TRABAJOS DE ESTADISTICA Y
DE INVESTIGACION OPERATIVA
Vol. 36. Núm. 2, 1985, pp. 126 a 137

RESOLUCION POR PROGRAMACION PARAMETRICA DEL PROBLEMA MULTIOBJETIVO LINEAL DIFUSO

Miguel Delgado
José Luis Verdegay
Amparo Vila
Departamento de Estadística Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad de Granada

RESUMEN

En este artículo se propone una solución difusa al problema Multiobjetivo Lineal Difuso. Tal solución contiene, como valores particulares, las soluciones puntuales que otros autores han obtenido. El método que se emplea es independiente de la linealidad de las funciones de pertenencia que se consideren. El problema también se extiende al caso en que el conjunto de restricciones sea, junto con los objetivos, difuso.

ABSTRACT

In this paper a fuzzy solution to the Fuzzy Linear Vectormaximum problem is proposed. This solution involves the puntual solutions obtained by other authors, as particular values. Method used and linearity of membership functions considered are independent. For the case in which both objective and constraints are fuzzy the problem is extended too.

Clasificación: 90C31; 94D05 (AMS 1980).

1. Introducción

En una primera aproximación, un Problema Multiobjetivo Lineal Difuso (PMD) se plantea del siguiente modo:

$$\begin{aligned} &\underset{\sim}{\text{máx}}: z(x) = (z_1(x), \ldots, z_m(x)) \\ &\text{s.a:} \\ &\qquad Ax \leqslant b \\ &\qquad \ \ x \geqslant 0 \end{aligned} \tag{1}$$

donde $x \in R^n$, A y b son matrices numéricas de dimensiones convenientes, las funciones $z_i(x)$, $i \in M = \{1, 2, ..., m\}$ son lineales y el símbolo $\sim$ se entiende como una «Optimización Difusa» en el sentido de que las m funciones objetivo van acompañadas de sendas funciones de pertenencia $\mu_i(\cdot)$, $i \in M$, que para el decisor representan el grado de cumplimiento que proporciona cada $x \in R^n$, sobre cada uno de los objetivos, evaluando este cumplimiento o pertenencia en el intervalo [0, 1], es decir,

$$\mu_i : R^n \rightarrow [0, 1] \quad , \quad i \in M$$

Tal como ha sido planteado el PMD, fue estudiado en primer lugar en [6], suponiendo que las funciones de pertenencia (fp) son todas lineales y, posteriormente en [2] haciendo una extensión del anterior estudio para obtener soluciones de compromiso, en el caso de fp lineales, y una solución puntual para el caso en que no lo fueran, si bien limitándose al caso de funciones hiperbólicas.

El método de resolución propuesto en [6], fundamentalmente se basa en calcular,

$$\max_{x \in X} \min_{i} [\mu_i(x)]$$

donde,

$$X = \{x \in R^n / Ax \leqslant b, \ x \geqslant 0\}$$

proponiendo para ello el siguiente problema lineal,

$$\begin{aligned} &\text{máx}: \lambda \\ &\text{s.a}: \\ &\qquad \mu_i(x) - \lambda \geqslant 0 \quad , \quad i \in M \\ &\qquad\qquad Ax \leqslant b \\ &\qquad\qquad\ \ x \geqslant 0 \quad , \quad \lambda \in R \end{aligned} \tag{2}$$

del cual puede obtenerse una solución optimal (λ^*, x^*) que se considera la solución de (1), y a la cual nos referiremos como la z-solución.

En [2] si las fp son lineales, se sigue admitiendo el mismo modelo (2) anterior. El problema con fp no lineales se estudia, como se ha dicho, para funciones hiperbólicas, resolviendo (1) de acuerdo con el siguiente problema lineal,

$$
\begin{aligned}
\text{máx}: \; & x_{n+1} \\
\text{s.a}: \; & \\
& \alpha_i z_i(x) - x_{n+1} \geqslant (1/2)\alpha_i(z_i^p - z_i^o) \quad , \quad i \in M \\
& Ax \leqslant b \\
& x \geqslant 0
\end{aligned}
\tag{3}
$$

donde $x_{n+1} = \tanh^{-1}(2\lambda - 1)$ y α_i, z_i^o y z_i^p son parámetros conocidos que intervienen en las definiciones de las fp aquí empleadas.

De un modo paralelo al de antes, de (3) se obtiene una solución optimal (x_{n+1}^*, x^*) que se toma como la solución de (1) para este caso hiperbólico, y a la cual nos referiremos llamándola l-solución.

En este artículo pretendemos dar una «solución difusa» al problema (1), es decir, un subconjunto difuso de soluciones del conjunto de soluciones admisibles de (1). La obtención de dicha solución, no va a depender de la linealidad de las fp y, además, contendrá como valores particulares las soluciones puntuales que, para el caso lineal, y el no lineal, se han dado, es decir, la z-solución y la l-solución.

Por otro lado, basándonos en [4], ampliaremos el planteamiento y resolución de (1) al caso en que el conjunto de restricciones, siendo lineal, sea difuso. Por último, se generalizará formalmente (1) al caso en que tanto objetivos como restricciones, considerados difusos, sean no lineales.

En cualquier caso, la solución difusa al PMD se obtendrá a partir de un problema de programación uniparamétrico, lineal o no según las hipótesis que se establezcan sobre objetivos o restricciones, pero no dependiendo dicha linealidad de la de las fp que se consideren.

Para ello, si notamos $\mu_o(x) = (\mu_l(x), ..., \mu_m(x))$ como se sabe [6], (1) se plantea como el siguiente problema clásico:

$$
\begin{aligned}
\text{máx}: \; & \mu_o(x) \\
\text{s.a}: \; & \\
& Ax \leqslant b \\
& x \geqslant 0
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Pero (4) es equivalente a:

$$\begin{array}{ll} \text{máx: } \alpha & \\ \text{s.a:} & \\ \quad \mu_i(x) \geqslant \alpha \quad , \quad i \in M & \\ \quad Ax \leqslant b & \qquad (5) \\ \quad x \geqslant 0 & \end{array}$$

Nótese que si $\alpha \in [0, 1]$, las restricciones

$$\mu_i(x) \geqslant \alpha \quad , \quad \alpha \in [0, 1]$$

no son más que los α-cortes de los objetivos difusos que consideramos y que, por tanto, si tomamos $\alpha \in [0, 1]$ como un parámetro, lo que estamos haciendo es encontrando la solución de (1) en cada α-corte, con lo que se obtendra una solución optimal difusa para (1) en virtud del Teorema de Representación para Subconjuntos Difusos [3].

En definitiva, podemos resolver (1) de acuerdo con,

$$\begin{array}{ll} \text{máx: } \mu_k(x) & \\ \text{s.a:} & \\ \quad \mu_i(x) \geqslant \alpha \quad , \quad i \in M - \{k\} & \\ \quad Ax \leqslant b & \qquad (6) \\ \quad x \geqslant 0 \quad , \quad \alpha \in [0, 1] & \end{array}$$

para cualquier $k \in M$.

Ahora, según lo expuesto hasta aquí, resolveremos (6) atendiendo a dos posibilidades, de acuerdo con que las fp $\mu_i(x)$, $i \in M$, sean lineales o no.

2. PMD con funciones de pertenencia lineales

Como hemos indicado para este caso el PMD fue estudiado en [6] obteniendo la que hemos llamado z-solución. Sin embargo, la resolución del PMD según (6), nos proporcionará soluciones funciones de $\alpha \in [0, 1]$ al ser este un problema de programación paramétrico. En este sentido, la solución que se obtenga de (6) será la solución difusa del PMD (1), obteniéndose la z-solución como un valor particular de la misma, según se demuestra en la siguiente:

Proposición 1. La z-solución para el PMD (1) es un valor particular de la solución difusa que proporciona (6).

Demostración: Admitamos que las fp $\mu_i(x)$, $i \in M$, son lineales y definidas como en [6],

$$\mu_i(x) = \begin{cases} (z_i(x) - a_i)/t_i & a_i \leqslant z_i(x) \leqslant a_i + t_i \\ 1 & z_i(x) \geqslant a_i + t_i \\ 0 & a_i \geqslant z_i(x) \end{cases}$$

Así, es obvio que es equivalente maximizar $\mu_k(x)$ a maximizar $z_k(x)$, puesto que a_k y t_k son valores fijos conocidos en el problema. Por tanto (6) puede ponerse,

$$\begin{aligned} &\text{máx: } z_k(x) \\ &\text{s.a:} \\ &\quad z_i(x) \geqslant a_i + t_i\alpha \quad , \quad i \in M - \{k\} \\ &\quad Ax \leqslant b \\ &\quad x \geqslant 0 \quad , \quad \alpha \in [0, 1] \end{aligned} \tag{7}$$

Por otro lado, se sabe que si μ_c y μ_k son las fp del conjunto de restricciones del PMD (en este caso la función indicador para el conjunto $\{x \geqslant 0/Ax \leqslant b\}$) y del k-ésimo objetivo $z_k(x)$, el subconjunto difuso de alternativas admisibles tiene por fp,

$$\mu_D = \mu_c \wedge \mu_k \tag{8}$$

Sea $x(\alpha)$, $\alpha \in [0, 1]$, la solución de (7). En [3] se prueba que

$$\sup_x \mu_D(x) = \sup_\alpha [\alpha \wedge \sup_{\Omega_\alpha} \mu_k(x)] \tag{9}$$

donde,

$$\Omega_\alpha = \{x \geqslant 0/z_i(x) \geqslant a_i + t_i\alpha, \, i \in M - \{k\}\}$$

así como que la función,

$$\psi(\alpha) = \sup_{\Omega_\alpha} \mu_k(x)$$

tiene un punto fijo $\alpha^* \in [0, 1]$ si es continua (lo cual es cierto en nuestro caso). Puesto que el cálculo de la z-solución se realiza a partir de,

$$\sup_x \mu_D(x) = \text{máx}_x \text{ mín}_i [\mu_i(x)] \tag{10}$$

como $\psi(\alpha)$ es una función decreciente de α,

$$\text{máx}_x \text{ mín}_i [\mu_i(x)] = \sup_\alpha \{\alpha \wedge \sup_{\Omega_\alpha} \mu_k(x)\} = \alpha^* \tag{11}$$

Por tanto, para la solución optimal de (7) $x(\alpha)$, $\alpha \in [0, 1]$, de (11) se sigue que la z-solución de (1) será el valor particular de la solución difusa $x(\alpha)$ obtenido para aquel $\alpha^* \in [0, 1]$ que resuelva la ecuación,

$$\mu_k[x(\alpha)] = \alpha \tag{12}$$

lo que completa la demostración.

Hay que destacar, por último, que debido a la hipótesis de linealidad de las fp, el punto fijo $\alpha^* \in [0, 1]$ siempre existe.

3. PMD con funciones de pertenencia no lineales

Consideremos ahora la posibilidad de que las fp $\mu_i(x)$, $i \in M$, sean no lineales. Este problema ha sido tratado en [2] pero sólo para el caso de funciones hiperbólicas. Siguiendo los mismos pasos que en el apartado anterior, daremos una solución difusa para (1) de la que podrá deducirse la l-solución en el caso especial de que sean las fp hiperbólicas.

Proposición 2. Sea un PMD como el (1). Si las fp $\mu_i(x)$, $i \in M$, son continuas y estrictamente monótonas (crecientes o decrecientes según maximicemos o minimicemos) entonces la l-solución es un valor particular de la solución difusa $x(\alpha)$, $\alpha \in [0, 1]$ que proporciona (6).

Demostración: Debido a que las $\mu_i(x)$, $i \in M$, son continuas y estrictamente crecientes, es obvio que

$$\max_{\chi_\alpha} \mu_k(x) \Leftrightarrow \max_{\chi_\alpha} z_k(x)$$

con,

$$\chi_\alpha = \{x/\mu_i(x) \geqslant \alpha,\ Ax \leqslant b,\ x \geqslant 0,\ i \in M - \{k\}\}$$

con lo que la demostración se sigue como en la Proposición 2.

Es importante notar que con estas hipótesis sobre las funciones $\mu_i(x)$, $i \in M$, no se pierde la linealidad de (1) ya que si,

$$\mu_i(x) = \eta_i[z_i(x)] \quad , \quad i \in M$$

la continuidad y la monotonía estricta implican que,

$$\mu_i(x) \geqslant \alpha \leftrightarrow \eta_i[z_i(x)] \geqslant \alpha$$

o lo que es equivalente,

$$z_i(x) \geqslant f_i(\alpha) \quad , \quad i \in M$$

siendo estas $f_i(\alpha)$ las funciones inversas de las $\eta_i(\cdot)$, $i \in M$.

Por tanto, para este caso no lineal, la solución difusa de (1) es la solución del problema paramétrico lineal,

$$\begin{aligned} &\text{máx}: z_k(x) \\ &\text{s.a}: \\ &\qquad z_i(x) \geqslant f_i(\alpha) \quad , \quad i \in M - \{k\} \\ &\qquad Ax \leqslant b \\ &\qquad x \geqslant 0 \quad , \quad \alpha \in [0, 1] \end{aligned} \tag{13}$$

Expliquemos todo esto con el siguiente:

4. Ejemplo numérico

Tomamos para la ilustración de lo anterior, el mismo problema biobjetivo propuesto en [6] y [2],

$$\begin{aligned}
&\text{máx: } z(x) = \big(z_1(x), z_2(x)\big)' = (-x_1 + 2x_2;\ 2x_1 + x_2)' \\
&\text{s.a:} \\
&\qquad -x_1 + 3x_2 \leqslant 21 \\
&\qquad x_1 + 3x_2 \leqslant 27 \\
&\qquad 4x_1 + 3x_2 \leqslant 45 \\
&\qquad 3x_1 + x_2 \leqslant 30 \\
&\qquad x_i \geqslant 0
\end{aligned} \tag{14}$$

Notemos, simplemente, $Ax \leqslant b$ ese conjunto de restricciones lineales y tomemos como fp para los objetivos, como en [6],

$$\begin{aligned}
\mu_1(x) &= \big(z_1(x) + 3\big)/17 && -3 < z_1(x) \leqslant 14 \\
&= 0 && z_1(x) \leqslant 3 \\
&= 1 && 14 < z_1(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_2(x) &= \big(z_2(x) - 7\big)/14 && 7 < z_2(x) \leqslant 21 \\
&= 0 && z_2(x) \leqslant 7 \\
&= 1 && 21 < z_2(x)
\end{aligned}$$

Según (2), la z-solución es

$$x_1^z = 5.03 \quad , \quad x_2^z = 7.32 \tag{15}$$

Aplicando el modelo propuesto (7) nos queda,

$$\begin{aligned}
&\text{máx: } z_1(x) = -x_1 + 2x_2 \\
&\text{s.a:} \\
&\qquad 2x_1 + x_2 \geqslant 7 + 14\alpha \\
&\qquad Ax \leqslant b \\
&\qquad x \geqslant 0 \quad , \quad \alpha \in [0, 1]
\end{aligned}$$

cuya solución es,

$$x_1(\alpha) = (-6 + 42\alpha)/5 \quad , \quad x_2(\alpha) = (47 - 14\alpha)/5 \quad , \quad \alpha \in [0, 1] \tag{16}$$

Ahora, por (12), la z-solución se obtendrá de esta solución difusa particularizando el valor,

$$\alpha^* = 23/31$$

de cuya sustitución en (16) obtenemos la z-solución.

Consideremos ahora el caso no lineal y, en particular, el hiperbólico. Para el mismo problema anterior tomamos, como en [2], las fp siguientes,

$$\mu_1(x) = (1/2) \tanh [(-x_1 + 2x_2 - 5.5)(6/17)] + (1/2)$$
$$\mu_2(x) = (1/2) \tanh [(2x_1 + x_2 - 14)(6/14)] + (1/2)$$

Con esto, a partir de (13) nos queda resolver,

$$\begin{array}{ll} \text{máx: } z_1(x) = -x_1 + 2x_2 & \\ \text{s.a:} & \\ \qquad 2x_1 + x_2 \geqslant 14 + (7/6) \ln (\alpha/(1 - \alpha)) & \\ \qquad\qquad Ax \leqslant b & (16) \\ \qquad\qquad x \geqslant 0 \quad , \quad \alpha \in (0, 1) & \end{array}$$

Resolviendo se obtiene

$$\left.\begin{array}{l} x_1(\alpha) = 3 + (7/10) \ln (\alpha/(1 - \alpha)) \\ x_2(\alpha) = 8 - (7/30) \ln (\alpha/(1 - \alpha)) \quad , \quad \alpha \in [0.5, 0.986] \end{array}\right. \tag{17}$$

De (12) obtenemos,

$$\alpha^* = 0.95$$

con lo que sustituyendo en la solución difusa (17) obtenemos,

$$x_1^l = 5.03 \quad , \quad x_2^l = 7.32$$

que es la l-solución que resolviendo (3) se propone en [2].

5. Caso en que el conjunto de restricciones es difuso

Hasta aquí hemos resuelto el PMD suponiendo un conjunto de restricciones definido como es habitual en la programación lineal y siguiendo las líneas estudiadas en la literatura de este tema, [6] y [2].

Sin embargo, también se puede suponer difuso el conjunto de restricciones, admitiendo, por ahora, su linealidad. El problema sería,

$$
\begin{aligned}
&\underset{\sim}{\text{máx}}: z(x) = [z_1(x), ..., z_m(x)] \\
&\text{s.a:} \\
&\qquad Ax \lesssim b \\
&\qquad x \geqslant 0
\end{aligned}
\qquad (18)
$$

que expresa el hecho de que el decisor está dispuesto a permitir ciertas violaciones en el cumplimiento de las restricciones, viniendo medido esto por una fp para cada una de las restricciones lineales que intervienen en el problema y que, aquí, notaremos,

$$
\beta_j(x) = \delta_j\left[\left(\sum_k a_{jk}x_k\right) - b_j\right] \quad , \quad j \in L = \{1, 2, ..., l\}
$$

En relación al objetivo, el problema (18), según lo visto hasta aquí, se resolverá de acuerdo con,

$$
\begin{aligned}
&\text{máx}: z_k(x) \\
&\text{s.a:} \\
&\qquad \mu_i(x) \geqslant \alpha \quad , \quad i \in M - \{k\} \\
&\qquad Ax \lesssim b \\
&\qquad x \geqslant 0 \quad , \quad \alpha \in [0, 1]
\end{aligned}
$$

Pero según se demostró en [4] la solución difusa de este problema nos la da la solución del problema paramétrico,

$$
\begin{aligned}
&\text{máx}: z_k(x) \\
&\text{s.a:} \\
&\qquad \mu_i(x) \geqslant \alpha \quad , \quad i \in M - \{k\} \\
&\qquad \beta_j(x) \geqslant \alpha \quad , \quad j \in L \\
&\qquad x \geqslant 0 \quad , \quad \alpha \in [0, 1]
\end{aligned}
$$

y admitiendo que las fp $\mu_i(x)$, $i \in M$, y $\beta_j(x)$, $j \in L$, sean como es habitual tales que posean inversa, nos queda,

$$
\begin{aligned}
&\text{máx: } z_k(x) \\
&\text{s.a:} \\
&\qquad z_i(x) \geqslant f_i(\alpha) \quad , \quad i \in M - \{k\} \\
&\qquad Ax \leqslant g(\alpha) \\
&\qquad x \geqslant 0 \quad , \quad \alpha \in [0, 1]
\end{aligned}
\tag{19}
$$

donde las $f_i(\alpha)$ tienen el mismo sentido que en (13) y g es una función vectorial formada por las inversas de las $\beta_j(\cdot)$, $j \in L$.

Nótese que si tanto objetivos como restricciones son lineales independientemente de las fp que contemple el problema, no se pierde la linealidad. Por tanto se puede enunciar,

Proposición 3. Dado un PMD, como el (18), si las fp correspondientes a los objetivos y las restricciones son continuas y estrictamente monótonas, su solución difusa viene dada por la solución optimal de (19).

La demostración es trivial según lo expuesto hasta el momento.

Notamos finalmente que con las mismas hipótesis básicas consideradas sobre las fp, un problema multiobjetivo difuso general, es decir, sin imponer condiciones de linealidad sobre objetivos ni restricciones,

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{\text{máx}}: z(x) = [z_1(x), \ldots, z_m(x)] \\
&\text{s.a:} \\
&\qquad h(x) \lesssim b \\
&\qquad x \geqslant 0
\end{aligned}
$$

formalmente puede ser resuelto de acuerdo con,

$$
\begin{aligned}
&\text{máx: } z_k(x) \\
&\text{s.a:} \\
&\qquad z_i(x) \geqslant f_i(\alpha) \quad , \quad i \in M \\
&\qquad h(x) \leqslant g(\alpha) \\
&\qquad x \geqslant 0 \quad , \quad \alpha \in [0, 1]
\end{aligned}
$$

teniendo esta notación el mismo sentido anterior.

BIBLIOGRAFIA

[1] GAL, T. (1979): *Postoptimal Analyses, Parametric Programming and Related Topics.* McGraw-Hill.

[2] LEBERLING, H. (1981): «On Finding Compromise Solutions in Multi-Criteria Problems Using the Fuzzy Min-Operator». *Fuzzy Sets and Systems, 6,* 2.

[3] NEGOITA, C. V., y RALESCU, D. A. (1975): *Applications of Fuzzy Sets to Systems Analysis.* Birkhauser-Verlag.

[4] VERDEGAY, J. L. (1982): «Fuzzy Mathematical Programming», en *Fuzzy Information and Decision Processes.* Editado por Gupta, M. M. y Sánchez, E. North-Holland.

[5] ZELENY, M. (1982): *Multiple Criteria Decision Making.* McGraw-Hill.

[6] ZIMMERMANN, H. J. (1978): «Fuzzy Programming and Linear Programming with Several Objective Functions», en *Fuzzy Sets and Systems, 1,* 1.