una distribución a priori P sobre $(\Omega, \mathbf{B})$ satisface la *regla de Cromwell* si es mutuamente absolutamente continua respecto de μ.

Esta definición más abstracta que la dada por Martínez, Caro y Girón (1985) pues no hace referencia a la idea de soporte, se ve fácilmente que es equivalente a la dada por estos autores y, por tanto, la clase de las distribuciones a priori que satisfacen la regla de Cromwell queda caracterizada por el subconjunto de $\Omega^*(\mu)$ definido por

$$\Omega^{*+}(\mu) = \{ p \in \Omega^*(\mu);\ p(\theta) > 0 \ \ \text{c.p.d.}(\mu) \}.$$

Desde el punto de vista técnico es conveniente identificar las reglas de decisión $d \in D$ con los elementos $R(\theta,d)$ del espacio $L_\infty(\Omega, \mathbf{B}, \mu)$, lo que conduce a la definición siguiente, análoga a la usual.

Definición 2.4. El *conjunto de riesgo* del problema (Ω, D, R) es el subconjunto S de $L_\infty(\Omega, \mathbf{B}, \mu)$ definido por

$$S = \{ h \in L_\infty;\ \text{ existe } d \in D \text{ tal que } h(\theta) = R(\theta,d) \ \ \text{c.p.d.}(\mu) \}.$$

Si en $L_\infty(\Omega, \mathbf{B}, \mu)$ se define la relación de orden natural $\geq_d$ por

$$h \geq_d g \quad \text{si y solo si} \quad h(\theta) \leq g(\theta) \quad \text{c.p.d.}(\mu),$$

es evidente su relación con la noción de casi-admisibilidad: Una regla de decisión para el problema (Ω, D, R) es casi-admisible si y solo si es un elemento maximal de $(D, \geq_d)$.

Definición 2.5. El conjunto de L definido por

$$K_0 = \{ h \in L_\infty; \quad h(\theta) \leq 0 \quad \text{c.p.d.}(\mu) \}.$$

se denomina *cono de dominancia.*

Resulta claro de la última definición que h $\geq_d$ g si y solo si h - g $\in K_0$ y que K_0 es un cono convexo y cerrado de L_∞.

De la definición 2.1 se deduce que el conjunto de las reglas de decisión casi-admisibles del problema de decisión **P** son los elementos maximales de (D, $\geq_d$), y los representaremos por $\mathbf{A}_\mu(\mathbf{P})$. Con el fin de evitar duplicaciones en la notación designaremos también por $\mathbf{A}_\mu(\mathbf{P})$ los elementos maximales del conjuntos de riesgo S asociado a **P** respecto de la relación de orden paracial dada por el cono K_0.

Si h $\in$ S, representaremos por $S_h = S \cap (K_0 + h)$ y lo denominaremos la *K_0- sección de S en h,* o simplemente la sección de S en h.

Teorema 2.1. Una condición suficiente para que $\mathbf{A}_\mu(\mathbf{P})$ sea no vacío es que S tenga al menos una sección compacta no vacía.

Demostración. Sea h $\in$ S tal que S_h sea compacta. Consideremos el conjunto S_h con el preorden inducido por K_0. Si demostramos que toda cadena de (S_h, $\geq_d$) admite una cota superior, una simple aplicación del lema de Zorn demostraría que existe un elemento maximal en (S_h, $\geq_d$). Además, como todo elemento maximal de (S_h, $\geq_d$) lo es de (S, $\geq_d$) como es fácil de comprobar, tendríamos que $\mathbf{A}_\mu$(P) $\neq \phi$.

Sea C una cadena de (S_h, $\geq_d$). Todo elemento f $\in \cap_{g \in C} S_g$ es una cota superior de la cadena, y además tal elemento existe puesto que la familia $\{S_g\}_{g \in C}$ es una familia de subconjuntos compactos no vacíos de S_h (por ser K_0 cerrado) con la propiedad de la intersección finita.

Nótese que en la demostración sólamente se ha utilizado la hipótesis de que K_0 es un cono convexo y cerrado, por lo que la demostración sigue siendo válida para los preórdenes generados por dicha clase de conos. (Véase, p.e., Borwein (1983) para una demostración general de este resultado).

Definición 2.6. Al conjunto de reglas de decisión que son Bayes respecto de las distribuciones a priori de F(μ) (F$^+$(μ)) las representaremos por $\mathbf{B}_\mu(\mathbf{P})$ ($\mathbf{B}_\mu^+(\mathbf{P})$).

Si $P \in \mathbf{F}(\mu)$ y designamos por $H_p = \{h \in L_\infty; \int h\, dP \le 0\}$, H_p es un semiespacio cerrado de L_∞ y por lo tanto un cono convexo y cerrado. Los elementos maximales de D, o bien de S, respecto del preorden (en este caso completo) dado por el cono H_p son precisamente las reglas de Bayes del problema **P** respcto de la distribución a priori P.

Particularizando el teorema anterior al caso Bayesiano, tenemos una condición suficiente para la existencia de las clases $\mathbf{B}_\mu(\mathbf{P})$ o $\mathbf{B}_\mu^+(\mathbf{P})$.

Corolario 2.1. Una condición suficiente para que la clase $\mathbf{B}_\mu(\mathbf{P})$ ($\mathbf{B}_\mu^+(\mathbf{P})$) sea no vacia es que S admita una H_p-sección no vacía para algún $P \in \mathbf{F}(\mu)$ ($\mathbf{F}^+(\mu)$).

Consideremos el siguiente ejemplo tomado de De Groot (1970).
Sea $\Omega = \{\theta_1, \theta_2, ...\}$; $D = \{d_0, d_1, d_2, ...\}$; y $R(\theta, d)$ dada por la matriz siguiente

	θ_1	θ_2	θ_3	...
d_0	1/2	1/2	1/2	...
d_1	0	1	1	...
d_2	0	0	1	...
.	.	.	.	...
.	.	.	.	...

y sea μ la medida contadora sobre $\mathbf{P}(\Omega)$. Obsérvese en este ejemplo que las nociones de admisibilidad y casi-admisibilidad coinciden; así como que $F(\mu)$ ($F^+(\mu)$) coincide con el conjunto de todas las distribuciones a priori (que satisfacen la regla de Cromwell). (Véase la sección 3).

El conjunto de riesgo S admite una secciòn K_0-compacta S_{d0} por lo que $\mathbf{A}_\mu(\mathbf{P})$ es no vacía y esta formada exclusivamente por la decisión $\{d_0\}$. Sin embargo S no admite ninguna sección H_p-compacta para *ninguna* distribución a priori $P \in \mathbf{F}(\mu)$. Además es fácil comprobar que $\mathbf{B}_\mu(\mathbf{P}) = \mathbf{B}_\mu^+(\mathbf{P}) = \phi$

Aunque se consideren decisiones aleatorizadas, el resultado sigue siendo válido, es decir $\mathbf{B}_\mu(\mathbf{P'}) = \mathbf{B}_\mu^+(\mathbf{P'}) = \phi$ y $\mathbf{A}_\mu(\mathbf{P'}) = \{d_0\}$ donde **P'** es el problema de decisión resultante de considerar la aleatorización en D.

El resultado siguiente nos proporciona, en primer lugar, otra demostración del teorema de existencia de reglas de decisión casi-admisibles y, en segundo lugar, una relación entre las estrategias de Bayes respecto de distribuciones a priori que satisfacen la regla de Cromwell dentro de nuestro contexto y las reglas de decisión casi-admisibles.

Teorema 2.2. Para todo problema de decisión **P** se verifica que $\mathbf{B}_\mu{}^+(\mathbf{P}) \subset \mathbf{A}_\mu(\mathbf{P})$. Además si el conjunto de riesgo asociado a **P** es compacto, entonces $\mathbf{B}_\mu{}^+(\mathbf{P}) \neq \phi$.

Demostración. Supongamos que $h_0 \in \mathbf{B}_\mu{}^+(\mathbf{P})$. Entonces se tiene que

$$\int h_0 \, dP \leq \int g \, dP \quad \text{para toda} \quad g \in S \quad \text{y para algún} \quad P \in F^+(\mu).$$

Si h no fuese admisible existiría un $g_0 \in S$ tal que $h_0(\theta) \geq g_0(\theta)$ c.p.d.(μ) y $h_0(\theta) > g_0(\theta)$ para todo $\theta \in A$ tal que $\mu(A) > 0$. De aquí y de la desigualdad anterior se deduce que $\int (h_0 - g_0)\, dP = 0$, y como $h_0(\theta) \geq g_0(\theta)$ c.p.d.(P), por tener P y μ los mismos subconjuntos nulos, se deduce que $h_0 = g_0$ c.p.d.(μ). Esta contradicción demuestra la primera parte del teorema.

Si S es compacto, por ser $\int (.)\, dP$ un funcional continuo, se alcanza el ínfimo en algún punto $g_0 \in S$ y, por tanto $\mathbf{B}_\mu{}^+(\mathbf{P}) \neq \phi$.

Corolario 2.1. Si S admite una K_0-sección compacta, S_h, entonces $\mathbf{A}_\mu(\mathbf{P})$ es no vacío.

Demostración. Consideremos el problema de decisión cuyo conjunto de riesgo sea la sección S_h. Por el teorema anterior $\mathbf{A}_\mu(S_h)$ es no vacía y como además toda regla casi-admisible de S_h lo es de S, $\mathbf{A}_\mu(\mathbf{P})$ es no vacio.

Obsérvese que de la demostración anterior *no* se deduce que si S admite una K_0-sección compacta $\mathbf{B}^+(\mathbf{P})$ es no vacío (véase el ejemplo anterior). Resultados referentes a la relación entre $\mathbf{A}_\mu(\mathbf{P})$ y puntos extremos de S pueden verse en Borwein (1983).

Por último señalamos que en la demostración del teorema se supone tácitamente la existencia de al menos una $P \in \mathbf{F}^+(\mu)$. La existencia de distribuciones de probabilidad que satisfacen la regla de Cronwell queda garantizada por el teorema 2.2 de Martínez, Caro y Girón (1985).

3. RELACION CON OTROS CONCEPTOS.

El concepto de soporte de una distribución se asocia, generalmente, con las propiedades topológicas de Ω; este concepto, empero, puede generalizarse al caso de espacios de medida $(\Omega, \mathbf{B}, \mu)$, donde μ es una medida σ-finita, de modo que se conserven casi todas las propiedades que cabe esperar de la idea de soporte de una distribución.

Definición 3.1. Si $P \in F(\mu)$, se dice que $S \in \mathbf{B}$ es un *soporte* de μ si existe una versión de la μ-densidad de $\mathbf{B}$, $p(\theta)$, tal que $S = \{ \theta;\ p(\theta) > 0 \}$.

La idea básica de que en el soporte de una distribución P se "concentra" toda la probabilidad viene recogida en el siguiente resultado, cuya demostración es elemental.

Lema 3.1. Si S es un soporte de P, entonces $P(S)=1$, $P(A)= P(A \cap S)$ para todo $A \in \mathbf{B}$. S es unión numerable de subconjuntos de $\mathbf{B}$ de μ-medida finita. Además, si h es P-integrable, entonces $\int_\Omega h\, dP = \int_S h\, dP$.

El principal problema que presenta la definición anterior es la falta de unicidad del soporte, que depende de la versión de la densidad elegida. El lema siguiente demuestra, sin embargo, que todos los soportes de P pertenecen a la misma clase de equivalencia.

Lema 3.2. Si S y R son dos soportes de P, entonces $\mu(S \vartriangle R)= 0$. Recíprocamente, si S es un soporte de P y R es tal que $\mu(S \vartriangle R)= 0$, entonces R es un soporte de P.

Demostración. Sean p y p' dos versiones de la densidad de P tales que $S = \{ \theta, p(\theta) > 0 \}$ y $R= \{ \theta,\ p'(\theta) > 0\}$. El teorema de Radon Nikodym nos asegura que $\mu\{\theta;p(\theta) \neq p'(\theta)\}= 0$. Por otro lado

$$S \cap R^c = \{ \theta;\ p(\theta) > 0 \text{ y } p'(\theta) = 0 \} \subset \{ \theta;\ p(\theta) \neq p'(\theta) \}$$
$$S^c \cap R = \{ \theta; p(\theta) = 0 \text{ y } p'(\theta) > 0 \} \subset \{\theta;\ p(\theta) \neq p'(\theta) \}$$

de donde

$$\mu(R \vartriangle S) = \mu(S \cap R^c) + \mu(S^c \cap R)= 0 + 0= 0.$$

Para el recíproco supongamos que S es un soporte de P y que $\mu(S \vartriangle R)= 0$. Sea, p.e., $S = \{ \theta; p_0(\theta) > 0 \}$. Si definimos

$p(\theta)= p_0(\theta)$	en	$S \cap R$
$p(\theta)= p'(\theta)$	en	$S^c \cap R$
$p(\theta)= 0$	en	$R^c \cap S^c$
$p(\theta)= 0$	en	$R^c \cap S$

siendo $p'(\theta)$ cualquier función medible estrictamente positiva, está claro que $R= \{\theta; p(\theta) > 0\}$. Sólo queda por demostrar que $p(\theta)$ es una versión de la densidad de P, es decir, que $\mu\{\theta; p_0(\theta) \neq p(\theta)\}= 0$. De la definición de p se deduce que

$$\mu\{\theta; p_0(\theta) \neq p(\theta) = \mu(R \cap S^c) + \mu(R^c \cap S) = \mu(S \vartriangle R)= 0.$$

Como la relación $\mu(A \vartriangle B)= 0$ establece una relación de equivalencia en **B**, el resultado del lema anterior garantiza que todos los soportes de una misma $P \in \mathbf{F}(\mu)$ pertenecen a la misma clase de equivalencia de modo que si en **B** se considera el conjunto cociente, el soporte de P es único.

El lema siguiente caracteriza la regla de Cromwell en términos del sorporte.

Lema 3.3. $P \in \mathbf{F}(\mu)$ satisface la regla de Cromwell si y solo si Ω es el soporte de P.

Demostración. Si $P \approx \mu$, hay que demostrar que existe una versión de la densidad p tal que $p(\theta) > 0$ c.p.d.(μ). En efecto, si existiese un $A \in \mathbf{B}$ con $\mu(A) > 0$ tal que $p(\theta) = 0$ si $\theta \in A$, tendríamos que por un lado $P(A)= \int_A p(\theta)\, d\mu(\theta)= 0$ y por otro lado, por ser $P \approx \mu$, que $P(A) > 0$; contradicción que demuestra la parte "si".

Para la parte "solo si" basta demostrar que si $P(A) = 0$, entonces $\mu(A)= 0$. Por ser Ω el soporte de P existe una versión de su densidad, digamos p, tal que $p(\theta)>0$ para todo $\theta \in \Omega$. Como $P(A)= \int_A p(\theta)\, d\mu(\theta)$ y $p(\theta) > 0$ en A, de aquí se concluye que $\mu(A) = 0$.

Pasamos ahora a examinar brevemente la relación de nuestro concepto de soporte con el usual en el caso de que Ω sea un espacio métrico separable.

Definición 3.2. Si μ es una medida definida sobre un espacio métrico y separable $(\Omega, \mathbf{B})$, se denomia *soporte* de μ, y lo representaremos por sop(μ), al menor conjunto cerrado S tal que $\mu(S^c) = 0$. En particular si P es una medida de probabilidad, sop(P) es el menor conjunto cerrado de probabilidad 1.

Teorema 3.1. Bajo las hipótesis del teorema anterior el soporte de μ siempre existe, es único y además $\theta \in$ sop(μ) si y solo si $\mu(U) > 0$ para todo abierto U que contenga a θ.

La demostración es análoga a la de Parthasarathy (th. 2.1, p. 27) (1967). Como hemos indicado, el soporte de una medida μ según la definición 3.2 lo representaremos por sop(μ) para distinguirlo del de la definición 3.1 que sólo es válido para distribuciones de probabilidad, y hace referencia a una medida fija μ en $(\Omega, \mathbf{B})$.

La relación entre continuidad absoluta y la nueva definición de soporte viene dada por el teorema que sigue.

Teorema 3.2 Si $\upsilon << \mu$, entonces sop(υ) $\subset$ sop(μ).

Demostración. Si $\theta \in$ sop(υ), entonces para todo abierto U que contiene a θ se verifica que $\upsilon(U) > 0$ y esto implica, por la hipótesis, que $\mu(U) > 0$, es decir, $\theta \in$ sop(μ).

Corolario 3.1. Si $\upsilon \approx \mu$, entonces sop(μ) = sop(υ).

Corolario 3.2. Si P satisface la regla de Cromwell y si sop(μ)= Ω, entonces sop(P) = Ω.

No está claro, al menos sin suponer hipótesis adicionales, que el recíproco del corolario 3.2 sea cierto, es decir que el que P << μ y sop(P) = sop(μ) = Ω, impliquen la continuidad absoluta de μ respecto de P.

Otro concepto íntimamente relacionado con la regla de Cromwell, introducido por Florens et al. (1983) es el de medida de probabilidad regular.

Definición 3.3. Sea $\{P_\theta(x);\ \theta \in \Omega\}$ una familia de medidas de probabilidad definidas en (χ, A) y dominada por una medida σ-finita $\upsilon(x)$. Una distribución de probabilidad en $(\Omega, \mathbf{B})$ se dice que es *regular (μ-regular)* para la familia $\{P_\theta(x);\ \theta\in\Omega\}$ si de ser

$$\int_\chi f(x)\, dP_\theta(x) = 0 \text{ c.s.(P)} \quad \text{con} \quad f(x) \in L_\infty(\chi, A, \upsilon),$$

se deduce que $\int_\chi f(x)\, dP_\theta(x) = 0$ para todo $\theta \in \Omega$ ($\int_\chi f(x)\, dP_\theta(x) = 0$ c.p.d.(μ)).

Teorema 3.3 Si una distribución a priori $P \in \mathbf{F}(\mu)$ satisface la regla de Cromwell, entonces P es μ-regular.

Demostración. Evidente de la definición.

Teorema 3.4 Si Ω es un espacio métrico y separable, $\int_\chi f(x)\, dP_\theta(x)$ es una función continua de θ para todo $f(x) \in L_\infty(\chi, A, \upsilon)$ y si $sop(P) = \Omega$, entonces P es regular.

Demostración. Supongamos que f(x) es tal $\int_\chi f(x)\, dP_\theta(x) = 0$ c.s.(P). Si la integral anterior no fuese idénticamente nula, existiría un abierto U tal que para todo $\theta \in \Omega$, $\int_\chi f(x)\, dP_\theta(x) \neq 0$. Como $sop(P) = \Omega$, se tendría que $P(U) > 0$ y esto contradiría la hipótesis de que $\int_\chi f(x)\, dP_\theta(x) = 0$ c.s.(P).

Hemos visto que la admisibilidad implica la casi-admisibilidad cualquiera que sea μ. Pero el recíproco no es cierto en general. Bajo ciertas hipótesis se tiene sin embargo que la casi-admisibilidad implica la admisibilidad.

Teorema 3.5. Si Ω es un espacio métrico y separable, la función de riesgo $R(\theta,d)$ es continua en θ para todo $d \in D$ y $sop(\mu)= \Omega$, entonces si d* es casi-admisible (μ), d* es admisible.

Demostración. Si d* no fuese admisible, existiría una d_0 tal que para todo $\theta \in \Omega$ $R(\theta, d_0) \leq R(\theta, d^*)$ y para al menos un θ_0, $R(\theta_0, d_0) < R(\theta_0, d^*)$. Por ser $R(\theta,d)$ continua en θ, existirá un abierto U que contiene a θ_0 tal que $R(\theta, d_0) < R(\theta, d^*)$ para todo $\theta \in U$; y como $sop(\mu) = \Omega$, $\mu(U) > 0$ y por lo tanto d* no sería casi-admisible.

Corolario 3.3. Si se verfican las condiciones del teorema 3.5 y $P \in \mathbf{F}(\mu)$ satisface la regla de Cromwell, entonces si d* es Bayes respecto de P, d* es admisible.

El teorema 3.5 y su corolario siguen siendo válidos aunque la función de riesgo no sea acotada, supuesta la existencia del riesgo de Bayes.

Como ejemplo de aplicación del teorema 3.5 consideremos el problema de estimar la media de una distribución normal univariante $X \sim N(\theta,1)$ y sea $L(\theta, a)$ una función no decreciente de $|\theta - a|$. Se demuestra (véase Ferguson (1967), p. 185, ej. 13) que la media muestral es casi-admisible. Si suponemos que $L(\theta, a)$ es acotada y continua, teniendo en cuenta que el soporte de la medida de Lebesgue es **R**, una simple aplicación del teorema 3.5 demuestra que $\overline{X}$ es admisible.

REFERENCIAS

BERGER, J.O. (1980). *"Statistical Decision Theory: Foundations, Concepts and Methods"* . Springer Verlag. New York.

BLACKWELL, D. AND GIRSHICK, M.A. (1954).*"Theory of Games and Statistical Decisions"* . Wiley. New York.

BLYTH, C.R. (1951). "On minimax statistical decision procedures and their admissibility". *Ann. Math. Statist.* **22**, 22-42.

BORWEIN, J.M. (1983). "On the existence of Pareto efficient points". *Math. Oper. Research.* **8**, 64-73.

DE GROOT, M.H. (1970). *"Optimal Statistical Decisions"* . Mc. Graw-Hill. New York.

FARREL, R.H. (1964). "Estimators of a location parameter in the absolutely continuous case". *Ann. Math Statist.* **35**, 949-998.

FERGUSON, T.S. (1967). *"Mathematical Statistics: A Decision Theoretic Approach"* . Academic Press. New York.

FLORENS, J.P., MOUCHART, M. AND ROLIN, J.M. (1983). *"Elements of Bayesian Statistics"* . (To appear)

GIRON, F.J. (1975-77). "Caracterización axiomática de la regla de Bayes y la probabilidad subjetiva". *Real Acad. Cienc.* LXXI, 1º, 19-101. Madrid.

GIRON, F.J., IMLAHI, L. AND RIOS, M.J. (1982). "Sur la loi de Cromwell de Lindley". *Inst. Univ. Paris.* XXVII, fasc. **2**, 37-60.

KARLIN, S. (1958). "Adimissibility for estimation with quadratic loss". *Ann. Math. Statist.* , **29**, 406-436.

KATZ, M.W. (1961). "Admissible and minimax estimates of parameters in truncated spaces". *Ann. Math. Statist,.* **32**, 136-142.

LINDLEY, D.V. (1982). "The Bayesian approach to statistics". In *Some Recent Advances in Statistics.* J.T. Oliveira, Ed. Academic Press. London.

MARTINEZ, M.L., CARO, E. y GIRON, F.J. (1985). "Una nota sobre la regla de Cromwell". Actas X Jor. Mat. Hispano-Lusas, 234-243.

PARTHASARATHY, K.R. (1967). *"Probability Measures on Metric Spaces".* Academic Press. New York.

RIOS, M.J. (1981). "Problemas de decisión con información parcial a priori". Tesis doctoral. Universidad Complutense. Madrid.

ZACKS, S. (1971). *"The Theory of Statistical Inference"* . Wiley. New York.