TRABAJOS DE ESTADISTICA Y
DE INVESTIGACION OPERATIVA
Vol. 36. Núm. 2, 1985, pp. 97 a 109

ALGEBRAS DIFUSAS

Javier Montero de Juan
Departamento de Estadística e I. O.
Facultad de Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid

RESUMEN

En este trabajo se propone una estructura de álgebra difusa (borrosa) basada en la distinción entre difusidad extensiva y comprehensiva, desarrollando y conectando los trabajos de Nahmias sobre variables difusas, de Klement sobre medibilidad difusa y de Nowakowska sobre estructuras de conceptos.

1. Difusidad extensiva y difusidad comprehensiva

Cuando Zadeh [8] introduce la noción de conjunto difuso (borroso), lo hace generalizando la función característica de los conjuntos clásicos, es decir, una aplicación que a cada objeto $x \in X$ le asigna un grado de pertenencia $\mu(x) \in [0, 1]$, admitiendo así una graduación uniforme desde el cero (mínima pertenencia) hasta la unidad (máxima pertenencia). Un ejemplo clásico de conjunto difuso es el de los «hombres altos». Desde entonces multitud de trabajos se han dedicado a desarrollar tal idea, para clarificar el concepto de difusidad (borrosidad) y obtener sus propiedades relevantes. Sin embargo, como indica Nahmías [6], no parece que se haya logrado una teoría axiomática totalmente satisfactoria para describir la difusidad. En esta línea destacamos los trabajos de Nowakowska [7], Klement [4] y del propio Nahmías [6]; estos últimos trabajan estableciendo una analogía directa con las variables aleatorias clásicas, pero observamos que en sentidos bien diferentes: aquél se centra en el hecho de ser aplicaciones reales y éste lo hace en la «medibilidad» de la función. Pero no sólo esto, sino que además en cada uno subyace una idea distinta de difusidad: una sobre los objetos y otra sobre las propiedades. Si los conjuntos clásicos se pueden definir equivalentemente de manera extensiva y comprehensiva, al pasar a los conjuntos difusos nos encontraremos con que cada una provoca una difusidad específica.

Por otra parte, aceptamos con Blin [1] que la difusidad radica propiamente en los conceptos o características, con lo que parece más correcto el enfoque de Goguen [3], que generaliza la noción de conjunto difuso propuesta por Zadeh. Hemos de tratar de manera global las propiedades (modalidades) de cada característica, y llamar mejor «propiedad difusa» («ser hombre alto») a lo que Zadeh llamaba «conjunto difuso», que podría llevarnos a confusión. Cada característica debe estar dotada de una estructura propia, que ha de admitir no solamente la idea de complementario —operación natural en Zadeh— sino también, si existe, la noción de contrario. Por ejemplo, la «altura en los hombres» es una característica difusa y se puede hablar de la propiedad «ser alto», de su complementario «ser no alto» y de su contrario «ser bajo», de su complementario «ser no alto» y de su contrario «ser bajo», propiedades ambas claramente relacionadas pero evidentemente distintas.

Así pues, dada una serie de propiedades difusas (con funciones de verificación $\mu: X \to [0, 1]$), podemos preguntarnos por el grado de verificación (o de no verificación) de algunas de ellas en un objeto de X. Pero también es natural en la práctica preguntar acerca del grado de verificación de una de esas propiedades en cualquiera de las familias de objetos incluidos en X (y por extensión, nos puede interesar el grado de verificación de una serie de propiedades en una familia de objetos de X). Lo primero dará lugar a la «difusidad comprehensiva» y lo segundo da lugar a la «difusidad extensiva».

2. Difusidad extensiva de una propiedad difusa

Supongamos pues una familia X de objetos y definida sobre ella una propiedad difusa $\mu: X \to [0, 1]$. Entonces:

definición 1. Se entiende por «difusidad extensiva» de la propiedad difusa μ a la familia $\xi(\mu)$ de propiedades difusas definidas en X tales que $\sigma \in \xi(\mu)$ sí y sólo si existe $\{X_i\} \subset X$ partición

$$\bigcup_i X_i = X$$

$$X_i \cap X_j = \phi \quad ; \quad \forall i \neq j$$

y un $\delta \in \{0, 1\}$ tal que, para todo $x \in X_i$ es

$$\sigma(x) = \left[\sup_{y \in X_i} \mu(y)\right]^{\delta} \cdot \left[\inf_{y \in X_i} \mu(y)\right]^{1-\delta}$$

Esto nos permite conocer los grados de verificación de μ en cada una de las posibles regiones A de X:

$$\mu^*(A) = \sup_{x \in A} \mu(x)$$

y el grado de verificación de μ en todos los elementos de A:

$$\mu_*(A) = \inf_{x \in A} \mu(x)$$

Pero para construir la difusidad comprehensiva nos encontramos con la dificultad de que las propiedades difusas se pueden combinar de diferente forma, según sean de la misma o distinta característica, ya que en aquel caso tiene sentido la operación «suma» de propiedades.

3. Difusidad comprehensiva en una característica difusa

El punto de partida será la clásica definición de partición difusa, a partir de la cual proponemos la siguiente.

Definición 2. Una característica difusa discreta es una familia de propiedades difusas

$$\varphi(\xi) = \{\mu_j : X \to [0, 1]\}_{j \in J}$$

tal que existe una partición $J_p \subset J$, finita o infinita numerable

$$\sum_{j \in J_p} \mu_j(x) = 1 \quad ; \quad \forall x \in X$$

de tal modo que $\mu_i \in \varphi(\xi)$ sí y sólo si existe $J_i \subset J_p$ tal que

$$\mu_i(x) = \sum_{j \in J_i} \mu_j(x) \quad ; \quad \forall x \in X$$

Y es trivial comprobar que $\varphi(\xi)$ es un álgebra de Boole, cerrado respecto a la suma, producto y complementario, operaciones definidas para cualquier familia de propiedades $I \subset J$ de dicha característica como:

$$\left(\sum_{i \in I} \mu_i\right)(x) = \sum_{j \in \bigcup_{i \in I} J_i} \mu_j(x) \quad ; \quad \forall x \in X$$

$$\left(\prod_{i \in I} \mu_i\right)(x) = \sum_{j \in \bigcap_{i \in I} J_i} \mu_j(x) \quad ; \quad \forall x \in X$$

$$(1 - \mu_i)(x) = \sum_{j \in J_p - J_i} \mu_j(x) = 1 - \mu_i(x) \quad ; \quad \forall x \in X$$

siendo además evidente que $0, 1 \in \varphi(\xi)$:

$$0(x) = \sum_{j \in \phi} \mu_j(x) = 0 \quad ; \quad \forall x \in X$$

$$1(x) = \sum_{j \in J_p} \mu_j(x) = 1 \quad ; \quad \forall x \in X$$

y a la partición J_p que determina (genera) todas las propiedades de $\varphi(\xi)$ se le llamará «base» de dicha característica. Es fácil ver que

Proposición 1. Dada una característica discreta $\varphi(\xi)$, su base J_p es única.

Observamos que, asociada a cada σ-álgebra de una característica, existe un σ-álgebra isomorfa de conjuntos de índices $\varphi(J)$, que representan sus etiquetas o denominaciones. La generalización al caso no discreto será trivial entonces haciendo uso de la siguiente:

Definición 3. Sea $\varphi(J)$ un σ-álgebra de conjuntos de índices en J. Una medida de difusidad (comprehensiva) en $\varphi(J)$ sobre una familia de objetos X es una función

$$\mu : \varphi(J) \times X \to [0, 1]$$

tal que

a) $\mu_J(x) = 1 \quad ; \quad \forall x \in X$

b) Para toda familia numerable de conjuntos disjuntos de índices, $\{A_i\} \subset \varphi(J)$ se tiene que

$$\mu_{\Sigma A_i}(x) = \sum \mu_{A_i}(x) \quad ; \quad \forall x \in X$$

Definición 4. Se dirá que la familia

$$\varphi(\xi) = \{\mu_i : X \to [0, 1]\}_{i \in \varphi(J)}$$

es una característica difusa si

$$\mu : \varphi(J) \times X \to [0, 1]$$
$$\mu(A, x) = \mu_A(x)$$

es una medida de difusidad (comprehensiva).

Podemos escribir por analogía con Zadeh:

$$\mu_A(x) = \int_{\varphi} \mu_i(x)/A$$

y una «base» (de una característica no necesariamente discreta) será una familia $J_p \subset \varphi(J)$ tal que

$$\sigma \in \varphi(\xi) \Leftrightarrow \exists A \subset J_p \quad ; \quad \sigma(x) = \mu_A(x) \quad ; \quad \forall x \in X$$

a partir de la cual se definen, generalizando trivialmente el caso discreto, las tres operaciones específicas entre propiedades de una característica difusa.

4. σ-álgebra difuso de propiedades difusas

Hemos visto la estructura propia de las propiedades de una misma característica. Es evidente que tal estructura no es aplicable a un conjunto cualquiera de propiedades, ya que la operación suma únicamente tiene sentido en aquel contexto. Dadas dos propiedades arbitrarias, las operaciones naturales son las clásicas definidas a partir del supremo y el ínfimo. Se ha de combinar entonces tales operaciones con la difusidad extensiva antes definida:

Definición 5. Se dice que una familia no vacía φ de propiedades difusas, definidas en una misma familia de objetos X, forma un σ-álgebra difuso si

i) $\forall \mu \in \varphi \Rightarrow \xi(\mu) \subset \varphi$

ii) $\forall \mu \in \varphi \Rightarrow \bar{\mu} = 1 - \mu \in \varphi$

siendo $\bar{\mu}(x) = (1 - \mu)(x) = 1 - \mu(x) \quad ; \quad \forall x \in X$

iii) $\forall (\mu_n) \subset \varphi \Rightarrow \cup\, \mu_n \in \varphi$

$(\cup\, \mu_n)(x) = \sup\limits_n \mu_n(x) \quad ; \quad \forall x \in X$

Con estas tres propiedades tenemos una estructura cerrada respecto del complementario y la unión, y es evidente que puede definirse la intersección $\mu_{\cap A_n}$ tal que

$$\mu_{\cap A_n}(x) = \mu_{\overline{\cup \bar{A}_n}}(x) = \inf_n \mu_{A_n}(x) \quad ; \quad \forall x \in X$$

luego

$$\mu_{\cap A_n} \in \varphi$$

de modo que en φ están definidas las operaciones clásicas entre difusos, incluyendo la difusidad extensiva de toda propiedad difusa en φ.

Además es trivial demostrar que

Proposición 2. Sea $\{\varphi_i\}_{i \in I}$ una familia de σ-álgebra de propiedades difusas. Entonces la intersección $\bigcap\limits_{i \in I} \varphi_i$ es también σ-álgebra de propiedades difusas.

Así, dada una familia L de propiedades difusas en X, se podrá hablar del mínimo σ-álgebra generado por L (el mínimo σ-álgebra que contiene a L), siendo de especial interés el caso en el que L es la unión de las propiedades de una familia I de características difusas:

$$L = \bigcup_{i \in I} \varphi(\xi_i)$$

en cuyo caso hablaremos de $\varphi(L)$ como de un «σ-álgebra generado por I características difusas». Pero como dada cualquier propiedad difusa μ tenemos que $\varphi(\mu) = \{0, \mu, 1 - \mu, 1\}$ es una característica difusa, es evidente que

Proposición 3. Todo σ-álgebra de propiedades difusas está generado por algún conjunto de características difusas.

Por tanto, si J características difusas generan a un σ-álgebra, se dirá que ésta es de J características difusas, y estará generada por la unión de las bases de dichas características.

Proposición 4. Sea φ_X un σ-álgebra de propiedades difusas definidos en X, y $Z \subset X$, $Z \neq \phi$. Entonces

$$\varphi_{Z/X} = \{\mu_Z,\ \mu_Z(x) = \mu_X(x);\ \forall x \in Z\}_{\mu_X \in \varphi_X}$$

es un σ-álgebra de propiedades difusas definidas en Z.

Entonces podemos llamar «espacio medible difuso» a todo par (X, φ_X) formado por una familia de objetos y un σ-álgebra difuso de propiedades sobre dicha familia. Sobre estos espacios se aplicarán las «funciones medibles difusas».

5. Funciones extensivas y funciones comprehensivas

Coherentemente a lo expuesto, las funciones difusas deben admitir dos componentes básicos: una extensiva, que se aplicará entre las familias de objetos

$$f_e : X \rightarrow Y$$

y una componente comprehensiva, que ha de ser una aplicación (puntual) entre las propiedades nominales (no entre las propiedades difusas, sino entre sus «etiquetas»): como en el caso de una característica, si ahora consideramos un σ-álgebra de J características difusas, $\varphi_X = \varphi_X\left(\bigcup_{i\in J} B_i\right)$, con $\{B_i\}_{i\in J}$ bases de dichas características, tendremos asociada una estructura isomorfa de etiquetas (donde están definidas la suma, unión y complementario de etiquetas), que admitirán un conjunto de bases de etiquetas o nombres $\mathcal{N}_X\left(\bigcup_{i\in J} B_i\right)$, y la componente comprehensiva será una función entre dos grupos de familias de bases:

$$f_c : \mathcal{N}_X\left(\bigcup_{i\in J} B_i\right) \to \mathcal{N}_Y\left(\bigcup_{i\in K} D_i\right)$$

siendo $\mathcal{N}_Y\left(\bigcup_{i\in K} D_i\right)$ las bases de etiquetas correspondientes a un σ-álgebra difuso φ_Y.

De este modo, una «función difusa» $f = (f_e, f_c)$ se define a través de sus dos componentes como

$$f:(X, \varphi_X) \to (Y, \varphi_Y^*)$$
$$(\mu : X \to [0, 1]) \to (f(\mu) : y \to [0, 1])$$
$$\mu = \bigcup_{i\in J} \int_\varphi \mu_j / B_i \Rightarrow$$
$$f(\mu)(y) = \sup_{\substack{f_e(x) = y \\ i\in J}} \int_\varphi \sigma_k(x) / \{f_c(\sigma_k) = f_c(\mu_j),\ k \in B_i,\ j \in B_i\}$$

que podemos notar por

$$f(\mu) = \int_X \int_\varphi \sigma_k(x)/f(x, \mu) = \int_X \left(\int_\varphi \sigma_k / f_c(\mu)\right)(x)/f_e(x)$$

siendo evidente que $f(\varphi_X)$ no tiene por qué ser σ-álgebra difuso, y que $f^{-1}(\varphi_Y^*) \subset \varphi_X$ en general, pues

$$f^{-1}:(Y, \varphi_Y^*) \to (X, \varphi_X)$$

es tal que $f^{-1}(\mu) = 0 \in \varphi_X$ si $\mu \notin f(\varphi_X)$ y en caso contrario, si $\mu \in f(\varphi_X)$, es

$$f^{-1}(\mu)(x) = \left(\bigcup_{i \in J} \int_{\varphi} \sigma_k / \{ f_c(\sigma_k) = \mu, k \in B_i \} \right) \left(f_e^{-1}(f_e(x)) \right) =$$
$$= \mu(f_e(x)) \in \varphi_X$$

Hemos de señalar que las propiedades $\bigcup_{i \in k} D_i$ asociadas a las etiquetas $\mathcal{A}_Y\left(\bigcup_{i \in k} D_i \right)$ no forman en general una base del σ-álgebras φ_Y^* inducido por f, que ha de ser el mínimo engendrado por $f(\varphi_X)$.

6. Funciones medibles difusas

Definición 6. Una función difusa

$$f:(X, \varphi_X) \to (Y, \varphi_Y)$$

se dice medible cuando

$$f^{-1}(\varphi_Y^*)$$

es un σ-álgebra difuso.

Por la forma que adopta f^{-1}, es claro que $f^{-1}(\varphi_Y^*)$ es σ-álgebra si y sólo si $f(\varphi_X)$ lo es. Además, toda función extensiva, en el sentido de que la componente comprehensiva es la identidad I_c, es medible difusa:

Proposición 5. Si $f_c = I_c$ es la identidad, entonces toda $f = (f_e, I_c)$ es medible.

Demostración:

i) Dada $\sigma \in f(\varphi_X)$ tal que $\sigma = f(\mu)$, es fácil comprobar que, si $\{Y_i\} \subset Y$ es una partición y $\delta \in \{0, 1\}$, la propiedad

$$\sigma_{Y_i,\delta}(y) = \left[\sup_{\substack{Z \in Y_i \\ y \in Y_i}} \sigma(z) \right]^{\delta} \cdot \left[\inf_{\substack{z \in Y_i \\ y \in Y_i}} \sigma(z) \right]^{1-\delta}$$

es la imagen por f de

$$\mu'(w) = \left[\sup_{\substack{Z \in Y_i \\ f_e(w) \in Y_i}} \ \sup_{f_e(x) = z} \mu(x) \right]^{\delta} \cdot \left[\sup_{\substack{z \in Y_i \\ f_e(w) \in Y_i}} \ \inf_{f_e(x) = z} \mu(x) \right]^{1-\delta}$$

que desde luego es $\mu' \in \varphi_X$ y verifica que $\mu'(w) = \mu'(w')$ cuando $f_e(w) = f_e(w')$.

ii) Dada $\sigma \in f(\varphi_X)$, $\sigma = f(\mu)$, entonces

$$1 - \sigma(y) = 1 - \sup_{f_e(x) = y} \mu(x) = \inf_{f_e(x) = y} (1 - \mu(x))$$

luego $(1 - \sigma) \in f(\varphi_X)$, por consideraciones análogas a i).

iii) Dada una familia $\{\sigma_i\} \subset f(\varphi_X)$, $\sigma_i = f(\mu_i)$, es claro que

$$\cup \sigma_i \in f(\varphi_X)$$

pues

$$\sup_i \sigma_i(y) = \sup_{f_e(x) = Y} \sup_i \mu_i(x)$$

Proposición 6. Sea $f:(X, \varphi_X) \to (Y, \varphi_Y^*)$, función medible difusa. Entonces f/Z también es medible difusa para cualquier $Z \subset X$, $Z \neq \phi$.

7. Aplicaciones

7.1. Principio de extension

Sean μ_X:X $\to [0, 1]$ y $\mu_Y: Y \to [0, 1]$ dos propiedades difusas definidas sobre sendas familias de objetos X e Y; de forma natural se define la propiedad difusa «producto» de ambas propiedades:

$$\mu_{X \times Y} = (\mu_X, \mu_Y): X \times \dot{Y} \to [0, 1]$$

tal que

$$\mu_{X \times Y}(x, y) = \text{mín}\,(\mu_X(x), \mu_Y(y)) = (\mu_X \wedge \mu_Y)(x, y)$$

Sean dos σ-álgebras de propiedades difusas φ_X y φ_Y; llamaremos entonces σ-álgebra producto $\varphi_{X \times Y}$ al mínimo σ-álgebra que contiene a la familia

$$C = \{\mu_{X \times Y} = \mu_X \wedge \mu_Y,\ \mu_X \in \varphi_X,\ \mu_Y \in \varphi_Y\}$$

Si consideramos ahora una función extensiva f_e definida en $X \times Y$ sobre un universo Z, con la identidad comprehensiva, tenemos el principio de extensión en la forma propuesta por Zadeh [8]:

$$\begin{aligned} f = (f_e, I_c)&:(X \times Y, \varphi_{X \times Y}) \to (Z, \varphi_Z^*) \\ \mu(x, y) &\to f(\mu)(z) = \sup_{f_e(x, y) = z} \min\big(\mu_X(x), \mu_Y(y)\big) \quad ; \quad \forall \mu \in C \end{aligned}$$

Además, por la proposición 5, esta «función de extensión» es medible difusa, siempre, y puede notarse por

$$f(\mu) = \int_{X \times Y} \mu(x, y)/f_e(x, y)$$

Y la extensión a operaciones n-arias es trivial:

$$f(\mu) = \int_{X_1 \times X_2 \times \cdots X_n} \mu(x_1, x_2, ..., x_n)/f_e(x_1, x_2, ..., x_n)$$

7.2. Transformaciones y operaciones con variables difusas

Sea (X, φ_X) un σ-álgebra difuso. Una «variable difusa» es una función difusa $f = (f_e, I_c)$ donde

$$f_e:X \to \mathbb{R}$$

de modo que para cada $\mu \in \varphi_X$ será $f(\mu) \in \varphi_{\mathbb{R}}^*$ tal que

$$f(\mu)(z) = \sup_{f_e(x) = z} \mu(x) = \mu^*\big(f_e^{-1}(x)\big)$$

Entonces, dada una función $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se define la transformación de f a través de g como

$$g \circ f(\mu):X \to [0, 1]$$
$$g \circ f(\mu)(x) = g\big(f(\mu)\big)(x) = f(\mu)\big(g^{-1}(x)\big) =$$
$$= \mu\big(f_e^{-1}(g^{-1}(x)\big) = \sup_{g(z)=x} \mu\big(f_e^{-1}(z)\big)$$

Por ejemplo, si $g(x) = a \cdot x$, para a real no nulo, será

$$a \cdot f(\mu)(x) = \sup_{a \cdot z = z} f(\mu)(z) = f(\mu)(x/a)$$

Y de este modo se obtiene la versión difusa de cualquier operación binaria

$$*:\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \to x * y$$

como la operación $\tilde{*}$ entre propiedades difusas (extendida de $*$) dada por

$$\tilde{*} = (\tilde{*}, I_c):(f_1 \,\tilde{*}\, f_2)(\mu)(z) = \sup_{x * y = z} \min\big(f_1(\mu)(x), f_2(\mu)(y)\big)$$

para cada par de variables difusas f_1 y f_2.

REFERENCIAS

[1] BLIN, J. M. (1977): «Fuzzy Sets in Multiple Criteria Decision Making». *TIMS Studies in the Management Sciences 6*, 129-146.

[2] DUBOIS, D., y PRADE, H. (1980): «Fuzzy Sets and Systems». *Academic Press.*

[3] GOGUEN, J. A. (1967): «Fuzzy Sets». *Journal of Mathematical Analysis and Applications 18*, 145-174.

[4] KLEMENT, E. P. (1980): «Fuzzy σ-álgebras and Fuzzy Measurable Functions». *Fuzzy Sets and Systems 4*, 83-93.

[5] MONTERO, F. J. (1982): «Decisiones *N*-Personales con Opiniones Difusas». *Tesis*. Madrid.

[6] NAHMIAS, S. (1978): «Fuzzy Variables». *Fuzzy Sets and Systems 1*, 97-110.

[7] NOWAKOWSKA, M. (1977): «Methodological Problems of Measurement of Fuzzy Concepts in the Social Sciences». *Behavioral Science 22*, 107-115.

[8] ZADEH, L. A. (1965): «Fuzzy Sets». *Inf. and Control 8*, 338-353.