HOMENAJE AL PROFESOR SIXTO RIOS
TRABAJOS DE ESTADISTICA Y DE INVESTIGACION OPERATIVA
Vol. 36, Núm. 3, 1985, pp. 81 a 87

REFINAMIENTO DEL CONCEPTO DE N-TUPLA DE SELTEN

Francisco Criado Torralba

Departamento de Estadística. Facultad de Ciencias.
Universidad de Málaga. 29071 Málaga.

En este artículo revisamos los conceptos de equilibrio perfecto y propio para juegos en forma normal y obtenemos un refinamiento del equilibrio perfecto.

Palabras Clave: Puntos de equilibrio; Juegos en forma normal.

Clasificación AMS (1980): Primaria, 90D12; Secundaria, 90D10.

A refinement of Selten's n-tuple equilibrium concept

Selten and Myerson's concepts of Perfect and Proper equilibrium for normal Games are reviewed, and a Refinement of the Selten equilibrium concept for these games is given.

Key words: Equilibrium points; Games in normal form.

AMS Classification (1980): Primary, 90D12; Secondary, 90D10.

1. INTRODUCCION

El concepto de equilibrio tal como lo definió Nash (1951) es una de las más importantes y elegantes ideas de la Teoría de Juegos. Desafortunadamente un juego puede tener muchas n-tuplas de equilibrio-Nash y algunas de estas pueden ser inconsistentes con nuestras nociones intuitivas acerca de lo que sería el resultado de un juego.

Para reducir esta ambiguedad y eliminar algunas de estas n-tuplas de equilibrio que van en contra de nuestra intuición, Selten (1975) introdujo el concepto de n-tupla de equilibrio perfecto. Myerson (1978) definió el concepto de n-tupla de equibrio propio. Ambos conceptos son refinamientos de las ideas introducidas por Nash.

Para ver como estos equilibrios que van en contra de nuestra intuición pueden producirse, consideremos el juego $\Gamma_1 : (U_1, U_2)$ definido por

		Jugador 2	
		β_1	β_2
Jugador 1	α_1	(1, 1)	(0, 0)
	α_2	(0, 0)	(0, 0)

Hay dos bituplas de equilibrio-Nash en este juego (α_1, β_2) y (α_2, β_2) porque en cada caso ningún jugador puede mejorar su función de pago cambiando unilateralmente su estrategia; pero no sería razonable pronosticar (α_2, β_2) como el resultado de este juego. Además, aunque los jugadores hayan convenido jugar (α_2, β_2), ambos tienen un incentivo para desviarse de este equilibrio, el cual eliminará la estrategia (α_2,β_2) de la clase de bituplas de equilibrio perfectas y propias.

Myerson fue el primero en indicar que el concepto de n-tupla de equilibrio perfecto no elimina todas las n-tuplas de equilibrio intuitivamente no plausibles.

El siguiente juego Γ_2: (U_1,U_2) que es una ligera modificación del anterior puede servir para demostrarlo.

		Jugador 2		
		β_1	β_2	β_3
	α_1	(1, 1)	(0, 0)	(-9, -9)
Jugador 1	α_2	(0, 0)	(0, 0)	(-7, -7)
	α_3	(-9,-9)	(-7,-7)	(-7, -7)

La estrategia (α_3,β_3) está estrictamente dominada; esta estragia es estratégicamente irrelevante, por consiguiente los juegos Γ_1 y Γ_2 tienen las mismas bituplas de equilibrio plausibles. Puesto que (α_1, β_1) es la única bitupla de equilibrio plausible para el juego Γ_1, este equilibrio es además el ùnico razonable para el juego

Γ_2 . Sin embargo, los conceptos de bituplas de equilibrio perfecto no coinciden para estos juegos. En el juego Γ_2 el equilibrio (α_2, β_2) es además perfecto, ya que si los jugadores han convenido jugar (α_2, β_2) y si cada jugador espera que la estrategia (α_3, β_3) ocurrirá con una probabilidad más grande que la estrategia (α_1, β_1) , entonces está claro que lo óptimo para cada jugador es jugar (α_2, β_2) .

El hecho de que al añadir estrategias estrictamente dominadas puede cambiar el conjunto de las n-tuplas de equilibrio perfecto, es una propiedad no deseable. Por este motivo Myerson introdujo el concepto de n-tupla de equilibrio propio: La idea básica de este concepto es que la probabilidad de (α_3, β_3) será siempre de orden más pequeño que la probabilidad de (α_1, β_1). Además , un acuerdo para jugar (α_2, β_2) es inconsistente.

Cada jugador preferirá jugar (α_1, β_1); por consiguiente, la bitupla (α_2, β_2) no es propia. La única bitupla de equilibrio propio del juego Γ_2 es (α_1, β_1).

2. FORMA NORMAL DE JUEGOS Y N-TUPLAS DE EQUILIBRIO NASH

Un juego finito en forma normal es una 2n-tupla $\Gamma(S_1,S_2,...,S_n;U_1,U_2,...,U_n)$ donde cada S_i es un conjunto no vacío y cada U_i es una función real definida sobre el dominio $\prod_i S_i$. Para cada jugador i, S_i es el conjunto de estrategias puras y , cada U_i es su utilidad.

Una estrategia mixta σ_i del jugador i es una distribución de probabilidad sobre S_i ; y representaremos por $\Delta(S_i)$ el conjunto de todas las estrategias mixtas del jugador i, : $\Delta(S_i) = \{ \sigma_i \in \mathbf{R}^{Si} : \sigma(s_i) \geq 0 \;\; \Sigma\sigma_i(s_i) = 1 \;\; \forall \;\; s_i \in S_i \}$. El soporte de σ_i está definido por $C(\sigma_i) = \{ s_i \in S_i : \sigma_i(s_i) > 0 \}$; σ_i se dice completamente aleatorizada si $C(\sigma_i) = S_i$.

Definimos los conjuntos $S = \prod_i S_i$ y $\Delta(S) = \prod_i \Delta(S_i)$, i=1,...,n sea $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2,..., \sigma_n) \in \Delta(S)$. El soporte de σ lo representamos por $C(\sigma) = \{ s = (s_1,s_2,...s_n) \in S: \sigma(s) > 0 \} = \prod_i C(\sigma_i)$, y σ se dice completamente aleatorizada si $C(\sigma) = S$.

Si cada jugador i elige la estrategia $\sigma = (\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)$, la utilidad esperada $U_j(\sigma)$ para el jugador j viene dada por

$$U_j(\sigma_1, \sigma_2 ,..., \sigma_n) = \Sigma (\prod_i \sigma_i(s_i) U_j(s_1,s_2,..., s_n))$$

Donde se suma para todos los $(s_1, s_2,...,s_n)$. Sea $(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n) \in \Delta(S)$ y sea $\boldsymbol{\sigma}_i \in \Delta(S_i)$; representaremos por $\boldsymbol{\sigma}_i/\sigma$ la combinación de estrategias que resulta de reemplazar la estrategia σ_i del jugador i por la estrategia $\boldsymbol{\sigma}_i$ de este jugador.

Diremos que $\boldsymbol{\sigma}_i$ es una mejor respuesta del jugador i frente a σ, si $U_i(\boldsymbol{\sigma}_i/\sigma) = \text{Max}_{\sigma_i' \in \Delta(S_i)} U_i(\sigma_i'/\sigma)$. El conjunto de todas las mejores respuestas del jugador i pertenecientes a S_i frente a σ lo representaremos por $B_i(\sigma)$.

Una condición necesaria y suficiente para que $\boldsymbol{\sigma}_i$ sea una mejor respuesta frente a σ es que :

$$S_i\ U_i (s_i/\sigma_i) < U_i(s_i'/\sigma_i), \text{ entonces } \boldsymbol{\sigma}_i(s_i) = 0 \quad \forall\ s_i \in S_i.$$

Lo cual es equivalente a $C(\boldsymbol{\sigma}_i) = B_i(\sigma)$; es decir $\boldsymbol{\sigma}_i$ es una mejor repuesta del jugador i frente a σ sii $\boldsymbol{\sigma}_i$ asigna una probabilidad positiva solamente a las mejores respuestas del conjunto S_i frente a σ.

Diremos que $\boldsymbol{\sigma}$ es una mejor respuesta frente a σ si $\boldsymbol{\sigma}_i$ es una mejor respuesta frente a σ para todo i , y representando el conjunto de todas las mejores respuestas del conjunto S frente a σ por $B(\sigma)$ tendremos que $B(\sigma) = \prod_i B_i(\sigma)$.

Una estrategia $\sigma = (\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)$ es una n-tupla de equilibrio- Nash del juego Γ si σ es una mejor respuesta frente a una misma. Es decir, σ es una n-tupla de equilibrio-Nash sii $C(\sigma) \subset B(\sigma)$.

Nash ha demostrado que todo juego finito en forma normal posee al menos una n-tupla de equilibrio.

3. EQUILIBRIO PERFECTO

Un equilibrio perfecto lo podemos describir como una combinación de estrategias totalmente aleatorizadas $\sigma = (\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)$ tal que para todo jugador j y toda estrategia pura $s_j \in S_j$, si s_j no es una mejor respuesta a $(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)$ para j , encontes $\sigma_j(s_j)$ sería infinitamente pequeña.

Para precisar estas ideas, Selten define una ε-n-tupla de equilibrio perfecto como una combinación de estrategias totalmente aleatorizadas $(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)$, tal que:

$$s_i\ U_j(\ s_j / (\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n) \ < \ U_j(\ s_j' / (\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)$$

entonces

$$\sigma_j(s_j) \leq \varepsilon \ \ \forall j, \ \ \forall \varepsilon, \ \ \forall s_j \in S_j, \ \ \forall s_j' \in S_j.$$

Una n-tupla de equilibrio perfecto será definida como límite de ε-n-tuplas de equilibrio perfecto; es decir, una combinación de estrategias $(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)$ es una n-tupla de equilibrio perfecto sii existe alguna sucesión $\{\varepsilon_k\}_{k=1,...,\infty}$ y $\{\sigma_{1(k)},\sigma_{2(k)},...,\sigma_{n(k)}\}_{k=1,...,\infty}$ tal que

i) cada $\varepsilon_k > 0$ y lim $\varepsilon_k = 0$
ii) cada $(\sigma_{1(k)},\sigma_{2(k)},...,\sigma_{n(k)})$ es una ε_k-n-tupla de equilibrio perfecto.
iii) lim $(k \rightarrow \infty)$ $\sigma_{i(k)}(s_i) = \sigma_i(S_i)$ $\forall i$ y $\forall s_i \in S_i$

Selten ha demostrado que todo juego finito en forma normal tiene al menos una n-tupla de equilibrio perfecto, y que toda n-tupla de equilibrio perfecto es una n-tupla de equilibrio Nash.

4. EQUILIBRIO PROPIO

Una combinación de estrategias totalmente aleatorizadas $(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)$ se dice que es una ε-n-tupla de equilibrio propio, si

$$U_j(s_j / \sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n) < U_j(s_j' / \sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n) \ ,$$

entonces

$$\sigma_j(s_j) \ \leq \varepsilon\, \sigma_j(s_j') \quad \forall j; \ \forall s_j, \ \forall s_j' \in S_j$$

Una combinación de estrategias $(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)$ es una n-tupla de equilibrio propio sii existe alguna suceción $\{\varepsilon_k\}_{k=1,...,\infty}$ y $\{\sigma_{1(k)}, \sigma_{2(k)},...,\sigma_{n(k)}\}_{k=1,...,\infty}$ tal que:

i) cada $\varepsilon_k > 0$ y lim $\varepsilon_k = 0$
ii) cada $(\sigma_{1(k)},\sigma_{2(k)},...,\sigma_{n(k)})$ es una ε_k-n-tupla de equilibrio propio.
iii) lim $(k \rightarrow \infty)$ $\sigma_{i(k)}(s_i) = \sigma_i(s_i)$ $\forall i$, y $\forall s_i \in S_i$.

Myerson ha demostrado que todo juego finito en forma normal tiene al menos una n-tupla de equilibrio propio.

5. EQUILIBRIO FUERTEMENTE PERFECTO

Nuestro propósito es refinar el concepto de n-tupla de equilibrio perfecto definido por Selten.

Sea $\sigma = (\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)$ una combinación de estrategias; diremos que σ es una n-tupla de equilibrio fuertemente perfecto si existe alguna sucesión $\{ \varepsilon_k \}_{k=1,...,\infty}$ y $\{ \sigma_{1(k)},\sigma_{2(k)},...,\sigma_{n(k)} \}_{k=1,...,\infty}$ de estrategias totalmente aleatorizadas, tal que:

i) cada $\varepsilon_k > 0$ y $\lim \varepsilon_k = 0$
ii) $\lim (k\rightarrow \infty)$ $\sigma_{i(k)}(s_i) = \sigma_i(s_i)$ $\forall i$ y $\forall s_i \in S_i$; tal que σ es una mejor respuesta frente a todo elemento de esta sucesión.
iii) s_i $U_i(s_k/\sigma) < U_i(s_e'/\sigma)$, entonces $\sigma_{i(k)}(s_k) \leq \varepsilon\sigma_{i(e)}(s_e)$ $\forall i$, $\forall \varepsilon$, $\forall s_k$, s_e'.

Evidentemente de la propia definición se deduce que toda n-tupla de equilibrio fuertemente perfecto es perfecto. El recíproco no es cierto, como lo demuestra el siguiente juego Γ_2: Definimos $\sigma_{(1)\varepsilon}$ y $\sigma_{(2)\varepsilon}$ por:

$\sigma_{1(\varepsilon)}(\alpha_1)= \varepsilon$; $\sigma_{1(\varepsilon)} (\alpha_2) = 1 - 2\varepsilon$; $\sigma_{1(\varepsilon)} (\alpha_3) = \varepsilon$
$\sigma_{2(\varepsilon)} (\beta_1) = \varepsilon$; $\sigma_{2(\varepsilon)} (\beta_2) = 1 - 2\varepsilon$; $\sigma_{2(\varepsilon)}(\beta_3) = \varepsilon$

y observaremos que $(\sigma_{1(\varepsilon)}, \sigma_{2(\varepsilon)})$ forma una ε- bitupla de equilibrio perfecto.

$U_1(\alpha_1 / \sigma_{1(\varepsilon)}, \sigma_{2(\varepsilon)}) = - 8\varepsilon$, $U_1(\alpha_2 / \sigma_{1(\varepsilon)}, \sigma_{2(\varepsilon)}) = - 7\varepsilon$; $U_1(\alpha_3 / \sigma_{1(\varepsilon)}, \sigma_{2(\varepsilon)}) = - 7- 2\varepsilon$
$U_2(\beta_1 / \sigma_{1(\varepsilon)}, \sigma_{2(\varepsilon)}) = - 8\varepsilon$, $U_2(\beta_2 / \sigma_{1(\varepsilon)}, \sigma_{2(\varepsilon)}) = - 7\varepsilon$; $U_2(\beta_3 / \sigma_{1(\varepsilon)}, \sigma_{2(\varepsilon)})= - 7- 2\varepsilon$

(α_2,β_2) es mejor respuesta; $\sigma_{1(\varepsilon)}(\alpha_1) \leq \varepsilon$ y $\sigma_{1(\varepsilon)}(\alpha_3) \leq \varepsilon$,
$\sigma_{2(\varepsilon)}(\beta_1) \leq \varepsilon$, $\sigma_{2(\varepsilon)}(\beta_3) \leq \varepsilon$. Cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ $(\sigma_{1(\varepsilon)}, \sigma_{2(\varepsilon)}) \rightarrow (\alpha_2, \beta_2)$, es decir, (α_2, β_1) es una bitupla de equilibrio perfecto. Pero no es fuertemente perfecto ya que no se vertifica la condicion iii).

De la definición de n-tupla de equilibrio propio se deduce que toda n-tupla de equilibrio propio es una n-tupla de equilibrio fuertemente perfecto. El recíproco no es necesariamente cierto. Consideremos el juego Γ_3: (U_1,U_2)

		jugador 2		
		β_1	β_2	β_3
	α_1	(3,3)	(2,2)	(2,2)
jugador 1	α_2	(3,3)	(1,2)	(4,2)
	α_3	(1,3)	(1,2)	(1,1)

La única bitupla de equilibrio propio de este juego es(α_1, β_1) , ya que según este concepto el jugador 2 elige su tercera estrategia con un orden de probabilidad más pequeño que su segunda estrategia. Según el concepto de bitupla de equilibrio fuertemente perfecto, el jugador 2 no tiene porque elegir su tercera estrategia con una probabilidad mucho más pequeña que su segunda estrategia, ya que la tercera estrategia es solamente un poco peor. El jugador 1 elige su tercera estrategia solamente con probabilidad pequeña. Por consiguiente, la bitupla (α_2,β_1) es fuertemente perfecta.

REFERENCIAS

MYERSON, R.B. (1978). Refinements of the Nash Equilibrium Concept. *Internat J. Game Theory* **7**, 73-80.

NASH J.F. (1951). Non- Cooperative Games. *Ann. Math* **54**, 286-295.

SELTEN, R. (1975). Reexmination of the Perfectness Concept For Equilibrium Points in extensive Games. *Internat J. Game Theory* **4** , 25-55