HOMENAJE AL PROFESOR SIXTO RIOS
TRABAJOS DE ESTADISTICA Y DE INVESTIGACION OPERATIVA
Vol. 36, Núm. 3, 1985, pp. 133 a 144

LES OPERATEURS INTEGRAUX DONT LE NOYAU EST UNE COVARIANCE

Robert M. Fortet

Laboratoire de Probabilités. Université Paris VI, Tour 56.
4 Place Jussieu, 75230 Paris Cedex 05. France.

In many fields: signal theory, economics, etc...where random functions are introduced, frequently and naturally we encounter integral operators whose kernels are covariances. Of course the most immediate properties of that particular kind of integral operators have already been published, this allows us to quote them without proofs. But these properties are scattered over, so we have thought useful to present here a synthetic ordered, almost full account of them wihout pretending to originality, however hoping that, on some points, we give complements and precise details.

Key words: Hilbert space; Covariance; Operator; Eigenvalue; Eigenvector; Imbedding.

AMS Classification (1980): Primary, 47B10.

Operadores integrales cuyo núcleo es una covarianza

En muchos campos: Teoría de señales, Economía, etc., donde se introducen funciones aleatorias frecuentemente y en forma natural aparecen operadores integrales cuyos núcleos son covarianzas. Por supuesto, las propiedades más inmediatas de esta clase particular de operadores integrales ya han sido publicados, lo cual permite presentarlos sin prueba. Sin embargo, estas propiedades se encuentran dispersas en la literatura de tal forma que resulta útil presentar aquí un recuento sintético, ordenado y practicamente completo de todas ellas. Sin pretender originalidad, se incluyen algunos complementos y se precisan ciertos detalles.

Palabras Clave: Covarinazas; Operadores integrales.

Clasificación AMS (1980): Primaria, 47B10.

1. PREAMBULE ET NOTATIONS

Nous aurons beaucoup affaire à des espaces de Hilbert; pour un espace de Hilbert $\mathbf{X}$, son produit scalaire (P. S.) et sa norme, seront notés respectivement: $[.,.]_X$, $\|.\|_X$.

Les variables aléatoires (v.a.), ou fonctions aléatoires (f.a.) qui seront considérées, seront toujours *numériques* (v.a.n. ou f.a.n.).

Si **T** est un ensemble quelconque d'éléments t, une fonction $\Gamma(.,.)$ de *Type non-négatif* sur **TxT**, est une fonction numérique (f.n.) $\Gamma(.,.)$, application de **TxT** dans les complexes **C** telle que : $\forall$ n entier > 0; $\forall\, t_1,...,t_n \in \mathbf{T}$; $\forall\, \lambda_1,...,\lambda_n \in \mathbf{C}$, le nombre:

$$\Sigma_{jk}\, \lambda_j \overline{\lambda_k}\, \Gamma(t_j,t_k) \geq 0\,,\quad j, k= 1,...,n \quad \text{est } \textit{réel} \geq 0. \qquad (1.1)$$

A toute $\Gamma(.,.)$ de Type non-négatif sur **TxT**, on associe son *espace à noyau reproduisant* $\mathbf{R}(\Gamma)$, de *noyau* $\Gamma(.,.)$; $\mathbf{R}(\Gamma)$ se définit de la façon suivante:

a) $\mathbf{R}(\Gamma)$ est un espace de Hilbert;

b) Les éléments de $\mathbf{R}(\Gamma)$, sont des f.n. f(.) de $t \in \mathbf{T}$;

c) $\forall\, t \in \mathbf{T},\ \Gamma(t,.) \in \mathbf{R}(\Gamma)$; (1.2)

d) $\forall\, f(.) \in \mathbf{R}(\Gamma)$ et $\forall\, t \in \mathbf{T},\ f(t)= [\, f(.), \Gamma(t,.)\,]_{\mathbf{R}(\Gamma)}$. (1.3)

Soit **H** l'espace des v.a.n. du second ordre, c'est à dire des v.a.n. X telles que:

$$E(|X|^2) <+ \infty; \qquad (1.4)$$

H est un espace *de Hilbert* ; dans **H**, le P.S. de $X \in \mathbf{H}$ par $Y \in \mathbf{H}$, est défini par:

$$[X,Y]_{\mathbf{H}} = E(X\overline{Y}). \qquad (1.5)$$

Soit X(.) une f.a.n. de $t \in \mathbf{T}$; du *second ordre* , c'est à dire que:

$$\forall\, t \in \mathbf{T},\ X(t) \in \mathbf{H}\,; \qquad (1.6)$$

on associe à X(.) :

1) Sa fonction de covariance scalaire (F.C.S.) $\Gamma(.,.)$ par:

$$\forall\, t_1, t_2 \in \mathbf{T},\ \Gamma(t_1,t_2) = [X(t_1),X(t_2)]_{\mathbf{H}} = E[X(t_1)\, \overline{X(t_2)}]\,; \qquad (1.7)$$

$\Gamma(.,.)$ est nécessairement de Type non-négatif sur **TxT**; réciproquement, si $\Gamma(.,.)$ est une fonction de Type non-négatif sur **TxT**, $\exists$ au moins une f.a.n. X(.) de $t \in$ **T**, du second order, admettant $\Gamma(.,.)$ comme F.C.S.

2) Son *espace asscié* **H** [X(.)], c'est à dire le sous-espace de Hilbert de **H**, engendré par les X(t), $t \in$ **T**; $\exists$ une *isométrie* **J**, dite *canonique* , et une seule, de **H**[X(.)] sur **R**(Γ), qui, $\forall\, t \in$ **T**, à $X(t) \in$ **H**[X(.)] fait correspondre

$\Gamma(t,.) \in$ **R**(Γ).

Pour nous, le terme de *mesure* , désignera une fonction d'ensemble, non seulement σ- additive, mais *réelle* ≥ 0 .

2. LES OPERATEURS INTEGRAUX

Soient: **T** un ensemble d'éléments t; ε une σ- algèbre de sous-ensembles de **T**; m(dt) une mesure (bornée ou σ- bornée) sur (**T**,ε); $L^2 = L^2(\mathbf{T},\varepsilon,m)$; H(.,.) une f.n. de $(t,\tau) \in$ **TxT**.

La correspondance H qui, à la f.n. f(.) de $t \in$ **T**, fait correspondre la f.n. g(.) de $t \in$ **T** par la formule:

$$g(t) = \int_T \overline{H(t,\tau)}\, f(\tau)\, m(d\tau)\,, \tag{2.1}$$

est linéaire ; elle sera dénommée : *opérateur intégral* , de *noyau* H(.,.).

Toutefois, (2.1) ne définit une application H bien déterminée, que sous des conditions convenables ; nous considérons les suivantes:

1) H(.,.) est $\varepsilon \otimes \varepsilon$ - mesurable ; (2.2)

2) $S^2 = \int_{TxT} |H(t,\tau)|^2\, m(dt)\, m(d\tau) < +\infty$. (2.3)

On a le :
Théorème (2.1): Sous les hypothèses (2.2) et (2.3), (2.1) définit une opération linéaire H dans L^2, qui est de Hilbert-Schmidt et dont la norme de Hilbert-Schmidt $\|H\|_S$ est $\leq$ S.

Si en outre $H(.,.)$ est symétrique, c'est à dire si : $m(dt) \times m(d\tau)$ - p.p. dans

$\mathbf{T}\times\mathbf{T}$, $\overline{H(t,\tau)} = H(\tau,t)$; alors H est à symétrie Hermitique.

3. ESPACE A NOYAU REPRODUISANT PLONGE DANS UN ESPACE L^2

Soient: $\mathbf{T}$, ε, $m(dt)$ et $L^2 = L^2(\mathbf{T}, \varepsilon, m)$ comme au § 2; et $\Gamma(.,.)$ une f.n. de Type non-négatit sur $\mathbf{T}\mathrm{x}\mathbf{T}$.

L'espace à noyau reproduisant $R(\Gamma)$ de noyau $\Gamma(.,.)$ est *plongé* dans L^2, si $f(.) \in R(\Gamma)$ implique $f(.) \in L^2$. Pour cela, il est nécessaire que:

$$\forall t \in \mathbf{T}, \Gamma(t,.) \text{ est } \varepsilon\text{-mesurable ;} \tag{3.1}$$

$$\forall t \in \mathbf{T}, S(t)^2 = \int_{\mathbf{T}} |\Gamma(t,\tau)|^2 m(d\tau) = \|\Gamma(t,.)\|^2_{L^2} < +\infty ; \tag{3.2}$$

ces conditions nécessaires ne sont pas suffisantes ; mais formulons l'hypothèse H_1 suivante :

Hypothèse H_1:

a) $\forall t \in \mathbf{T}, \Gamma(t,.)$ est ε-mesurable; (3.3)

b) la f.n. $\Gamma(t,t)$ de $t \in \mathbf{T}$, est ε-mesurable (3.4)

c) $N = \int_{\mathbf{T}} \Gamma(t,t)\, m(dt) < +\infty$. (3.5)

On vérifie le :

Lemme (3.1): L'hypothèse H_1 est suffisante pour que $\mathbf{R}(\Gamma)$ soit plongé dans L^2, et implique:

$$\forall\ g(.) \in \mathbf{R}(\Gamma),\ \|g\|^2_{L^2} \leq N\, \|g\|^2_{\mathbf{R}(\Gamma)}\ ;$$

$$\forall t \in \mathbf{T},\ S(t)^2 \leq N\, \Gamma(t,t)$$

[C.S.]- opérateur: Adoptons l'Hypothèse H_1 et considérons la formule:

$$t \in \mathbf{T},\ f(.) \in L^2,\ g(t) = \int_{\mathbf{T}} \overline{\Gamma(t,\tau)}\, f(\tau)\, m(d\tau) ; \tag{3.6}$$

ou symboliquement: $g = \Gamma \circ f$;
alors :

Lemme (3.2): $\forall\ f(.) \in L^2$, $g = \Gamma \circ f \in \mathbf{R}(\Gamma) \subset L^2$, avec :

a) $\|g\|^2_{\mathbf{R}(\Gamma)} = \|\Gamma \circ f\|^2_{\mathbf{R}(\Gamma)} \leq N\, \|f\|^2_{L^2}$ (3.7)

b) $\|g\|^2_{L^2} = \|\Gamma \circ f\|^2_{L^2} \leq N^2 \|f\|^2_{L^2}$. (3.8)

c) $\forall\, \phi(.) \in \mathbf{R}(\Gamma)$, $[\Gamma \circ f, \phi]_{\mathbf{R}(\Gamma)} = [f, \phi]_{L^2}$. (3.9)

Selon (3.7), Γ peut s'interpréter comme une application linéaire bornée de L^2 dans $\mathbf{R}(\Gamma)$; mais (3.8) montre que Γ peut aussi s'interpréter -et *c'est cette deuxiéme interprétation que nous retenons* - comme une opération linéaire dans L^2; donc comme un opérateur intégral, avec la particularité que son noyau $\Gamma(.,.)$ est de Type non-négatif ; ce que nous nommerons un *[C.S.]-opérateur.* Alors :

Lemme (3.3): Sous l'hypothése H_1, le [C.S.]-opérateur Γ est de Hilbert-Schmidt, avec $\|\Gamma\|_S \leq N$. (A comparer au Théorème (2.1), où les hypothéses sont un peu différentes). Formulons maintenant l'hypothése H_2:

Hypothése H_2:

a) $\Gamma(.,.)$ est $\varepsilon \otimes \varepsilon$-mesurable ;

b) la f.n. $\Gamma(t,t)$ de $t \in \mathbf{T}$, est ε-mesurable ;

c) $N = \int_{\mathbf{T}} \Gamma(t,t)\, m(dt) < +\infty$.

A noter que:

1) b) découle de a), si $(\mathbf{T}, \varepsilon)$ a la propriété diagonale.

2) H_2 *implique* H_1.

3) Si $\mathbf{R}(\Gamma)$ est *séperable* , H_1 implique H_2.

Adoptons dorénavant l'hypothése H_2. . $\Gamma(.,.)$ étant de Type non-négatif, $\forall\ t, \tau \in \mathbf{T}$,

$\overline{\Gamma(t,\tau)} = \Gamma(\tau,t)$, donc par le Théorème (2.1) on a d'abord:

Lemme (3.4): L'Hypothèse H_2 implique que le [C.S.]-opérateur Γ, de Hilbert-Schmidt, est à symétrie Hermitique.

Ceci étant, désignons par:

- s_j (j=1,2,...) les valeurs propres non-nulles, distinctes ou non (mais réelles!) de Γ;

- $v_j(.)$ (j=1,2,...) les vecteurs propres de Γ, respectivement associés aux s_j, normalisés de façon à former un système orthonormé de L^2

- **V** le sous-espace de Hilbert de L^2, engendré par les $v_j(.)$

- **W** le sous-espace de Hilbert de L^2, complémentaire orthogonal de **V**;

- **W** se définit plus directement par: $\mathbf{W} \doteq \{f(.) \in L^2 \mid \Gamma \circ f \equiv 0\}$.

Alors:

Lemme (3.5): Sous l'Hypothèse H_2:

1) Le [C.S.]-opérateur Γ, de Hilbert-Schmidt et à symétrie Hermitique, est non-négatif, ceci impliquant : $\forall$ j, $s_j > 0$.

2) Les $v_j(.)$ (j=1,2,...) constituent, dans $\mathbf{R}(\Gamma)$ et avec le P.S. $[.,.]_{\mathbf{R}(\Gamma)}$, un système orthogonal, avec:

$$\|v_j\|^2_{\mathbf{R}(\Gamma)} = 1/s_j.$$

3) La fonction. S(.) de $t \in \mathbf{T}$, est ε-mesurable, et:

$$\|\Gamma\|^2_S \leq \int_{T\times T} |\Gamma(t,\tau)|^2 \, m(dt)m(d\tau) = \int_T S(t)^2 \, m(dt) \leq N^2 .$$

4) L'adhérence $\mathbf{R}_C(\Gamma)$ de $\mathbf{R}(\Gamma)$ dans L^2 (donc selon $\|.\|_{L^2}$), est **V**.

Soit X(.) une f.a.n. du second ordre de $t \in \mathbf{T}$, admettant $\Gamma(.,.)$ comme F.C.S.; notons:

- $\mathbf{R}_0$ le sous-espace de Hilbert de $\mathbf{R}(\Gamma)$ engendré, selon $\|.\|_{R(\Gamma)}$, par les $v_j(.)$;

- $\mathbf{J}$ l'isométrie canonique de $\mathbf{H}[X(.)]$ sur $\mathbf{R}(\Gamma)$ (cf. § 1);

- $Z_j = \mathbf{J}^{-1} \circ v_j$; les Z_j (j=1,2,...) forment un système orthogonal de $\mathbf{H}[X(.)]$, avec:

$E(z_j \overline{z_k}) = 0 \qquad$ si $k \neq j$

$E(z_j \overline{z_k}) = 1/s_j \qquad$ si $k = j$

- $\mathbf{H}_0$ le sous-espace de Hilbert de $\mathbf{H}[X(.)]$, engendré par les Z_j (j=1,2,...).

- $\forall\, t \in \mathbf{T}$, $\mathbf{X}_0(t)$= projection orthogonale de X(t) sur $\mathbf{H}_0$.

$\mathbf{X}_0(t)$ admet une (unique) représentation de la forme:

$$\mathbf{X}_0(t) = \Sigma_j\, \rho_j(t)\, Z_j\,, \tag{3.10}$$

où le second membre converge au sens de **H** (c'est à dire, en moyenne quadratique), et où:

$$\rho_j\,(t)\; E(|Z_j|^2) = \rho_j(t)/s_j = E(\mathbf{X}(t)\overline{Z_j}) = E(X(t)\overline{Z_j}) = [\Gamma(t,.), v_j]_{R(\Gamma)} = \overline{v_j(t)};$$

ainsi :

$$\mathbf{X}_0(t) = \Sigma_j\; s_j\, \overline{v_j(t)}\, Z_j\,. \tag{3.11}$$

(3,11) implique:

$$E(|\mathbf{X}_0(t)|^2) = \Sigma_j\, s_j\, |v_j(t)|^2 \leq E(|X(t)|^2) = \Gamma(t,t), \tag{3.12}$$

d'où puisque $\|v_j\|_{L^2} = 1$:

$$\Sigma_j\, s_j \leq \int_{\mathbf{T}} \Gamma(t,t)\;\; m(dt) = N\,. \tag{3.13}$$

(3.13) prouve le :

Lemme (3.6): Sous l'hypothèse H_2, le [C.S.]-opérateur Γ est nucléaire non-négatif, et sa norme nucléaire $\| \Gamma \|_N$ est $\leq N$.

4. VECTEURS ALEATOIRES DANS UN ESPACE DE HILBERT

Soient : $\mathcal{X}$ un espace Hilbert *séparable* , a la σ-algèbre de ses Boréliens ; un vecteur aléatoire (V.A.) X dans $\mathcal{X}$, est un élément aléatoire (e.a.) dans ($\mathcal{X}$, a) ; le V.A. X est du *second ordre* , si:

$$E(\|X\|^2) < + \infty . \tag{4.1}$$

L'ensemble $\Lambda^2(\mathcal{X})$ des V.A. du second ordre dans $\mathcal{X}$, est un espace de Hilbert, où le P.S. se définit par:

$$[X,Y]_{\Lambda^2(\mathcal{X})} = E([X,Y]_{\mathcal{X}})[X,Y \in \Lambda^2(\mathcal{X})], \tag{4.2}$$

d'où dérive la norme $\|.\|_{\Lambda^2}$ par:

$$\|X\|^2_{\Lambda^2(\mathcal{X})} = E(\|X\|^2_{\mathcal{X}})[X \in \Lambda^2(X)]. \tag{4.3}$$

Rappelons qu'un V.A. $\in \Lambda^2(X)$ n'est défini qu'à l'équivalence prés (cfr. [Fortet R.M., 1980], [Fortet R.M., 1983]).

Revenons au § 3 et à ses notations; **V** est un espace de Hilbert *séparable* ; comme **V** est un sous-espace de Hilbert de L^2, un V.A. Y dans **V** est, en fait, une f.a.n. Y(.) de t $\in$ **T**, telle que presque-sûremet:

1) Y(.) est ε-mesurable; (4.4)

2) $\int_T |Y(t)|^2 m(dt) < + \infty$ (4.5)

3) $Y(.) \in \mathbf{V}$ (4.6)

et Y est du second ordre si en outre:

4) $E[\int_T |Y(t)|^2 m(dt)] < + \infty$. (4.7)

$\forall$ j, $v_j(.) \in$ **V**; donc $\forall$ k entier > 0, la formule:

$$Y_k(.) = \Sigma_j \; s_j Z_j \overline{v_j(t)} \qquad (4.8)$$

définit une f.a.n. $Y_k(.)$ qui $\in$ **V**, identifiable à un V.A. $Y_k \in \Lambda^2(V)$. $\forall$ k, h entier > 0 , on a;

$$\begin{aligned} \| Y_{k+h} - Y_k \|^2_{\Lambda^2(V)} &= E(\| Y_{k+h}(.) - Y_k(.) \|^2_{L^2}) \\ &= E[\int_T |Y_{k+h}(t) - Y_k(t)|^2 \, m(dt)] \\ &= E[\int_T | \Sigma_j s_j Z_j \overline{v_j(t)}|^2 \, m(dt)] = \Sigma_j s_j \; ; \; j = k+1,\ldots,k+h \end{aligned}$$

de (3.13) résulte alors : $\exists$ Y $\in \Lambda^2(V)$, identifiable à une f.a.n. Y(.) $\in$ **V** tel que:

$$\lim_{k \to +\infty} \| Y_k - Y\|^2_{\Lambda^2(V)} = \lim_{k \to +\infty} E(\|Y_k - Y\|^2_{L^2}) = 0;$$

il en résulte par un théorème classique : $\exists$ une sous-suite (k_n; n=1,2,...) de la suite (k;1,2,...) telle que: presque-sûrement,

$$\lim_{n \to +\infty} \| Y k_n - Y \|^2_{L^2} = 0 \; ; \qquad (4.9)$$

c'est-à-dire: presque-sûrement,

$$\lim_{n \to +\infty} \int_T |Y k_n(t) - Y(t)|^2 \, m(dt) = 0,$$

soit: presque-sûrement:

$$m(dt) \text{ - p.p.}, \quad \lim_{n \to +\infty} Y k_n (t) = Y(t) \qquad (4.10)$$

En se reportant à (3.11) et aux Lemmes du § 3, on peut énoncer le:

Théorème (4.1): Sous l'Hypothése H_2:

1) Le [C.S.]-opérateur Γ est nucléaire, et sa norme nucléaire $\| \Gamma \|_N$ est $\leq$ N.

2) $\exists$ une f.a.n. Y(.) de t $\in$ **T** , telle que Y(.) $\in$ **V**, et que:
presque-sûrement:

$$m(dt)\text{ - p.p., } \mathbf{X}_0(t) = Y(t). \tag{4.11}$$

5.PLONGEMENT REGULIER

Le lemme (3.5), 4º), signifie que $\Gamma(L^2)$ est dense dans $\mathbf{R}(\Gamma)$ selon $\|.\|_{L^2}$; mais n'implique pas que $\Gamma(L^2)$ est dense dans $\mathbf{R}(\Gamma)$ selon $\|.\|_{\mathbf{R}(\Gamma)}$. Disons que le plongement de $\mathbf{R}(\Gamma)$ dans L^2 est *régulier* , si:

$$\Phi(.) \in \mathbf{R}(\Gamma) \text{ et } \|\Phi\|_{L^2} = 0, \text{ impliquent: } \|\phi\|_{\mathbf{R}(\Gamma)} = 0.$$

On vérifie le théoreme suivant, où sont reprises les notations du § 3:

Théorème (5.1): Sous l'Hypothèse H_2 et si le plongement est régulier:

1) $\Gamma(L^2)$ est dense dans $\mathbf{R}(\Gamma)$ selon $\|.\|_{\mathbf{R}(\Gamma)}$; $\mathbf{R}_0 = \mathbf{R}(\Gamma)$, $\mathbf{R}(\Gamma)$ est séparable ; si l'on définit les $u_j(.)$ par: $u_j(.) = \sqrt{s_j}\, v_j(.)$, les $u_j(.)$ (j=1,2,...) forment une *base* orthonormée de $\mathbf{R}(\Gamma)$.

2) $\Gamma(.,.)$ admet la représentation de Loève-Karhunen:

$$\forall\, t, \tau \in \mathbf{T}, \Gamma(t,\tau) = \Sigma_j \overline{u_j(t)}\, u_j(\tau) = \Sigma_j s_j\, v_j(t)\, \overline{v_j(\tau)}, \tag{5.1}$$

où la série (5.1) converge simplement, avec:

$$\forall\, t \in \mathbf{T},\ \Sigma_j \mid u_j(t)\,^2 = \Sigma_j s_j\, |v_j(\tau)|^2 < +\infty .$$

En particulier:

$$\forall\ t \in \mathbf{T}, \Gamma(t,t) = \Sigma_j\ s_j\, |v_j(t)|^2$$

$$\text{trace}(\Gamma) = \|\Gamma\|_N = \Sigma_j s_j = \int_{\mathbf{T}} \Gamma(t,t)\, m(dt) = N$$

3) $\mathbf{H}_0 = \mathbf{H}[X(.)]$, $\mathbf{X}(.)$ est identique à $X_0(.)$.

Remarque (5.1): Nous ne connaisons pas de critère maniable assurant de façon nécessaire et suffisante que $\mathbf{R}(\Gamma)$ étant par hypothèse plongé dans L^2, ce plongement est régulier.

Mais formulons l'hypothèse **R** Suivante:

Hypothèse **R**:

a) **T** est un espace topologique;

b) ε est la σ-algèbre des Boréliens de **T**;

c) m(dt) a la propriété que $\forall\ \omega \in \varepsilon$ *ouvert*, $m(\omega) = 0$ implique: $\omega = \phi$. Cette propriété a lieu par exemple si, **T** étant un groupe commutatif localement compact, m(dt) est sa mesure de Haar.

d) $\Gamma(.,.)$ est continue sur **TxT.**

On vérifie le :
Lemme (5.1): L'Hypothèse R implique: $\mathbf{R}(\Gamma)$ est plongé régulièrement dans L^2.
Une application courante du Lemme (5.1) est au cas où: $\mathbf{T}= [0,\alpha] \subset \mathbf{R}$ (avec $\alpha> 0$) ; ε = σ-algèbre des Boréliens de $[0,\alpha]$; m(dt)= la mesure de Borel-Lebesgue sur $([0,\alpha], \varepsilon)$.

Plongement complet: Un autre cas, mais assez particulier, de plongement régulier, est celui d'un plongement complet. Disons que $\mathbf{R}(\Gamma)$ est plongé dans L^2 *complètement*, si $\mathbf{R}(\Gamma)$ est plongé dans L^2 et si en outre $\forall\ \phi(.), \psi(.) \in \mathbf{R}(\Gamma)$, $[\phi, \psi]_{\mathbf{R}(\Gamma)} = [\phi, \psi]_{L^2}$; pour cela *il faut et il suffit que* :

1) $\forall\, t \in \mathbf{T}, \Gamma(t,.) \in L^2$; (5.2)

2) $\forall\, t_1, t_2 \in \mathbf{T}, \Gamma(t_1, t_2) = \int_{\mathbf{T}} \Gamma(t_1, \tau)\, \Gamma(t_2, \tau)\, m(dt)$. (5.3)

Le plongement complet est évidemment *régulier*, puisque $\forall\ \phi(.) \in \mathbf{R}(\Gamma)$, $\|\phi\|_{\mathbf{R}(\Gamma)} = \|\phi\|_{L^2}$.

Supposons *dorénavant* qu'il y a plongement complet; alors:
Remarque (5.2): On peut identifier $\mathbf{R}(\Gamma)$ et son adhérence $\mathbf{R}_c(\Gamma)$ dans L^2, et par la suite nous procèdons éventuellment à cette identification; elle constitue toutefois un "abus de langage" à manier avec précaution; en effet, si $f(.) \in \mathbf{R}(\Gamma)$, en tant qu'élément de $\mathbf{R}(\Gamma)$, la fonction f(.) de $t \in \mathbf{T}$ est définie *partout* ; tandis qu'en tant qu'élément de $\mathbf{R}_c(\Gamma) \subset L^2$, elle n'intervient qu'à une équivalence près. Ceci dit, on obtient le:

Lemme (5.2): Sous les Hypothèses (5.2)-(5.3), c'est à dire si le plongement est complet:

a) Le [C.S.]-opérateur Γ est identifiable au projecteur de L^2 relatif à $\mathbf{R}_c(\Gamma)$ [compte-tenu de la Remarque (5.2)]

b) $\forall\, f(.) \in L^2$ et $\forall\, \phi(.) \in \mathbf{R}(\Gamma)$:

$$[\,\Gamma \circ f, \phi\,]_{R(\Gamma)} = [\,\Gamma \circ f, \phi\,]_{L^2} = [\,f, \Gamma \circ \phi\,]_{L^2} = [\,f, \phi\,]_{L^2} = \int_T f(\tau)\,\overline{\phi(\tau)}\, m(d\tau).$$

b) est le résultat (3.9), mais sous d'autres hypothèses.

Remarque (5.3): Sous l'Hypothèse H_2, (5.3) implique:

$$N = \int_T \Gamma(t,t)\, m(dt) = \int_{T\times T} |\Gamma(t,\tau)|^2\, m(dt)\, m(d\tau) = \|\Gamma\|_S \leq N^2;$$

ainsi: ou bien $N = 0$, ou bien $N \geq 1$.

Ce cas du plongement complet trouve une application à un ploblème d'extrapolation, à un intéressant théorème de Papoulis; nous renvoyons à [Fortet R.M., 1981] pour un exposé sur ce sujet particulier.

Mais à notre connaissance, le seul exemple explicite de plongement complet, figurant dans la littérature, est celui où L^2 est l'espace des signaux à énergie totale finie; et où $\mathbf{R}(\Gamma)$ est celui des signaux, à énergie totale finie *et à bande limitée* (cf. [Fortet R.M., 1981].

BIBLIOGRAPHIE

FORTET, R.M. (1980). Vecteurs et fonctions aléatoires dans un espace de Hilbert séparable. En *Aspects statistiques et aspects physiques des processus gaussiens* , Coll. Int. CNRS de Saint-Flour, 303

FORTET, R.M. (1980). Sur une méthode de A. Papoulis pour l'extrapolation d'un signal *Ann. Télecomm.* **36**, 413.

FORTET, R.M. (1980) Harmonic analytic of random distributions. En *Prediction Theory and Harmonic Analysis* , Amsterdam: North Holland. 66-11.