

ESTIMACION DE LA DENSIDAD DE PROBABILIDAD MEDIANTE DESARROLLOS DE NEUMANN

César R. Ortiz
Departamento de Estadística
Universidad de Málaga

RESUMEN

Se definen en este trabajo r -desarrollos de Neumann y se prueba que toda densidad de probabilidad f , admite un r -desarrollo convergente a f .

Los resultados obtenidos se aplican a la estimación de f sin la suposición de que sea de cuadrado integrable, estudiándose propiedades asintóticas de los estimadores e ilustrándose con un ejemplo de aplicación.

Palabras clave: series de Neumann, estimador de Neumann, estimación no paramétrica de la densidad.

ABSTRACT

Neumann's r -expansions are considered in this paper in relation to the problem of estimating density functions. It is proven that every probability density f admits an r -expansion which converges to f .

These results are applied to the estimation of f , relaxing the hypotheses of being square-integrable, with special emphasis on the asymptotic properties of estimators. Finally, this is illustrated with a numerical example.

Key word: Neumann series, Neumann estimator, non-parametric density estimation.

Clasificación A.M.S.: Primaria G202. Secundaria G2G05.

1. Introducción

En los últimos veinte años se han desarrollado diversos métodos para la estimación de la densidad de probabilidad (d.p.) de una distribución desconocida, entre los que han tenido particular aceptación el

método del núcleo (véase Deheuvels (1977a) para una amplia bibliografía), y el método de los polinomios ortogonales (véase, por ejemplo, Cěncov (1962), Schwartz (1967), Walter (1977)).

Este último método de estimación no paramétrica ha sido estudiado considerando desarrollos en serie de conocidas funciones ortogonales y en particular los sistemas trigonométricos y de Hermite. En general se consideran estimadores de la d.p. desconocida, f , de la forma

$$\hat{f}_m(x) = \sum_{k=0}^m \hat{a}_k \Psi_k(x) \quad ; \quad \hat{F}_m(x) = \sum_{k=0}^m \hat{A}_k \Psi_k(x) \quad (1)$$

donde $\{\Psi_k\}$ es un sistema ortogonal respecto a una función peso $w(x)$ y $\hat{a}_k, \hat{A}_k, k = 0, 1, \dots$ estadísticos que se construyen a partir de las observaciones muestrales. El número natural « m », denominado «punto de truncamiento», proporciona el número de funciones ortogonales que necesitamos tomar para obtener \hat{f}_m o \hat{F}_m con la aproximación deseada.

Como criterios de bondad para los estimadores \hat{f}_m o \hat{F}_m se utilizan generalmente el del «error cuadrático medio» (ECM) o bien el «error cuadrático medio integrado» (ECMI), definidos por

$$\text{ECM} = E\{f(x) - \hat{f}_m(x)\}^2 \quad ; \quad \text{ECMI} = E \int \{f(x) - \hat{f}_m(x)\}^2 dx \quad (2)$$

que se intentan minimizar, así como encontrar un punto de truncamiento óptimo para obtener una mejor aproximación.

La deducción y uso de los estimadores \hat{f}_m y \hat{F}_m y sus propiedades, caso de utilizar un sistema ortogonal completo en $L_2(w)$, exige la suposición de que la d.p. f , o la f.d. F , a estimar sea de cuadrado integrable. Este condicionamiento puede obligar a renunciar a alguna información sobre la d.p. (o su f.d.). Supóngase, por ejemplo, que se conoce que f pertenece a una familia general dependiente de dos funciones reales u y v (como ocurre en ciertas familias de Bessel). Es claro que la anterior exigencia delimita las posibles elecciones de u y v .

Estas consideraciones nos han llevado a contemplar en éste trabajo desarrollos de Neumann, que como veremos son posibles para toda densidad f , con soporte positivo, ampliando la validez de los estimadores (1) al caso de una d.p. desconocida, sin la suposición de que sea de cuadrado integrable.

No obstante, que una función g sea desarrollable en serie de Neu-

mann no implica que la suma de esta serie sea g , salvo ciertas condiciones que pueden verse con detalle en Titchmarsh (1948) y Wilkins (1948). Este hecho nos ha llevado a la posibilidad de obtener f como límite, cuando $r \rightarrow \infty$, de r -desarrollos, que se definen en el apartado 2 y que nos van a permitir las estimaciones que se pretenden. Para un desarrollo algo más amplio y mayor detalle en las demostraciones, véase Ortiz (1982).

2. Desarrollos de Neumann de una densidad de probabilidad

J. E. Wilkins (1948 y 1950) ha estudiado la representación de una función f de la variable real $x \geq 0$, por una serie de Neumann. Esta se basa en las fórmulas

$$\int_0^{\infty} x^{-1} J_{v+2n+1}(x) J_{v+2m+1}(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ (4n + 2v + 2)^{-1} & \text{si } m = n \end{cases} \quad (3)$$

de donde se deriva el desarrollo formal

$$S_v(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{kv} J_{v+2k+1}(x) \quad (4)$$

donde J_{v+2k+1} es la función de Bessel de primera especie de orden $v + 2k + 1$ y

$$a_{kv} = 2(v + 2k + 1) \int_0^{\infty} x^{-1} f(x) J_{v+2k+1}(x) dx \quad (5)$$

caracterizando la clase C_v de funciones $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, desarrollables en serie de Neumann mediante las propiedades:

$$\forall a > 0 \quad ; \quad x^v f(x) \in L(0, a) \quad (6a)$$

y existen las integrales

$$\int_a^{\infty} x^{-1} f(x) J_{v+1}(x) dx \quad ; \quad \int_a^{\infty} x^{-2} f(x) J_v(x) dx \quad (6b)$$

obteniendo resultados, que su autor considera los mejores posibles en el sentido de que si $f \notin C_v$, los coeficientes a_{kv} pueden no existir todos y si la serie (4) es convergente, f debe pertenecer a C_v .

Cuando f es la función de densidad de una v.a. continua X , la condición (6a) implica la existencia de los momentos de orden $k(=1, 2, \dots)$, $k \leq v$ de la v.a. X . Evitamos esta restricción tomando $v = 0$. Entonces:

Teorema 1. Toda función de densidad f con soporte en $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$, admite un desarrollo en serie de Neumann (4), con $v = 0$ y donde los a_{kv} , $k = 0, 1, \dots$ están definidos en (5). Además,

$$\sum_{k=0}^m a_{k0} = 1 \quad ; \quad \int_0^{\infty} S_0(x) dx = 1 \quad (7)$$

Demostración: Cuando $v(v+1) = 0$, la condición (6a) se verifica trivialmente y (6b) es consecuencia de las acotaciones (Rey-Castro (1958), página 23)

$$|J_0(x)| \leq 1 \quad ; \quad |J_n(x)| \leq \sqrt{\frac{1}{2}} \quad ; \quad n = 1, 2, \dots \quad (8)$$

La segunda parte del teorema resulta de la igualdad (Rey-Castro (1958), p. 32)

$$x/2 = \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) J_{2k+1}(x) \quad (9)$$

(desarrollo en serie de Neumann de $x/2$). Poniendo

$$\phi_k(x) = 2(2k+1)x^{-1} J_{2k+1}(x) \quad (10)$$

resulta de (9) que $\sum \phi_k(x) = 1$ y por aplicación del teorema de convergencia acotada de Lebesgue

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{k0} = \sum_{k=0}^{\infty} E\phi_k(x) = E \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k(x) = 1$$

y

$$\int_0^{\infty} S_0(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k0} \int_0^{\infty} J_{2k+1}(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k0} = 1$$

Debe de notarse que la existencia de los coeficientes del desarrollo en serie de Neumann de la d.p. f y la convergencia (puntual) de este desarrollo es consecuencia inmediata de las acotaciones (8) y la igualdad (Rey-Castro, p. 39)

$$\frac{2v}{x} J_v(x) = J_{v-1}(x) + J_{v+1}(x) \quad (11)$$

pues para $v(v+1) = 0$

$$|a_{kv}| \leq \int_0^{\infty} |J_{v+2k}(x) + J_{v+2k+2}(x)| f(x) dx \leq 2$$

$$|S_v(x)| = \left| \sum_{k=0}^{\infty} a_{kv} J_{v+2k+1}(x) \right| \leq 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x/2|^{v+2k+1}}{(v+2k+1)!}$$

Sin embargo los anteriores resultados no deben llevarnos a suponer que la serie $S_v(x)$ converge a $f(x)$. Esto sólo es cierto bajo condiciones muy restrictivas, entre las que se exige que f verifique la ecuación de Kapteyn (Titchmarsh (1948), pp. 352-358).

La estrechez de dichas condiciones puede evitarse, considerando los r -desarrollos que introducimos a continuación y que nos van a permitir representar cualquier densidad f .

Sea C_{vr} , $r > 0$, la clase de funciones $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, tales que

$$\forall a > 0 \quad ; \quad x^v f(x) \in L(0, a) \quad (12)$$

y convergen las integrales

$$\int_a^{\infty} x^{-1} f(x) J_{v+1}(xr) dx \quad ; \quad \int_a^{\infty} x^{-2} f(x) J_v(xr) dx \quad (13)$$

para cada r . Entonces, si $f \in C_{vr}$, para las series

$$S_v(x, r) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{kv}(r) J_{v+2k+1}(xr) \quad (14)$$

donde

$$a_{kv}(r) = 2(v + 2k + 1) \int_0^{\infty} x^{-1} f(x) J_v(xr) dx \quad (15)$$

son válidos resultados análogos a los de Wilkins, $S_v(x, 1) = S_v(x)$ y:

Teorema 2. Toda función de densidad f en $x \geq 0$, admite un r -desarrollo de Neumann convergente $S_v(x, r)$, $v = 0$, $r \geq 1$, con coeficientes $a_{kv}(r)$ definidos en (15) y

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{k0}(r) = r \quad ; \quad \int_0^{\infty} S_0(x, r) = 1 \quad (16)$$

Demostración. Obviamente $f \in C_{vr}$ y las igualdades (16) se demuestran como (7).

Por otra parte, consideraciones análogas a las de Wilkins (1948, pp. 365-367) conducen a la expresión

$$S_v(x, r) = \int_0^{\infty} \mathcal{S}_v(xr, tr) t^{-1} f(t) dt \quad (17)$$

donde

$$\mathcal{S}_v(xr, tr) = \sum_{k=0}^{\infty} 2(v + 2k + 1) J_{v+2k+1}(xr) J_{v+2k+1}(tr) \quad (18)$$

deduciéndose de la fórmula integral

$$\begin{aligned} & \int_a^b y J_v(xy) J_v(ty) dy = \\ & = (x^2 - y^2)^{-1} \left\{ xy J_{v+1}(xy) J_v(ty) - ty J_{v+1}(ty) J_v(xy) \right\} \Big|_{y=a}^{y=b} \end{aligned}$$

que

$$\mathcal{S}_v(xr, tr) = xt \int_0^r y J_v(xy) J_v(ty) dy \quad (19)$$

El teorema siguiente afirma que para $r \geq 0$, toda d.p. puede ser representada como límite cuando $r \rightarrow \infty$ de una serie $S_v(x, r)$.

Teorema 3. Sea f la d.p. de una v.a. X concentrada en $[0, \infty)$ con momento absoluto de orden k finito y sea $S_v(x, r)$, para $-1/2 \leq v \leq k$, el r -desarrollo de Neumann de f . Supondremos además que $EX^{-1/2} < +\infty$. Entonces

$$\lim_{r \rightarrow \infty} S_v(x, r) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2} \quad (20)$$

Demostración. Ya que $f \in C_v$ cuando $-1/2 \leq v \leq k$, del teorema 11.1 en Wilkins (1948), p. 381 (véase también Ortiz (1982), p. 9) se sigue que

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2} - S_v(x) = x \lim_{r \rightarrow \infty} \int_1^r y J_v(xy) dy \int_0^\infty f(t) J_v(ty) dt$$

Por el teorema de Fubini y recordando (17) y (19)

$$\begin{aligned} \frac{f(x+) + f(x-)}{2} - S_v(x) &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^\infty t^{-1} f(t) \{ \mathcal{S}_v(xr, tr) - \mathcal{S}_v(x, t) \} dt = \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} S_v(x, r) - S_v(x) \end{aligned}$$

de donde se sigue (20).

Para la aplicación del teorema 3 a la estimación de una densidad desconocida f , es deseable que la convergencia de su desarrollo $S_v(x, r)$, sea lo suficientemente rápida para proporcionar buenas aproximaciones de f , aún para pequeños valores de r . Desgraciadamente esto no es así, pues $S_v(x, r)$ se comporta como un oscilador en torno a f . Se ilustra esto en las figuras 1 y 2, donde se han representado los desarrollos de e^{-x} para $v = 0$ y $r = 5$ y 15 .

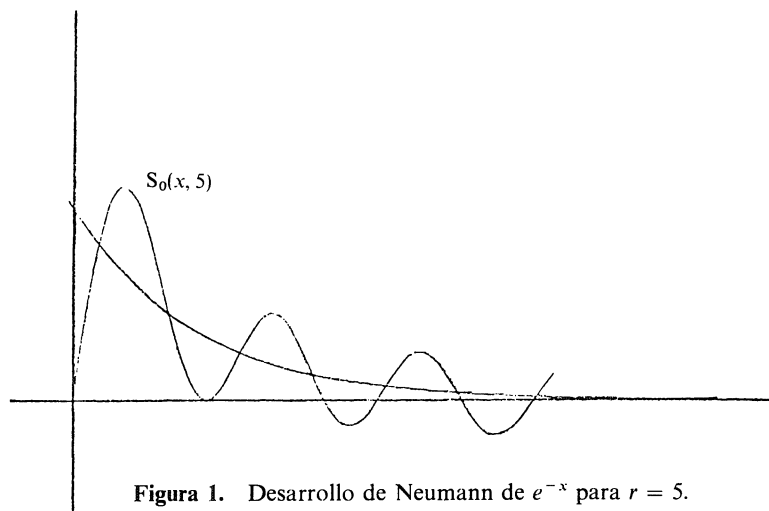


Figura 1. Desarrollo de Neumann de e^{-x} para $r = 5$.

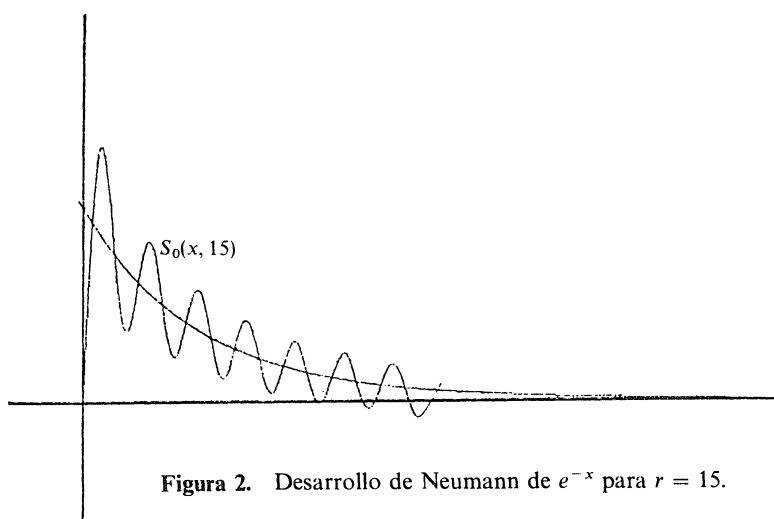


Figura 2. Desarrollo de Neumann de e^{-x} para $r = 15$.

El resultado siguiente permite «amortiguar» las oscilaciones de $S_0(x, r)$ en torno a f , mediante la combinación de dos desarrollos de Neumann.

Teorema 4. Sea f una d.p. concentrada en $[0, \infty)$ y $S_0(x, r)$ su desarrollo para $v = 0$ y $r \geq 1$. $S_0(x, r)$ tiene un extremo relativo en cada uno de los intervalos $(k\pi/r, (k + 1)\pi/r)$, $k = 0, 1, \dots$, dado por

$$x_k = \frac{(2k + 1)\pi}{2r\alpha_k} \quad ; \quad 0 < \alpha_k < 1 \quad (21)$$

Demostración. Sean

$$V(x, r, \theta) = \sum_{r=0}^m a_{k0}(r) \frac{(2k)!}{(4k+1)!} (\sqrt{2rx} \cos \theta)^{4k+2}$$

$$U(x, r, \theta) = V(x, r, \theta) \cos(rx \operatorname{sen} \theta)$$

donde los a_{k0} , $k = 0, 1, \dots$, son los coeficientes del desarrollo $S_0(x, r)$, de f . Recordando la representación integral de Poisson de $J_n(x)$ (Rey-Castro p. 25) y de nuevo por aplicación del teorema de convergencia acotada, es

$$S_0(x, r) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi U(x, r, \theta) d\theta$$

y la afirmación se sigue de que $U = 0$ cuando $rx \operatorname{sen} \theta = (2k+1)\pi/2$, $k = 0, 1, \dots$

Obsérvese que como consecuencia de (21) si $S_0(x, 1)$ tiene sus extremos en los puntos de abscisa x_k , los de $S_0(x, r)$ están en x_k/r .

En las figuras 3 y 4 se ha representado la función

$$\mathfrak{E}(x, r) = \sum_{k=0}^m a_{k0}(r) \Psi_k(x, r) = \frac{1}{2} \left(S_0(x, r) + S_0\left(x + \frac{\pi}{r}, r\right) \right) \quad (22)$$

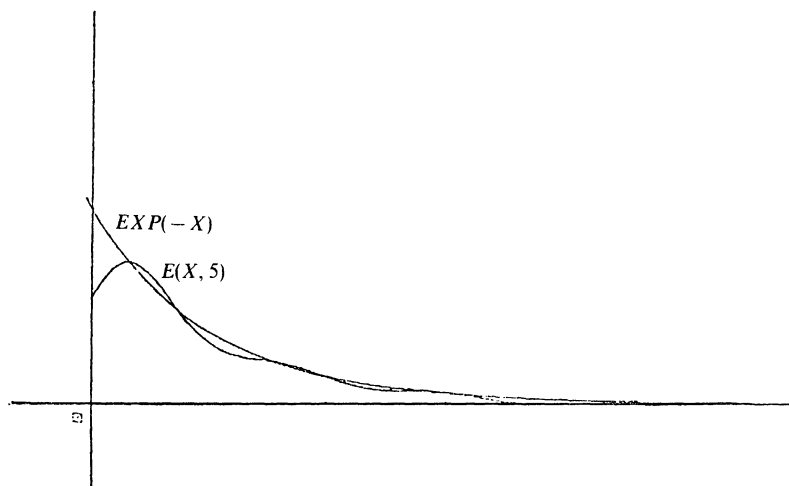


Figura 3. Desarrollo amortiguado de e^{-x} para $r = 5$.

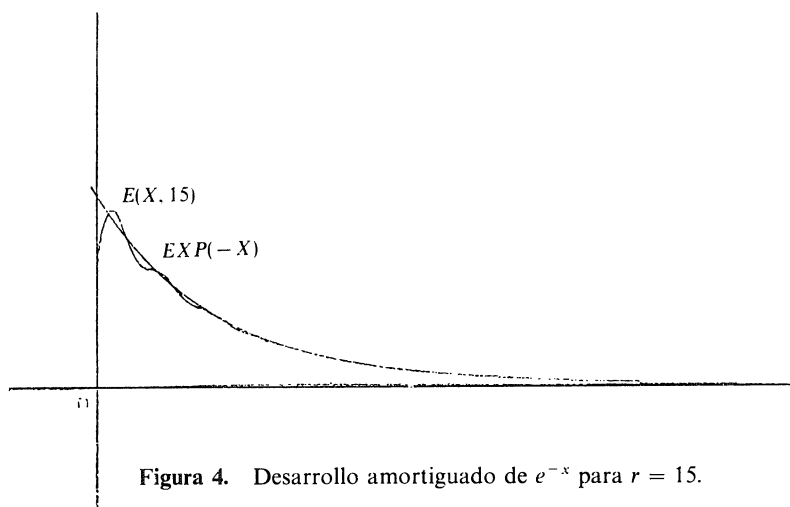


Figura 4. Desarrollo amortiguado de e^{-x} para $r = 15$.

donde

$$\Psi_k(x, r) = \frac{1}{2}(J_{2k+1}(xr) + J_{2k+1}(xr + \pi)) \quad (23)$$

y $a_k(r)$, $k = 0, 1, \dots$, los coeficientes del desarrollo de Neumann de e^{-x} .

Hacemos notar que $\mathfrak{L}(x, r)$ tiene las mismas propiedades que $S_0(x, r)$ y al ser las oscilaciones de aquel, en torno a la función f que define a ambos, más pequeñas que las de éste, $\mathfrak{L}(x, r)$ proporciona buenas aproximaciones de f aún para valores pequeños de r .

3. Estimadores de Neumann

Sea X una v.a. concentrada en $(0, \infty)$, cuya d.p. (desconocida) f admite un desarrollo en serie de Neumann $S_0(x, r)$ convergente a f cuando $r \rightarrow \infty$. Análogamente, si $\mathfrak{L}(x, r)$ es el desarrollo de f definido como en (22), $f(x) = \lim_{r \rightarrow \infty} \mathfrak{L}(x, r)$.

Para cada estimador de $\mathfrak{L}(x, r)$, $\hat{\mathfrak{L}}(x, r)$, podemos definir un estimador de f , $\hat{f}(x) = \lim_{r \rightarrow \infty} \hat{\mathfrak{L}}(x, r)$. Existe entonces la posibilidad de seleccionar un

r suficientemente grande de forma que un estimador de f , de la forma $\hat{f}(x, r) = \hat{\mathfrak{L}}(x, r)$, tenga un sesgo menor que un número prefijado $\varepsilon > 0$. Es decir, que para cada $x \geq 0$, $|f(x) - E(\hat{f}(x, r))| < \varepsilon$.

Consideremos la sucesión de estimadores de f de la forma

$$\hat{f}_m(x, r) = \sum_{k=1}^m \hat{a}_{k0}(r) \Psi_k(x, r) \quad (24)$$

que denominaremos de Neumann, donde los Ψ_k están definidos en (23) y los estadísticos \hat{a}_{k0} se construirán a partir de las observaciones muestrales.

Para facilitar el estudio de los estimadores (24) es conveniente tomar los estadísticos \hat{a}_{k0} de forma que verifiquen ciertas propiedades. Una de ellas es la de insesgamiento respecto de los coeficientes del desarrollo de Neumann de f , $E\hat{a}_{k0}(r) = a_{k0}(r)$.

Lema 1. Sea \hat{f}_m el m -ésimo estimador de Neumann de f , construido con la propiedad de insesgamiento de sus coeficientes. Entonces:

$$\text{var } \hat{f}_m = \sum_{k=0}^m \text{var} (a_{k0}) \Psi_k^2 + \sum_{\substack{i, j=0 \\ i \neq j}}^m \text{cov} (\hat{a}_{i0}, \hat{a}_{j0}) \Psi_i \Psi_j \quad (25)$$

Demostración. Siendo

$$\begin{aligned} \text{var } \hat{f}_m &= E\hat{f}_m^2 - (E\hat{f}_m)^2 = \\ &= \sum_{k=0}^m (E\hat{a}_{k0}^2 - a_{k0}^2) \Psi_k^2 + \sum_{\substack{i, j=0 \\ i \neq j}}^m (E(\hat{a}_{i0}\hat{a}_{j0}) - a_{i0}a_{j0}) \Psi_i \Psi_j \end{aligned}$$

se sigue (25).

Los coeficientes del desarrollo de Neumann de la d.p. f , admiten la siguiente interpretación:

$$a_{k0}(r) = (4k + 2) \int_0^\infty x^{-1} J_{(2k+1)}(xr) f(x) dx = E(\phi_k(X, r)) \quad (26)$$

donde

$$\phi_k(x, r) = 2(2k + 1)x^{-1} J_{2k+1}(xr) \quad (27)$$

para $k = 0, 1, \dots, r \geq 1$. Esto permite construir estimadores insesgados de estos coeficientes como sigue:

Teorema 5. Sean $X_i, i = 1, 2, \dots, n$, observaciones independientes de la v.a. X de densidad f , y sean los estadísticos

$$\hat{a}_{k0}(r) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \phi_k(X_i, r) \quad ; \quad k = 0, 1, \dots, \quad ; \quad r \geq 1 \quad (28)$$

se tiene

$$\text{var}(\hat{a}_{k0}) = \frac{1}{n} \text{var}(\phi_k) \quad ; \quad \text{cov}(\hat{a}_{i0}, \hat{a}_{j0}) = \frac{1}{n} \text{cov}(\phi_i, \phi_j) \quad (29)$$

y los \hat{a}_{k0} son estimadores insesgados y consistentes de los coeficientes del desarrollo de Neumann de f .

Demostración. Obviamente los \hat{a}_{k0} son estimadores insesgados de los a_{k0} y la consistencia es consecuencia de las igualdades (29) de fácil obtención (véase Ortiz (1982) p. 16).

Cuando se consideran los estadísticos (28) como estimadores de los coeficientes de Neumann de f , la varianza de \hat{f}_m puede escribirse en función de las varianzas de los ϕ_k como sigue:

Corolario. Sean $X_i, i = 1, 2, \dots, n$, observaciones independientes de la v.a. X de densidad f , con coeficientes $\hat{a}_{k0}(r), r \geq 1$, definidos en (28). Entonces:

$$\text{var} \hat{f}_m = \frac{1}{n} \left\{ \sum_{k=0}^m \text{var}(\phi_k) \Psi_{2k+1}^2 + \sum_{\substack{i,j=0 \\ i \neq j}}^m \text{cov}(\phi_i, \phi_j) \Psi_i \Psi_j \right\} \quad (30)$$

Demostración. Basta sustituir las relaciones (29) en (25).

El teorema siguiente establece una propiedad de consistencia de la sucesión \hat{f}_m :

Teorema 6. Sean $X_n, n = 1, 2, \dots$, v.a.i. con d.p. común f y $\{\hat{f}_m\}$ la sucesión de estimadores de Neumann de f , para $r \geq 1$, con coeficientes \hat{a}_{k0} definidos en (28). Entonces

$$\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} E(f - \hat{f}_m) = 0 \quad (31)$$

Si además $m = O(\sqrt{n})$

$$\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ r \rightarrow \infty}} \text{var}(\hat{f}_m) = 0 \quad (32)$$

Demostración. De la propiedad de inesgamiento de los coeficientes resulta que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} E(f - \hat{f}_m) = f(x) - \mathfrak{L}(x, r)$$

y de aquí, pasando al límite cuando $r \rightarrow \infty$, se sigue (31). De la relación (11) y las acotaciones (8) se tiene que $\text{var}(\phi_k) \leq 3$ y $\text{cov}(\phi_i, \phi_j) \leq 6$. Entonces de (25)

$$\text{var} \hat{f}_m \leq n^{-1} \left| 3 \sum_{k=0}^m \Psi_k^2 + 6 \sum_{\substack{i, j=0 \\ i \neq j}}^m \Psi_i \Psi_j \right| \leq \frac{12m(m+1)}{n}$$

y de aquí la última afirmación.

4. Determinación del punto de truncamiento. Regla de Parada

Dada una muestra de tamaño « n » y un número $\varepsilon > 0$, se trata de seleccionar un entero $m_0 > 0$ (punto de truncamiento), tal que para cada $m \geq m_0$, $|E(f - \hat{f}_m)| < \varepsilon$. En otras palabras, determinar el número m_0 de términos del desarrollo $\hat{\mathfrak{L}}$ a partir del cual

$$\left| E \sum_{k=m_0+1}^{\infty} \hat{a}_{k0}(r) \Psi_k(x, r) \right| < \varepsilon$$

una vez seleccionado un r suficientemente grande.

El criterio siguiente, de fácil manejo computacional, es el que hemos empleado en las aplicaciones y se deriva del teorema 6 y la propiedad de inesgamiento de los estadísticos \hat{a}_{k0} . Ya que

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{k0}(r) = \sum_{k=0}^{\infty} E(\hat{a}_{k0}(r)) = r$$

adoptamos como «regla de parada» estimar términos del desarrollo $\sum \hat{a}_{k0} \Psi_k$ hasta encontrar un m_0 tal que

$$\left| E \sum_{k=0}^{m_0} \hat{a}_{k0}(r) - r \right| < \varepsilon$$

La elección del parámetro r dependerá de la densidad que se estime. No obstante, en todas las pruebas realizadas, ya para el valor $r = 5$ se obtuvo una idea bastante aproximada de dicha densidad. En general será suficiente repetir la estimación para un valor de $r \leq 20$.

Ejemplo. Para estudiar el comportamiento de los estimadores de Neumann se simularon muestras de diferentes distribuciones (uniforme, triangular, normal, etc.) y se estimaron las distribuciones de procedencia. Los resultados fueron aceptables aún para tamaños muestrales pequeños, como ponemos de manifiesto en el ejemplo siguiente.

Normalidad en las mediciones de IgM

En una muestra de 89 lactantes con diarreas producidas por E. Coli o Klebsiella se tomaron cuatro determinaciones (una por semana y niño) de IgM en sangre.

Por métodos paramétricos se contrastó la normalidad de las determinaciones, habiéndose de rechazar la hipótesis de normalidad en la cuarta, debido a varias observaciones extrañas, correspondientes a niños que fallecen.

En el caso de niños con diarreas producidas por E. Coli, la cuarta determinación de IgM proporcionó una muestra (en mg %) que una vez ordenada es:

27	30	32	32	32	32	36	38	38	38	40	40	40
40	40	40	40	40	40	40	42	42	42	42	42	42
42	44	45	46	46	46	47	48	48	48	50	50	50
50	50	50	52	53	54	58	70	120	140	163	190	220

Tamaño muestral: $N = 52$.

Las cinco últimas observaciones corresponden a los niños que fallecen.

En la figura 5 se ha representado el estimador de Neumann obtenido a partir de las 52 observaciones muestrales (expresadas en mg por uno al objeto de adecuar la escala). Obsérvese cómo distorsiona la normalidad de la muestra el «peso» de las observaciones extrañas detectadas por el estimador a la derecha de la figura.

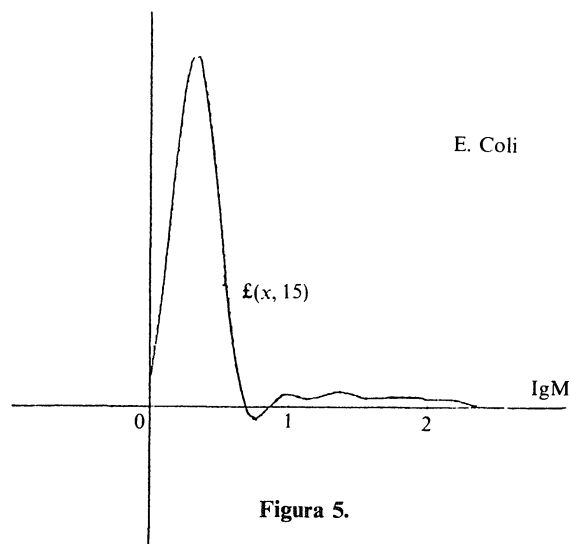


Figura 5.

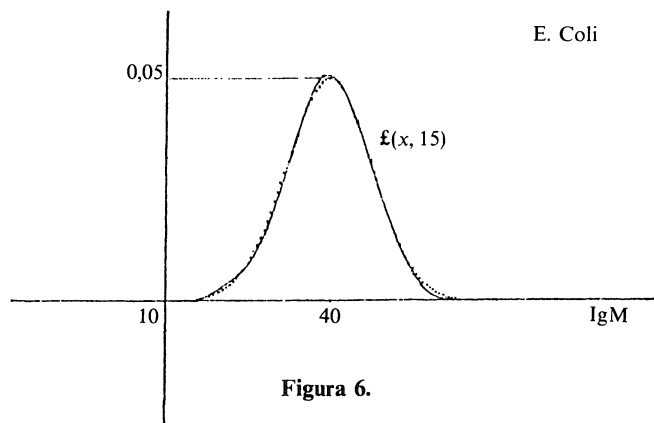


Figura 6.

Suprimidas de la muestra las cinco últimas observaciones se estimó (Fig. 6):

$$\hat{f}(x, 15) = ,083\Psi_1(x, 15) - ,188\Psi_3(x, 15) + ,043\Psi_5(x, 15) + \\ + ,351\Psi_7(x, 15) - ,046\Psi_9(x, 15) + 1,106\Psi_{11}(x, 15) +$$

$$\begin{aligned}
& + 2,481\Psi_{13}(x, 15) + 3,189\Psi_{15}(x, 15) + 3,193\Psi_{17}(x, 15) + \\
& + 2,370\Psi_{19}(x, 15) + 1,238\Psi_{21}(x, 15) + ,503\Psi_{23}(x, 15) + \\
& + ,249\Psi_{25}(x, 15) + ,184\Psi_{27}(x, 15) + ,130\Psi_{29}(x, 15) + \\
& + ,071\Psi_{31}(x, 15) + ,030\Psi_{33}(x, 15) + ,010\Psi_{35}(x, 15) + \dots
\end{aligned}$$

Punto de truncamiento para $\varepsilon < ,01$: $m = 17$
Suma de los coeficientes del estimador: $S = 14,996$

que corresponde a una densidad normal $N(39,8, 7,8)$, cuya gráfica se ha punteado en la figura 6. Este resultado coincide con el obtenido por métodos paramétricos.

BIBLIOGRAFIA

- CĚNCOV, N. N. (1962): «Evaluation of an unknown distribution density from observations», *Soviet Math.*, núm. 3, pp. 1559-62.
- DEHEUVELS, P. (1977a): «Estimations non paramétrique de la densité par histogrammes generalises I», *Revue Statist. Appl.*, vol. XXV, pp. 5-42.
- DEHEUVELS, P. (1977b): «Estimations non paramétrique de la densité par histogrammes generalises», *Pub. Inst. Univ.*, Paris, vol. XXII, pp. 1-23.
- KRONMAL R.-TARTER, M. (1968): «The estimation of probability densities and cumulatives by Fourier series methods», *J. Amer. Statist. Assoc.*, páginas 925-52.
- ORTIZ, C. R. (1982): «Estimación de la densidad de probabilidad mediante desarrollos de Neumann», *Tech. Rep. 3, Departamento Estadística, F. C. Univ.*, Málaga.
- REY PASTOR-CASTRO (1958): *Funciones de Bessel*. Ed. Dossat.
- SCHWARTZ, S. C. (1967): «Estimation of probability density by an orthogonal series», *Ann. Math. Atatist.*, 38, 1261-65.
- TITCHMARSH, E. C. (1948): *Theory of the Fourier integrals*, Oxford Clarendon Press.
- WALTER, G. G. (1977): «Properties of Hermite series estimation of probability density», *Ann. Statist.*, vol. 5, núm. 6, 1258-1264.
- WILKINS, J. E. (1948): «Neumann series of Bessel functions», *Trans Amer. Math. Soc.*, vol. 64, pp. 359-385.
- WILKINS, J. E. (1950): «Neumann series of Bessel functios II», *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 69, pp. 55-65.