TRABAJOS DE ESTADÍSTICA Y
DE INVESTIGACION OPERATIVA
Vol. 36. Núm. 2, 1985, pp. 39 a 55

INCERTIDUMBRE E INFORMACION CONDICIONADA

Teófilo Brezmes Brezmes
Pedro Gil Alvarez
Departamento de Matemáticas
Universidad de Oviedo

RESUMEN

En el contexto de información e incertidumbre generalizada, establecido por J. Kampé de Fériet y B. Forte, se axiomatizan las medidas de incertidumbre e información condicionada y se determinan tales medidas bajo la hipótesis de total componibilidad de las mismas.

Palabras clave: información condicionada, incertidumbre condicionada.

ABSTRACT

In the framework of the generalized information and uncertainty, which has been stated by J. Kampé de Fériet and B. Forte, the measures of the conditional information and uncertainty are characterized in the present paper. Then, we determine such measures on the hypothesis of total composition.

Key words: conditional information, conditional uncertainty.

1. Axiomatización

1.1. PRELIMINARES

Sea (Ω, S, ε) un espacio de información a priori (incertidumbre) medible [5], [8], donde Ω es el conjunto de sucesos elementales, S es una clase de subconjuntos de Ω y ε es una familia de particiones (experiencias) Π_A de elementos $A \in S$ con las operaciones de $\cup$ e $\cap$, cerrada respecto a esta última, sobre la que se ha definido una relación de orden: $\Pi_A < \Pi'_A$ (Π_A es menos fina que Π'_A) si $\forall A'_i \in \Pi'_A \ \exists \ A_j \in \Pi_A$ con $A'_i \subset A_j$.

Una medida de incertidumbre H, sobre el espacio (Ω, S, ε), es toda aplicación de ε en $\overline{\mathbb{R}}^+$, verificando*: si $\Pi_A < \Pi'_A$, $H(\Pi_A) \leqslant H(\Pi'_A)$.

Designamos por ε_1 el subconjunto de ε constituido por las particiones $\{A\}$ de elementos A de S que constan de un sólo conjunto. Resulta así, que la restricción de H a ε_1 define una aplicación J de S en $\overline{\mathbb{R}}^+$ tal que $J(A) = H(\{A\})$. J es una medida de información a posteriori (información) en el sentido de J. Kampé de Feriet y B. Forte sobre el espacio $(\Omega, S, \varepsilon_1)$ o simplemente (Ω, ε_1). Sea ε_1^* el subconjunto de ε_1 constituido por los elementos A con $J(A) < +\infty$.

1.2. Definicion

Dado el espacio de incertidumbre medible (Ω, S, ε), sea H una medida de incertidumbre definida sobre él. Llamamos medida de incertidumbre condicionada (información a priori condicionada) sobre (Ω, S, ε), asociada a la medida de incertidumbre H, toda aplicación H^* de $\varepsilon \times \varepsilon_1^*$ en $\overline{\mathbb{R}}^+$, verificando:

A_1. Para todo $B \in \varepsilon_1^*$, la restricción de H^* a $\varepsilon \times B$, $H^*(., B)$, define sobre el espacio de incertidumbre medible $\big(B, S_B, \varepsilon(B)\big)$, donde $S_B = S \cap B$, $\varepsilon(B) = \varepsilon \cap \{B\}$, una medida de incertidumbre H_B^*, es decir, $H_B^* : \varepsilon(B) \to \overline{\mathbb{R}}^+$ con $H_B^*(\Pi_A) = H^*(\Pi_A, B)$ si $\Pi_A \in \varepsilon(B)$, verificando:

a) $H_B^*(\{B\}) = 0$, $H_B^*(\{\phi\}) = +\infty$ (admisión de valores universales).

b) Si $\Pi_A < \Pi'_A$ con $(\Pi_A, \Pi'_A) \in \varepsilon(B) \times \varepsilon(B)$, $H_B^*(\Pi_A) \leqslant H_B^*(\Pi'_A)$.

A_2. La medida de incertidumbre H_Ω^*, que la restricción de H^* sobre $\varepsilon \times \Omega$ induce sobre $\varepsilon(\Omega) = \varepsilon$, coincide con la medida de incertidumbre H, es decir $H_\Omega^* = H$.

A_3. Existe una función $G : \overline{\mathbb{R}}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \overline{\mathbb{R}}^+$, con dominio

$$\Gamma_2 = \{(u, b) : u \geqslant b \geqslant 0,\ u = H(\Pi_A \cap \{B\}),\ b = H(\{B\}) = J(B),\ (\Pi_A, B) \in \varepsilon \times \varepsilon_1^*\}$$

* Se prescinde del axioma de independencia para establecer, como se verá con posterioridad, dicho concepto en función de la incertidumbre condicionada.

y tal que

$$H^*(\Pi_A, B) = G[H(\Pi_{A\cap B}), J(B)]$$

1.3. CONSECUENCIAS Y PROPIEDADES

De la compatibilidad de los axiomas exigidos a H^* resulta, de forma inmediata, la proposición siguiente:

1.3.1. Proposición

Siendo $(\Omega, S, \varepsilon, H)$ un espacio de incertidumbre [5] y G la aplicación de Γ_2 en $\overline{\mathbb{R}}^+$, verificando:

P_1. $G(b, b) = 0$, $G(+\infty, b) = +\infty$

P_2. G es no decreciente respecto a la primera variable

P_3. $G(u, 0) = u$,

la aplicación H^* de $\varepsilon \times \varepsilon_1^*$ en $\overline{\mathbb{R}}^+$, dada por $H^*(\Pi_A, B) = G[H(\Pi_{A\cap B}), J(B)]$, define una medida de incertidumbre condicionada sobre (Ω, S, ε) asociada a H.

1.3.2. Para todo $(\Pi_A, B) \in \varepsilon \times \varepsilon_1^*$, $H^*(\Pi_A, B) = H^*(\Pi_{A\cap B}, B)$

1.3.3. Para todo $(\Pi_A, \Pi'_A) \in \varepsilon \times \varepsilon$ con $\Pi_A < \Pi'_A$ y para todo $B \in \varepsilon_1^*$,

$$H^*(\{A\}, B) \leqslant H^*(\Pi_A, B) \leqslant H^*(\Pi'_A, B)$$

1.3.4. Para todo $B \in \varepsilon_1^*$, $H^*(\{\Omega\}, B) = 0$

1.3.5. Si $\Pi_A = (A_1, A_2, ..., A_n) \in \varepsilon$ y $A_i \in \varepsilon_1^*$, $i = 1, ..., n$, $H^*(\Pi_A, A_i) = 0$

2. Restricción a $\varepsilon_1 \times \varepsilon_1^*$

La restricción de H^* a $\varepsilon_1 \times \varepsilon_1^*$ es una función I, con las siguientes propiedades:

I_1. $I: \varepsilon_1 \times \varepsilon_1^* \to \overline{\mathbb{R}}^+$

I_2. Para todo $B \in \varepsilon_1^*$, la restricción de I a $\varepsilon_1 \times B$, $I(., B)$, define, sobre el espacio de información medible $(B, \varepsilon_1(B))$, una medida de información en el sentido de J. Kampé de Fériet [6], a la que llamaremos $I_B = I(., B)$.

I_3. $I_\Omega = J$

I_4. Existe una función $G_1: \overline{\mathbb{R}}^+ \times \overline{\mathbb{R}}^+ \to \overline{\mathbb{R}}^+$, con dominio

$$\Gamma_2^1 = \{(x, b): x \geqslant b \geqslant 0,\ x = J(A \cap B),\ b = J(B),\ (A, B) \in \varepsilon_1 \times \varepsilon_1^*\}$$

y tal que

$$I(A, B) = G_1[J(A \cap B), J(B)] \tag{1}$$

G_1 es la restricción de la función G a Γ_2^1.

2.1. DEFINICION

Llamaremos medida de información condicionada, sobre el espacio de información medible (Ω, ε_1), asociada a la medida de información J, toda aplicación sobre $\varepsilon_1 \times \varepsilon_1^*$ satisfaciendo las propiedades I_1, I_2, I_3 e I_4.

El concepto de componibilidad para una medida de incertidumbre (información a priori) [5] conduce a la siguiente definición:

2.2. DEFINICION

Diremos que la medida de incertidumbre condicionada H^* es componible sobre el espacio (Ω, S, ε) si existe una función $T: \overline{\mathbb{R}}^+ \times \overline{\mathbb{R}}^+ \to \overline{\mathbb{R}}^+$, con dominio $\Delta_2 = \{(x, y): x = I(A_1, B),\ y = I(A_2, B),\ (A_1, A_2) \in \varepsilon_1 \times \varepsilon_1,\ A_1 \cup A_2 \in \varepsilon_1,\ A_1 \cap A_2 = \phi,\ B \in \varepsilon_1^*\}$ tal que $I(A_1 \cup A_2, B) = T[I(A_1, B), I(A_2, B)]$ para todo $(A_1, A_2) \in \varepsilon_1 \times \varepsilon_1$, $B \in \varepsilon_1^*$ tal que $A_1 \cup A_2 \in \varepsilon_1$ y $A_1 \cap A_2 = \phi$.

También se dice que la medida de información condicionada I, restricción de la medida de incertidumbre condicionada H^* a $\varepsilon_1 \times \varepsilon_1^*$, es componible sobre el espacio de información medible (Ω, ε_1).

La función T recibe el nombre de ley de composición para la restricción de H^* a $\varepsilon_1 \times \varepsilon_1^*$.

Se tiene:

2.3. PROPOSICION

La medida de incertidumbre condicionada H^* es componible sobre el espacio (Ω, S, ε) sí y sólo si para todo $B \in \varepsilon_1^*$, H_B^* (medida de incertidumbre inducida por H^* sobre $\varepsilon(B)$) es componible sobre $(B, S_B, \varepsilon(B))$.

Además, $T(x, y) = T_b(x, y)$ sobre $\Delta_2(B) = \{(x, y){:}x = I_B(A_1),\ y = I_B(A_2),\ A_1 \cap A_2 = \phi,\ (A_1, A_2) \in \varepsilon_1(B) \times \varepsilon_1(B),\ A_1 \cup A_2 \in \varepsilon_1(B)\}$ donde T_b es la ley de composición para la restricción de la medida de incertidumbre H_B^* a $\varepsilon_1(B)$, representada por I_B, y donde $b = J(B)$.

2.4. PROPOSICION

Si la medida de incertidumbre condicionada H^*, asociada a la medida de incertidumbre H, es componible sobre el espacio (Ω, S, ε), H es componible sobre (Ω, S, ε), es decir, $J(A_1 \cup A_2) = F[J(A_1), J(A_2)]$ con $(A_1, A_2) \in \varepsilon_1 \times \varepsilon_1$, $A_1 \cup A_2 \in \varepsilon_1$, $A_1 \cap A_2 = \phi$ y donde J es la restricción de H a ε_1.

Recíprocamente,

2.5. PROPOSICION

Sea H F-componible (componible con ley F) sobre (Ω, S, ε). La medida de incertidumbre condicionada H^* asociada a H es T-componible sí y sólo si

$$G_1[F(x, y), b] = T[G_1(x, b), G_1(y, b)] \quad ; \quad F(x, y) \geqslant b \geqslant 0 \qquad (1)$$

donde G_1 es la función, definida en 2.(1), que determina la medida de información condicionada I, restricción de la medida de incertidumbre condicionada H^* sobre $\varepsilon_1 \times \varepsilon_1^*$.

La ecuación funcional 2.5.(1) puede ser resuelta para los diferentes tipos de componibilidad. Así:

Si F y T son leyes de composición de los tipos M o M' [6], es decir,

$$F(x, y) = \phi[\theta^{-1}(x) + \theta^{-1}(y)]$$

siendo $\theta:[0, \bar{\mu}] \to \overline{\mathbb{R}}^+$, $0 < \bar{\mu} \leqslant +\infty$, con $\theta \in C[0, \bar{\mu}]$, θ estrictamente decreciente,

$\theta(0) = +\infty$, $\theta(\bar{\mu}) = 0$, $\phi(x) = \theta(x)$ si $x \in [0, \bar{\mu}]$, $\phi(x) = 0$ si $x \in [\bar{\mu}, +\infty]$

y

$$T(x, y) = T_b(x, y) = \rho_b[\psi_b^{-1}(x) + \psi_b^{-1}(y)]$$

con $b = J(B) < +\infty$ donde

$$\psi_b:[0, \alpha_b] \to \overline{\mathbb{R}}^+, \ 0 < \alpha_b \leqslant +\infty \quad \text{y} \quad \psi_b \in C[0, \alpha_b]$$

ψ_b estrictamente decreciente

$$\psi_b(0) = +\infty, \ \psi_b(\alpha_b) = 0, \ \rho_b(x) = \psi_b(x) \quad \text{si} \quad x \in [0, \alpha_b],$$
$$\rho_b(x) = 0 \quad \text{si} \quad x \in [\alpha_b, +\infty]$$

y donde

$$\psi_0(x) = \theta\left[\frac{x\bar{\mu}}{\alpha_0}\right]$$

en virtud de $I_3(\bar{\mu} < +\infty, \alpha_0 < +\infty)$,

se tiene:

2.6. TEOREMA

Si $\bar{\mu} < +\infty, \alpha_b < +\infty$ y si $G_1(x, b)$ es continua, la ecuación funcional

$$G_1[F(x, y), b] = T_b[G_1(x, b), G_1(y, b)] \quad ; \quad F(x, y) \geqslant b \geqslant 0 \qquad (1)$$

admite la solución

$$G_1(x, b) = \psi_b\left[\frac{\theta^{-1}(x)\psi_b^{-1}(0)}{\theta^{-1}(b)}\right]$$

que satisface las condiciones P_1, P_2 y P_3 de *1.3.1.* sobre Γ_2^1 y, en consecuencia, define una medida de información condicionada.

Demostración: el resultado se sigue de la solución de la ecuación

$$G_1[\theta(\theta^{-1}(x) + \theta^{-1}(y)), b] = \psi_b[\psi_b^{-1}(G_1(x, b)) + \psi_b^{-1}(G_1(y, b))]$$

$$\psi_b^{-1} \circ g_b \circ \theta(\xi + \eta) = \psi_b^{-1} \circ g_b \circ \theta(\xi) + \psi_b^{-1} \circ g_b \circ \theta(\eta),$$

ecuación de Gauchy [1], y del lema siguiente:

2.7. LEMA

Siendo

$$G_1(x, b) = \psi_b\left[\frac{\theta^{-1}(x)\psi_b^{-1}(0)}{\theta^{-1}(b)}\right] \quad \text{y} \quad F(x, y) \geqslant b,$$

entonces $\theta^{-1}(x)+\theta^{-1}(y)\leqslant\bar{\mu}$ sí y sólo si $\psi_b^{-1}(G_1(x,b))+\psi_b^{-1}(G_1(y,b))\leqslant\alpha_b$.

En particular, si para todo $b < +\infty, \psi_b(x) = \theta(x)$ (las leyes de composición para la restricción de H_B^* a $\varepsilon_1(B)$ y para la restricción de H a ε_1 coinciden para todo $B \in \varepsilon_1^*$), se obtiene el siguiente resultado recogido en [10].

2.8. COROLARIO

Si $\bar{\mu} < +\infty$ y $G_1(x, b)$ es continua, la ecuación funcional

$$G_1[F(x, y), b] = F[G_1(x, b), G_1(y, b)] \quad ; \quad F(x, y) \geqslant b \geqslant 0 \qquad (1)$$

admite la solución

$$G_1(x, b) = \theta\left[\frac{\theta^{-1}(x)\theta^{-1}(0)}{\theta^{-1}(b)}\right]$$

2.9. COROLARIO

Si $\bar{\mu} < +\infty$ y si $\psi_b:[0, \theta^{-1}(b)] \to \bar{\mathbb{R}}^+$ definida por $\psi_b(x) = \theta(x) - b$, que satisface las condiciones exigidas a la función ψ_b de definición de la ley de composición T_b, la ecuación funcional 2.6.(1) admite la solución

$$G_1(x, b) = x - b.$$

Si F y T son leyes de composición del tipo Inferior [6], del estudio de la ecuación funcional 2.8.(1), hecho en [7], se deduce:

2.10 TEOREMA

Si $F(x, y) = \inf(x, y)$ y $T(x, y) = \inf(x, y)$, cualquier función G_1 que satisfaga las propiedades P_1, P_2 y P_3 de *1.3.1* sobre Γ_2^1 es solución de la ecuación funcional *2.5(1)* y define una medida de información condicionada.

Por último, en el sentido establecido en [7], se tiene:

2.11. DEFINICION

Los sucesos A y B son independientes si $I(A, B) = J(A)$, siendo I la medida de información condicionada asociada a J.

Y, en consecuencia:

2.12. PROPOSICION

Si G_1 es estrictamente creciente respecto a la primera variable, los sucesos A y B son independientes sí y sólo si

$$J(A \cap B) = K[J(A), J(B)]$$

siendo $K(x, y) = g_y^{-1}(x)$, con $g_y(x) = G_1(x, y)$.

3. Total componibilidad

Como extensión de los resultados establecidos en [5], se tiene:

3.1. DEFINICION

Una medida de incertidumbre condicionada H^*, asociada a la medida de incertidumbre H, es Π-componible sobre el espacio de incertidumbre medible (Ω, S, ε) si existe una función real no negativa Ψ', con dominio

$$\Gamma'_5 = \{(x, y, z, u, v): x = I(A_1, B),\ y = I(A_2, B),\ z = I(A_1 \cup A_2, B),\ u = \\ = H^*(\Pi_{A_1}),\ v = H^*(\Pi_{A_2}),\ (A_1, A_2) \in \varepsilon_1 \times \varepsilon_1,\ A_1 \cup A_2 \in \varepsilon_1 \\ A_1 \cap A_2 = \phi,\ (\Pi_{A_1}, \Pi_{A_2}) \in \varepsilon \times \varepsilon,\ \Pi_{A_1} \cup \Pi_{A_2} \in \\ \in \varepsilon,\ B \in \varepsilon_1^*\}$$

tal que

$$H^*(\Pi_{A_1} \cup \Pi_{A_2}, B) = \Psi'[I(A_1, B), I(A_2, B), I(A_1 \cup A_2, B), \\ H^*(\Pi_{A_1}, B), H^*(\Pi_{A_2}, B)]$$

para todo $(A_1, A_2) \in \varepsilon_1 \times \varepsilon_1$, $(\Pi_{A_1}, \Pi_{A_2}) \in \varepsilon \times \varepsilon$, $B \in \varepsilon_1^*$ con $A_1 \cup A_2 \in \varepsilon_1$, $A_1 \cap A_2 = \phi$, $\Pi_{A_1} \cup \Pi_{A_2} \in \varepsilon$.

3.2. DEFINICION

Diremos que la medida de incertidumbre condicionada H*, asociada a la medida de incertidumbre H, es totalmente componible sobre el espacio de incertidumbre medible (Ω, S, ε) si es componible y Π-componible.

3.3. PROPOSICION

Si la medida de incertidumbre condicionada H^* es totalmente componible sobre (Ω, S, ε), la ley de Π-composición Ψ' se reduce a una función $\Phi': \Gamma'_4 \to \bar{\mathbb{R}}^+$, con $\Gamma'_4 = \{(x, y, u, v): (x, y, T(x, y), u, v) \in \Gamma'_5\}$ siendo T la ley de composición de H^*. Además se tiene que $\Phi'(x, y, u, v) \geqslant$ $\geqslant T(x, y)$.

De las definiciones establecidas se deduce:

3.4. PROPOSICION

La medida de incertidumbre condicionada H^* es totalmente componible sobre el espacio de incertidumbre medible (Ω, S, ε) sí y sólo si para todo $B \in \varepsilon_1^*$, H_B^* es totalmente componible sobre el espacio $(B, S_B, \varepsilon(B))$.

Además $\Phi'(x, y, u, v) = \Phi_b'(x, y, u, v)$ sobre $\Delta_4(B)$, siendo $\Delta_4(B) = \{(x, y, u, v){:}x = I_B(A_1, y = I_B(A_2), u = H_B^*(\Pi_{A_1}), v = H_B^*(\Pi_{A_2}), (A_1, A_2 \in \in \varepsilon_1(B) \times \varepsilon_1(B), (\Pi_{A_1}, \Pi_{A_2}) \in \varepsilon(B) \times \varepsilon(B), A_1 \cup A_2 \in \varepsilon_1(B), \Pi_{A_1} \cup \Pi_{A_2} \in \in \varepsilon(B), A_1 \cap A_2 = \phi\}$, Φ_b' la ley de total composición de H_B^* sobre $(B, S_B, \varepsilon(B))$ y $b = J(B) < +\infty$.

3.5. COROLARIO

Es condición necesaria para que la medida de incertidumbre condicionada H^*, asociada a H, sea totalmente componible que la medida de incertidumbre H lo sea.

Recíprocamente:

3.6. PROPOSICION

Siendo H^* componible y H totalmente componible con ley de total composición Φ, H^* es totalmente componible con ley Φ' sí y sólo si

$$\begin{gathered}\Phi'[G(x, b), G(y, b), G(u, b), G(v, b)] = G[\Phi(x, y, u, v), b], \\ \Phi(x, y, u, v) \geqslant b \geqslant 0\end{gathered} \tag{1}$$

siendo G la función de definición de H^*.

En consecuencia, siendo H totalmente componible con ley Φ, las funciones G que determinan medidas de incertidumbre condicionada, asociadas a H, totalmente componibles con ley Φ' han de satisfacer la ecuación funcional 3.6.(1).

3.7. En el caso en que H sea totalmente componible, con ley de composición $F(x, y) = \theta[\theta^{-1}(x) + \theta^{-1}(y)]$, $\theta{:}[0, \bar{\mu}] \to \bar{\mathbb{R}}^+$, $\bar{\mu} < +\infty$, en [3] se determina la forma más general de la función Φ, siendo

$$\Phi(x, y, u, v) = \overset{-1}{f}_{\theta^{-1}(x)+\theta^{-1}(y)}[f_{\theta^{-1}(x)}(u) + f_{\theta^{-1}(y)}(v)]$$

donde $f_\xi(u)$ es una función estrictamente monótona en u, verificando

(1) $f_\xi(\theta(\xi)) + f_\eta(\theta(\eta)) \geqslant f_{\xi+\eta}(\theta(\xi+\eta))$ si es creciente, o

(2) $f_\xi(\theta(\xi)) + f_\eta(\theta(\eta)) \leqslant f_{\xi+\eta}(\theta(\xi+\eta))$ si es decreciente.

Si H_B^* fuese totalmente componible sobre $(B, S_B, \varepsilon(B))$, con ley de composición

$$T_b(x, y) = \psi_b[\psi_b^{-1}(x) + \psi_b^{-1}(y)],\ \psi_b{:}[0, \alpha_b] \to \bar{\mathbb{R}}^+,\ \alpha_b < +\infty$$

análogamente se tendría

$$\Phi_b'(x, y, u, v) = h_{b,\psi_b^{-1}(x)+\psi_b^{-1}(y)}^{-1}[h_{b,\psi_b^{-1}(x)}(u) + h_{b,\psi_b^{-1}(y)}(v)]$$

con $h_{b,\xi}(u)$ estrictamente monótona en u, y tal que

(3) $h_{b,\xi}(\psi_b(\xi)) + h_{b,\eta}(\psi_b(\eta)) \geqslant h_{b,\xi+\eta}(\psi_b(\xi+\eta))$ si es creciente, o

(4) $h_{b,\xi}(\psi_b(\xi)) + h_{b,\eta}(\psi_b(\eta)) \leqslant h_{b,\xi+\eta}(\psi_b(\xi+\eta))$ si es decreciente

y la ecuación funcional 3.6.(1) se transformaría en

$$h_{b,\psi_b^{-1}(g_b(x))+\psi_b^{-1}(g_b(y))}^{-1}[h_{b,\psi_b^{-1}(g_b(x))}(g_b(u)) + h_{b,\psi_b^{-1}(g_b(y))}(g_b(v))] =$$
$$= g_b[f_{\theta^{-1}(x)+\theta^{-1}(y)}^{-1}(f_{\theta^{-1}(x)}(u) + f_{\theta^{-1}(y)}(v))]$$

donde $g_b(u) = G(u, b)$.

Como

$$G(x, b) = G_1(x, b) = \psi_b\left[\frac{\theta^{-1}(x)\psi_b^{-1}(0)}{\theta^{-1}(b)}\right],$$

llamando

$$\xi = \theta^{-1}(x), \eta = \theta^{-1}(y), p = f_\xi(u), q = f_\eta(v) \quad \text{y} \quad a_b(\xi) = \frac{\psi_b^{-1}(0)\xi}{\theta^{-1}(b)}$$

resulta:

$$h_{b,a_b(\xi)} \circ g_b \circ f_\xi^{-1}(p) + h_{b,a_b(\eta)} \circ g_b \circ f_\eta^{-1}(q) = h_{b,a_b(\xi+\eta)} \circ g_b \circ f_{\xi+\eta}^{-1}(p+q)$$

Siendo $M(b, \xi, p) = h_{b,a_b(\xi)} \circ g_b \circ f_\xi^{-1}(p)$, la última ecuación se escribe como

$$M(b, \xi, p) + M(b, \eta, q) = M(b, \xi + \eta, p + q) \tag{5}$$

Para cada b fijo, la ecuación 3.7.(5) es la ecuación generalizada de Cauchy, cuya solución, supuesta la continuidad de $M(b, 0, p)$ y $M(b, \xi, 0)$, viene dada [1] por

$$M(b, \xi, p) = c_1(b)\xi + c_2(b)p$$

En definitiva,

$$h_{b,\psi_b^{-1}(G_1(x,b))} \circ g_b(u) = c_1(b)\theta^{-1}(x) + c_2(b)f_{\theta^{-1}(x)}(u)$$

y

$$G(u, b) = h^{-1}_{b,\psi_b^{-1}(G_1(x,b))}[c_1(b)\theta^{-1}(x) + c_2(b)f_{\theta^{-1}(x)}(u)] \tag{6}$$

Las funciones $c_1(b)$ y $c_2(b)$ se determinan a partir de las condiciones

$$G(b, b) = 0 \quad \text{y} \quad G(x, b) = G_1(x, b) = \psi_b\left[\frac{\theta^{-1}(x)\psi_b^{-1}(0)}{\theta^{-1}(b)}\right]$$

obteniéndose

$$c_2(b) = \frac{h_{b,\psi_b^{-1}(G_1(x,b))}(G_1(x, b)) - h_{b,\psi_b^{-1}(G_1(x,b))}(0)}{f_{\theta^{-1}(x)}(x) - f_{\theta^{-1}(x)}(b)} \tag{7}$$

$$c_1(b) = \frac{1}{\theta^{-1}(x)}[h_{b,\psi_b^{-1}(G_1(x,b))}(0) - c_2(b)f_{\theta^{-1}(x)}(b)] \tag{8}$$

independientemente de x.

Por otro lado, el axioma A_2 de 1.2 obliga a que la función $h_{b,\xi}$ satisfaga

$$h^{-1}_{0,\psi_0^{-1}(x)+\psi_0^{-1}(y)}[h_{0,\psi_0^{-1}(x)}(u) + h_{0,\psi_0^{-1}(y)}(v)] =$$
$$= f^{-1}_{\theta^{-1}(x)+\theta^{-1}(y)}[f_{\theta^{-1}(x)}(u) + f_{\theta^{-1}(y)}(v)]$$

obteniéndose

$$h_{0,\psi_0^{-1}(x)}(u) = c_1\theta^{-1}(x) + c_2 f_{\theta^{-1}(x)}(u) \tag{9}$$

donde las constantes c_1 y c_2, obtenidas con $u = 0, u = x$, resultan ser respectivamente $c_1(0)$ y $c_2(0)$. En consecuencia, la función $G(u, b)$ definida por 3.7.(6), (7) y (8) satisface las propiedades P_1, P_2 y P_3 de *1.3.1* que caracterizan a la función de definición de la medida de incertidumbre condicionada, pues

$G(b, b) = 0$

$G(+\infty, b) = +\infty$, dado que G induce sobre Γ_2^1 la función G_1 y $G_1(+\infty, b) = +\infty$

G es no decreciente respecto a la primera variable, ya que $c_2(b) \geqslant 0$ sí y sólo si los sentidos de monotonía de f_ξ y $h_{b,\xi}$ son idénticos

$G(u, 0) = u$, en virtud de 3.7.(9).

Por último, señalemos que de la ley de total composición de H^* y de la función $G(u, b)$ obtenida resulta [4] que

$$H^*(\Pi_A, B) = h^{-1}_{b, \sum_{i=1}^{n} \psi_b^{-1}(I(A_i, B))} \left[\sum_{i=1}^{n} h_{b, \psi_b^{-1}(I(A_i, B))}(I(A_i, B)) \right]$$

donde I es la medida de información condicionada que H^* induce sobre $\varepsilon_1 \times \varepsilon_1^*$, $A_i, i = 1, 2, ..., n$, los elementos de la partición Π_A pertenecientes a ε_1 tales que $A_i \cap B \neq \phi$ y $b = J(B)$.

Hemos probado así el siguiente teorema

3.8. TEOREMA

Si $G(u, b)$ es una función continua, Φ y Φ'_b definidas como en el apartado anterior y si $G_1(x, b) = \psi_b\left[\dfrac{\theta^{-1}(x)\psi_b^{-1}(0)}{\theta^{-1}(b)}\right]$, la ecuación funcional

$$\begin{aligned} &\Phi'_b[G_1(x, b), G_1(y, b), G(u, b), G(v, b)] = \\ &= G[\Phi(x, y, u, v), b], \quad \text{donde} \quad \Phi(x, y, u, v) \geqslant b \geqslant 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

admite como solución

$$G(u, b) = h^{-1}_{b, \psi_b^{-1}(G_1(x, b))}[c_1(b)\theta^{-1}(x) + c_2(b) f_{\theta^{-1}(x)}(u)]$$

con $c_2(b)$ y $c_1(b)$ definidas respectivamente por 3.7.(7) y 3.7.(8). Dicha solución satisface las propiedades P_1, P_2 y P_3 de definición de la medida de incertidumbre condicionada y además $G(x, b) = G_1(x, b)$.

Las distintas elecciones de la función $h_{b,\xi}$ que determina la ley de total composición de la medida H^* conducen a los siguientes resultados:

3.9. COROLARIO

Si $\psi_b(x) = \theta(x)$, y para la elección de Φ'_b como

$$\Phi'_b(x, y, u, v) = f^{-1}_{\theta^{-1}(x)+\theta^{-1}(y)}[f_{\theta^{-1}(x)}(u) + f_{\theta^{-1}(y)}(v)],$$

es decir, si $h_{b,\xi}(u) = f_\xi(u)$, que evidentemente satisface las condiciones 3.7.(3) ó 3.7.(4) por satisfacerlas f_ξ y la condición 3.7.(9) con $c_1 = 0$ y $c_2 = 1$, la ecuación funcional 3.8.(1) admite como solución

$$G(u, b) = f^{-1}_{\theta^{-1}(G_1(x,b))}[c_1(b)\theta^{-1}(x) + c_2(b)f_{\theta^{-1}(x)}(u)]$$

donde según el corolario 2.8

$$G_1(x, b) = \theta\left[\frac{\theta^{-1}(x)\theta^{-1}(0)}{\theta^{-1}(b)}\right]$$

3.10. EJEMPLOS

1.º Sea (Ω, S, J) un espacio de información hiperbólico finito [6]:

$$J(A) = \frac{1}{\mu(A)} - \frac{1}{\mu(\Omega)}, \ \mu \text{ una medida sobre } S$$

$$\theta(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\bar{\mu}} \quad \text{con} \quad \bar{\mu} = \mu(\Omega)$$

Si $\psi_b(x) = \theta(x)$ y $h_{b,\xi}(u) = f_\xi(u) = \xi u$, la medida de incertidumbre

$$H(\Pi_A) = \frac{\sum_i \mu(A_i)J(A_i)}{\sum_i \mu(A_i)}$$

admite como medida de incertidumbre condicionada

$$H^*(\Pi_A, B) = \frac{\sum_i \mu(A_i \cap B) I(A_i, B)}{\sum_i \mu(A_i \cap B)} \quad \text{con} \quad G(u, b) = \frac{u - b}{\bar{\mu} b + 1}$$

2.° Sea (Ω, S, J) un espacio de información de Shannon [6]

$$J(A) = \ln p(A)$$
$$\theta(x) = -\ln x, \; x \in [0, 1]$$

a) Si $\psi_b(x) = \theta(x)$ y $h_{b,\xi}(u) = f_\xi(u) = \xi u$, la medida de incertidumbre de Shannon

$$H(\Pi_A) = \frac{-\sum_i p(A_i) \ln p(A_i)}{\sum_i p(A_i)}$$

admite como medida de incertidumbre condicionada

$$H^*(\Pi_A, B) = \frac{-\sum_i p_B(A_i) \ln p_B(A_i)}{\sum_i p_B(A_i)} \quad \text{con} \quad G(u, b) = u - b$$

b) Si $\psi_b(x) = \theta(x)$ y $h_{b,\xi}(u) = f_\xi(u) = \xi e^{(1-\alpha)u}$ con $\alpha \neq 1$, la entropía de Renyi [9]

$$H(\Pi_A) = \frac{1}{1 - \alpha} \ln \frac{\sum_i [p(A_i)]^\alpha}{\sum_i p(A_i)}$$

admite como medida de incertidumbre condicionada

$$H^*(\Pi_A, B) = \frac{1}{1 - \alpha} \ln \frac{\sum_i [p_B(A_i)]^\alpha}{\sum_i p_B(A_i)} \quad \text{con} \quad G(u, b) = u - b$$

c) Si $\psi_b(x) = \theta(x)$ y $h_{b,\xi}(u) = f_\xi(u) = \xi u - \lambda\xi \ln \xi$ con $\lambda \leqslant 1$ la medida de información a priori de Benvenuti [2]

$$H(\Pi_A) = \frac{\sum_i (1 + \lambda) J(A_i) e^{-J(A_i)}}{e^{-J(A)}} - \lambda J(A)$$

admite como medida de incertidumbre condicionada

$$H^*(\Pi_A, B) = \frac{\sum_i (1 + \lambda) I(A_i, B) e^{-I(A_i, B)}}{e^{-I(A, B)}} - \lambda I(A, B) \quad \text{con} \quad G(u, b) = u - b$$

3.11. COROLARIO

Si $\psi_b(x) = \theta(x) - b$, $\psi_b{:}[0, \theta^{-1}(b)] \to \bar{\mathbb{R}}^+$, $\theta^{-1}(b) < +\infty$ y si la función $h_{b,\xi}$ que determina la ley Φ_b' de total composición de H_B^* viene definida por $h_{b,\xi}(u) = f_\xi(u + b)$, que verifica las condiciones 3.7.(3) ó 3.7.(4) y la condición 3.7.(9) con $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, como fácilmente se comprueba, la ecuación funcional 3.8.(1) admite como solución

$$G(u, b) = u - b$$

que satisface, evidentemente, las condiciones P_1, P_2 y P_3 de *1.3.1.*

3.12. EJEMPLO

Sea (Ω, S, J) un espacio de información hiperbólico finito:

$$J(A) = \frac{1}{\mu(A)} - \frac{1}{\bar{\mu}} \quad \text{con} \quad \bar{\mu} = \mu(\Omega)$$

$$\theta(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\bar{\mu}}$$

Si $\psi_b(x) = \theta(x) - b$ y siendo $f_\xi(u) = u$, la función $h_{b,\xi}(u) = f_\xi(u + b) = u + b$ determina a

$$H^*(\Pi_A, B) = H(\Pi_{A \cap B}) - J(B)$$

como medida de incertidumbre condicionada, asociada a la medida de incertidumbre $H(\Pi_A) = \sum_i J(A_i)$.

REFERENCIAS

[1] ACZEL, J. (1966): «Lecture Notes on Functional Equations and their applications». *New York, Academic Press.*

[2] BENVENUTI, P. (1969): «Sulle soluzioni di un sistema di equazioni funcionali della teoria della informazione». *Rend. Mat.*, serie VI, vol. 2, pp. 108.

[3] BERTOLUZZA, C., y SCHNEIDER, M. (1974): «Informations totalement composables». *Lecture Notes in Math. Théories de l'information.* Springer-Verlag, 398, pp. 90-98.

[4] BREZMES, T. (1980): «Generalización de las medidas de información condicionada de experiencias». *Tesis doctoral.* Oviedo.

[5] FORTE, B. (1969): «Measures of information: the general axiomatic theory». *R.A.I.R.O. Inform. Théor. 2,* pp. 63-90.

[6] KAMPE DE FERIET, J. (1970): «Mesure de l'information fournie par un evenement». *Collq. Internat. C.N.R.S. 186,* Clermont-Ferrand, páginas 191-221.

[7] KAMPE DE FERIET, J. (1976): «L'independance des evenements dans la theorie generalisee de l'information». *Journees Lyonnaises questionnaires C.N.R.S. Groupe 22, 1,* pp. 1-30.

[8] KAMPE DE FERIET, J. (1978): «Les deux points de vue de la theorie de l'information: information a priori, information a posteriori». *Collq. Internat. C.N.R.S. 276,* París, pp. 77-88.

[9] RENYI, A. (1976): «Some fundamental questions of information theory». *Selected Papers of A. Renyi,* vol. 2, Akadémiai Kiado, Budapest. páginas 526-550.

[10] VALVERDE, L. (1979): «Una nota para el estudio de las informaciones condicionadas [σ]-F-aditivas». *Rev. Univ.*, Santander, 2-II, pp. 934-946.