TRABAJOS DE ESTADISTICA Y
DE INVESTIGACION OPERATIVA
Vol. 36. Núm. 1, 1985, pp. 107 a 121

INTEGRALES NORMADAS Y CONORMADAS (GENERALIZACION DE LA INTEGRAL DE SUGENO)

Fermín Suárez García
Pedro Gil Alvarez
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad de Oviedo

RESUMEN

En este trabajo se generaliza ampliamente la integral de Sugeno a partir de la definición de dos familias de integrales difusas, normadas y conormadas, de las que la integral de Sugeno es un caso particular.

El propósito de este trabajo es el estudio de las propiedades de las mencionadas integrales y la relación existente entre ambas familias. También se extienden estas familias de integrales a dominio difuso.

Finalmente se sugiere algunas posibles maneras de utilizar los resultados obtenidos.

Palabras clave: integral difusa de Sugeno, norma triangular, integral normada, integral conormada.

ABSTRACT

In this paper an extensive generalization for Sugeno's fuzzy integral is given by defining two families of fuzzy integrals, a normed family and a conormed one. Sugeno's fuzzy integral is a particular case belonging to both families.

The purpose of this paper is to study the properties for the mentioned integrals and the relationships existing between those families. The extension of these families to a fuzzy domain is also accomplished.

Finally, some possible ways to use the obtained results are suggested in the paper.

Key words: Sugeno's fuzzy integral, normed integral, conormed integral, triangular norm.

Introducción

En el mundo real, a menudo, la incertidumbre surge de la imposibilidad de utilizar datos exactos, de la subjetividad y vaguedad de las fuentes de información, de la imprecisión de los fenómenos a estudiar, etc., y no tiene necesariamente que deberse a la aleatoriedad de los fenómenos, en consecuencia, esta incertidumbre no tiene porqué ser medida a través de una probabilidad. Es en este contexto en el que el presente trabajo trata de ampliar y analizar los aspectos matemáticos de los métodos existentes para medir el grado de borrosidad de un subconjunto $A \subset X$ (A difuso o no). Es decir, sea $A \subset X$ y x un elemento no localizado de X. El grado de borrosidad de A expresa una valoración de la proposición «x pertenece a A». Ver [12] y [13]. Este grado de borrosidad es un tipo de valor medio ponderado o valor esperado con que A contiene a los elementos de X. A. Kandel, [6] lo llama valor difuso esperado (Fuzzy Expected Value). Esta valoración está medida para subconjuntos difusos a partir de la integral de Sugeno y en este trabajo se definen dos familias diferentes pero no disjuntas de integrales difusas cuya única integral común es precisamente la de Sugeno.

En el primer apartado se dan las notaciones y las definiciones previas. En el segundo a partir de la definición de norma triangular, *Schweizer* y *Sklar*, 1963 [10], se define la integral normada y se estudian sus propiedades. En el tercer apartado se introduce la idea de conorma triangular y a partir de ella se define la integral conormada, se estudian sus propiedades y su relación con la integral normada. En el cuarto se extienden las integrales normadas y conormadas a subconjuntos difusos estudiándose sus propiedades.

1. Notaciones y definiciones previas

Sea X un conjunto cualquiera y L un retículo. Un L-subconjunto difuso $\underset{\sim}{A}$ es cualquier aplicación $f_A : X \to L$, *Goguen*, 1967 [5]. Se puede representar por $\underset{\sim}{A} = \{(x, f_{\underset{\sim}{A}}(x))/x \in X\}$. Si tomamos en lugar de L el intervalo real $[0, 1]$, entonces $\underset{\sim}{A}$ se llamará simplemente subconjunto difuso, *Zadeh*, 1965 [16]. En lo que sigue haremos $L = [0, 1]$. Sea $\underset{\sim}{\mathscr{L}}(X)$ la clase de los subconjuntos difusos de X, $\underset{\sim}{\mathscr{L}}(X)$ la podemos ordenar de la siguiente forma: $f \leqslant g \Leftrightarrow f(x) \leqslant g(x), \quad x \in X$.

Para cualesquiera a y b números reales notaremos por $a \vee b = \text{máx}(a, b)$ y por $a \wedge b = \text{mín}(a, b)$. Así mismo definiremos las aplicaciones $(f \vee g)$ y $(f \wedge g)$, punto a punto como sigue:

$$(f \vee g)(x) = f(x) \vee g(x); \quad (f \wedge g)(x) = f(x) \wedge g(x)$$

Siendo f y g aplicaciones de X en R. Además en $\mathscr{L}(X)$ se define el complementario de f y se nota por f' a la aplicación definida punto a punto por:

$$f'(x) = 1 - f(x), \quad \forall x \in X$$

Definición 1.1. Sea β una σ-álgebra de subconjuntos de X. Una función de conjunto $g(\cdot)$ de β en $[0, 1]$, se dice que es una medida difusa si tiene las siguientes propiedades:

1.ª) $g(\phi) = 0$ y $g(X) = 1$

2.ª) Si A y B son elementos de β con $A \subset B \Rightarrow g(A) \leqslant g(B)$

3.ª) Si $A_i \in \beta$, $\forall i \in N$. Sea $(A_i)_{i \in N}$ una sucesión monótona

$$(A_i \subset A_{i+1} \quad \text{ó} \quad A_{i+1} \subset A_i, \quad \forall i \in N)$$

entonces:

$$\lim_{n \to \infty} g(A_n) = g(\lim_{n \to \infty} A_n)$$

Las siguientes funciones de conjunto son ejemplos de medidas difusas.

Ejemplo 1.1. Si X es finito, una función $\text{II}: \mathscr{P}(X) \to [0, 1]$ que cumple:

1.º) $\text{II}(\phi) = 0$, $\text{II}(X) = 1$

2.º) $\forall (A_i)_{i \in N}$ familia de subconjuntos de X se tiene,

$$\text{II}(\bigcup_{i \in N} A_i) = \sup \text{II}(A_i)$$

Verifica las propiedades 1.ª), 2.ª) y 3.ª). Es por tanto una medida difusa que recibe el nombre particular de medida de posibilidad, *Zadeh*, 1978 [18].

Ejemplo 1.2. La función:

$$\mu_{x_0}(A) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases} \qquad \forall A \in \mathcal{P}(X)$$

donde x_0 es un elemento dado de X, se trata también de una medida difusa.

Ejemplo 1.3. Las medidas de probabilidad σ-aditivas definidas como funciones de conjunto sobre [0, 1] que cumplen las siguientes condiciones:

1.º) $A \in \beta \subset \mathcal{P}(X)$; $P(A) \in [0, 1]$; $P(X) = 1$

2.º) $\forall$ sucesión $(A_i)_{i \in N}$, $A_i \in \beta / \cup A_i \in \beta$ con $A_i \cap A_j =$ si $i \neq j$ se verifica:

$$P(\bigcup_{1}^{\infty} A_i) = \sum_{1}^{\infty} P(A_i)$$

Definición 1.2. Sea X un conjunto, β una σ-álgebra contenida en $\mathcal{P}(X)$ y sea $g(\cdot)$ una medida difusa de (X, β), entonces: (X, β, g) se dice que es un espacio de medida difusa.

Definición 1.3. Sea $h: X \to [0, 1]$ y sea $H^h_\alpha = \{x/h(x) \geqslant \alpha\}$. La función h se dice que es β-medible si $H^h_\alpha \in \beta$, $\forall \alpha \in [0, 1]$.

2. Integrales normadas

En 1963 *Schweizer* y *Sklar*, [10], dan la definición de norma triangular.

Definición 2.1. Una norma triangular T es una aplicación de $[0, 1] \times \times [0, 1]$ en $[0, 1]$ que satisface las siguientes condiciones:

a) $T(0, 0) = 0$; $T(a, 1) = a, \forall a \in [0, 1]$

b) $T(a, b) = T(b, a), \forall a, b \in [0, 1]$

c) $T(a, b_1) \leqslant T(a, b_2), \forall a, b_1, b_2 \in [0, 1]$ con $b_1 \leqslant b_2$

d) $T[a, T(b, c)] = T[T(a, b), c]$

Es inmediato comprobar que $T(a, 0) = 0$, $\forall a \in [0, 1]$ ya que:

$$0 \leqslant T(a, 0) \leqslant T(1, 0) = 0$$

Las siguientes aplicaciones son ejemplos de normas triangulares.

Ejemplo 2.1.

$T_{1_1}(a, b) = \text{mín}\,(a, b)$

$T_2(a, b) = a \cdot b$

$T_3(a, b) = \text{máx}\,(0, a + b - 1)$

$T_{4.\,p}(a, b) = 1 - \text{mín}\,\{1, [(1 - a)^p + (1 - b)^p]^{1/p}\}, \forall p \geqslant 1$

$$\mathrm{T}_5(a, b) = \begin{cases} a & \text{si } b = 1 \\ b & \text{si } a = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El operador T_3 se utiliza para definir, punto a punto, la función de pertenencia de la «intersección clara» (bold intersección) de dos subconjuntos difusos, *Giles*, 1976, [4], *Zadeh*, 1977, [17].

El operador $T_{4.\,p}$ ha sido introducido por *R. Yager* en [15] para definir una clase más general de intersecciones. Teniendo en cuenta que $\text{máx}\,(0, a - b) = a - \text{mín}\,(a, b)$ para cualesquiera a y b de $[0, 1]$ se comprueba inmediatamente que $T_{4.\,1}(a, b) = T_3(a, b)$. También es fácil de probar que $T_{4.\,\infty}(a, b) = \lim\limits_{p \to \infty} T_{4.\,p}, (a, b) = T_1(a, b), \forall a, b \in [0,1]$. Sin más que tener en cuenta que $\lim\limits_{p \to \infty} (a^p + b^p)^{1/p} = \text{máx}\,(a, b)$.

El operador T_5 ha sido originalmente estudiado por *Schweizer* y *Sklar* en [10] como una operación de semigrupo e introducido por *Dubois*, 1979 [2] en la teoría de subconjuntos difusos, posteriormente utilizado por *Dubois* y *Prade* [3] para aplicarlo al estudio de las propiedades de los números difusos y por *Masaharu Mizumoto*, [9], para estudiar las propiedades del producto drástico de subconjuntos difusos.

Definición 2.2. Sea el espacio de medida difusa (X, β, g) y sea h una aplicación de X en $[0, 1]$ β-medible. La integral normada T, sobre el subconjunto no difuso $A \in \beta$ de la función h, con respecto a la medida difusa $g(\cdot)$ se representa por:

$$N - \underset{T}{\int_A} h(x) \circ g(.) \text{ y está definida por:}$$

$$N - \underset{T}{\int_A} h(x) \circ g(.) = \sup_{\alpha \in [0,1]} T[\alpha, g(A \cap H^h_\alpha)] \tag{2.1}$$

Siendo $H^h_\alpha = \{x \in X / h(x) \geqslant \alpha\}$

A partir de la definición anterior se obtiene como caso particular la integral de Sugeno [11], [12] y [13], sin más que tomar $T = T_1$ en (2.1).

Sea $\mu_{\underset{\sim}{D}}$ la función de pertenencia del subconjunto difuso $\underset{\sim}{D}$ de X y supongamos que $\mu_{\underset{\sim}{D}}$ es β-medible, entonces haciendo $A = X$, $T = T_1$ y $h = \mu_{\underset{\sim}{D}}$ en (2.1) se obtiene el $FEV(\mu_{\underset{\sim}{D}})$ o valor difuso esperado de $\mu_{\underset{\sim}{D}}$ con respecto a la medida difusa $g(.)$. El $FEV(\mu_{\underset{\sim}{D}})$ ha sido definido por *Kandel*, 1978, [6], [7].

Estudiaremos a continuación algunas propiedades de las integrales normadas. Mientras no se diga lo contrario (X, β, g) será espacio difuso medible y h_i funciones de X en $[0, 1]$ que son β-medibles.

Proposición 2.1. Si $h(x) = a$, $\forall x \in X$ entonces:

$$N - \underset{T}{\int_X} a \circ g(.) = a, \quad \forall a \in [0,1]$$

Luego la integral normada de una constante sobre el conjunto total es la misma constante.

Las siguientes proposiciones nos dan unas interesantes propiedades de monotonía.

Proposición 2.2. Sean h_1 y h_2 tales que $h_1(x) \leqslant h_2(x)$, $\forall x \in X$, entonces se verifica que:

$$N - \underset{T}{\int_A} h_1(x) \circ g(.) \leqslant N - \underset{T}{\int_A} h_2(x) \circ g(.), \quad \forall A \in \beta$$

Corolario 2.1. $\forall A \in \beta$ se tiene:

$$N - \underset{T}{\int_{A}} (h_1 \vee h_2)(x) \circ g(.) \geqslant N - \underset{T}{\int_{A}} h_1(x) \circ g(.) \vee N - \underset{T}{\int_{A}} h_2(x) \circ g(.)$$

Corolario 2.2 $\forall A \in \beta$ se tiene:

$$N - \underset{T}{\int_{A}} (h_1 \wedge h_2)(x) \circ g(.) \leqslant N - \underset{T}{\int_{A}} h_1(x) \circ g(.) \wedge N - \underset{T}{\int_{A}} h_2(x) \circ g(.)$$

Proposición 2.3. Sean A_1 y A_2 elementos de β con $A_1 \subset A_2$ entonces:

$$N - \underset{T}{\int_{A_1}} h(x) \circ g(.) \leqslant N - \underset{T}{\int_{A_2}} h(x) \circ g(.), \quad \forall h \quad \beta\text{-medible}$$

Corolario 2.3. Sean A y B dos elementos cualesquiera de β, se verifica que:

$$N - \underset{T}{\int_{A \cup B}} h(x) \circ g(.) \geqslant N - \underset{T}{\int_{A}} h(x) \circ g(.) \vee N - \underset{T}{\int_{B}} h(x) \circ g(.)$$

Corolario 2.4. Sean A y B dos elementos cualesquiera de β, se verifica que:

$$N - \underset{T}{\int_{A \cap B}} h(x) \circ g(.) \leqslant N - \underset{T}{\int_{A}} h(x) \circ g(.) \wedge N - \underset{T}{\int_{B}} h(x) \circ g(.)$$

Proposición 2.4. Para toda constante a de $[0, 1]$:

$$N - \underset{T}{\int_{X}} (a \vee h)(x) \circ g(.) = a \vee N - \underset{T}{\int_{X}} h(x) \circ g(.)$$

Corolario 2.5. Sea $M = N - \underset{T}{\int_{X}} h(x) \circ g(.)$ y sea h' una función definida:

$$h'(x) = \begin{cases} M & \text{si} \quad x \in H'_M = \{x \mid h(x) < M\} \\ h(x) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

se verifica que:

$$N - \underset{T}{\int_{X}} h(x) \circ g(.) = \mathrm{N} - \underset{T}{\int_{X}} h'(x) \circ g(.)$$

Proposición 2.5. Sea $A \in \beta$. $\forall$ medida difusa $g(.)$ se verifica:

$$N - \underset{T}{\int_{X}} \mu_A(x) \circ g(.) = N - \underset{T}{\int_{A}} 1 \circ g(.) = g(A)$$

Donde μ_A es la función de pertenencia del conjunto A.

Teniendo en cuenta que se cumplen las desigualdades siguientes $T_5(x, y) \leqslant T(x, y) \leqslant T_1(x, y)$, $\forall x, y$ de $[0, 1]$ y $\forall$ norma triangular T, se demuestra la siguiente proposición.

Proposición 2.6. Para cualquiera A de β y T norma triangular:

$$N - \underset{T_5}{\int_{A}} h(x) \circ g(.) \leqslant N - \underset{T}{\int_{A}} h(x) \circ g(.) \leqslant N - \underset{T_1}{\int_{A}} h(x) \circ g(.)$$

3. Integrales conormadas

Definición 3.1. Una aplicación T' de $[0, 1] \times [0,1]$ en $[0, 1]$ se dice que es una conorma triangular si cumple:

$a')$ $T'(1, 1) = 1$; $T'(a, 0) = a$, $\forall a \in [0, 1]$

$b')$ $T'(a, b) = T'(b, a)$, $\forall a, b \in [0,1]$

$c')$ Sean a, b_1 y $b_2 \in [0, 1]$ con $b_1 \leqslant b_2$ $T'(a, b_1) \leqslant T'(a, b_2)$

$d')$ $T'[a, T'(b, c)] = T'[T'(a, b), c]$

De la definición se deduce que $T'(a, 1) = 1, \forall a \in [0, 1]$ ya que:

$$1 = T'(0, 1) \leqslant T'(a, 1) \leqslant T'(1, 1) = 1$$

Consideremos los siguientes ejemplos de conormas triangulares.

Ejemplo 3.1.

$T'_1(a, b) = \text{máx}\,(a, b)$

$T'_2(a, b) = a + b - a.b$

$T'_3(a, b) = \text{mín}\,\{1, (a + b)\}$

$T'_{4.\,p}(a, b) = \text{mín}\,[1, (a^p + b^p)^{1/p}], \quad \forall p \geqslant 1$

$$T'_5(a, b) = \begin{cases} a & \text{si} \quad b = 0 \\ b & \text{si} \quad a = 0 \\ 1 & \text{si} \quad a > 0 \quad \text{y} \quad b > 0 \end{cases}$$

Consideraciones análogas a las hechas para los ejemplos de las normas triangulares se pueden hacer para los de las conormas triangulares.

Teorema 3.1.

T' es una conorma triangular si y sólo si

$$T'(x, y) = 1 - T(1 - x, 1 - y), \quad \forall x, y \in [0, 1]$$

donde T es una norma triangular.

Definición 3.2. Dado el espacio de medida difusa (X, β, g), sea h una función de X en $[0, 1]$ β-medible. La integral conormada T' de la función h, sobre el subconjunto $A \in \beta$, con respecto a la medida difusa $g(.)$ se representa por: $C - \underset{T'}{\int_A} h(x) \circ g(.)$ y se define

$$\underset{T}{\int_A} h(x) \circ g(.) = \inf_{\alpha \in [0,1]} T'[\alpha, g(A \cap H_\alpha^h)]$$

donde $H'^{h}_{\alpha} = \{x | h(x) > \alpha\}$.

A. Kandel, 1978 [6], ha demostrado que la integral de Sugeno

$$\int_A h(x) \circ g(.) = \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge g(A \cap H_\alpha^h)] = \inf_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \vee g(A \cap H_\alpha^h)] =$$

$$= {}^*\inf_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \vee g(A \cap H'^{h}_{\alpha})].$$

En consecuencia, la integral de Sugeno es un caso particular de las integrales conormadas, tomando como conorma $T'_1(x, y) = \text{máx}\,(x, y)$. Veamos a continuación algunas propiedades de las integrales conormadas.

Proposición 3.1. Si $h(x) = a$, $\forall x \in X$, se verifica que:

$$C - \int_{\substack{X\\T'}} a \circ g(.) = a, \quad \forall a \in [0, 1]$$

Proposición 3.2. Sean h_1 y h_2 dos funciones tales que $h_1(x) \leqslant h_2(x)$, $\forall x \in X$, entonces se verifica que:

$$C - \int_{\substack{A\\T'}} h_1(x) \circ g(.) \leqslant C - \int_{\substack{A\\T'}} h_2(x) \circ g(.), \quad \forall A \in \beta$$

Corolario 3.1. Sean h_1 y h_2 dos funciones cualesquiera, entonces se cumple:

a) $$C - \int_{\substack{A\\T'}} (h_1 \vee h_2)(x) \circ g(.) \geqslant C - \int_{\substack{A\\T'}} h_1(x) \circ g(.) \vee C - \int_{\substack{A\\T'}} h_2(x) \circ g(.)$$

b) $$C - \int_{\substack{A\\T'}} (h_1 \wedge h_2)(x) \circ g(.) \leqslant C - \int_{\substack{A\\T'}} h_1(x) \circ g(.) \wedge$$

$$\wedge\ C - \int_{\substack{A\\T'}} h_2(x) \circ g(.), \quad \forall A \in \beta$$

Proposición 3.3. Sean A_1 y A_2 dos elementos de β con $A_1 \subset A_2$. Para cualquier función, h de X en $[0, 1]$ β-medible se tiene que:

$$C - \int_{\substack{A_1\\T'}} h(x) \circ g(.) \leqslant C - \int_{\substack{A_2\\T'}} h(x) \circ g(.)$$

Corolario 3.2. Sean A_1 y A_2 elementos de β $\forall h$ β-medible:

a) $$C - \int_{\substack{A_1 \cup A_2\\T'}} h(x) \circ g(.) \geqslant C - \int_{\substack{A_1\\T'}} h(x) \circ g(.) \vee C - \int_{\substack{A_2\\T'}} h(x) \circ g(.)$$

$$b)\quad C - \int_{\substack{A_1\cap A_2\\ T'}} h(x)\circ g(.) \leqslant C - \int_{\substack{A_1\\ T'}} h(x)\circ g(.) \wedge C - \int_{\substack{A_2\\ T'}} h(x)\circ g(.)$$

Proposición 3.4. Sea $a \in [0, 1)$ constante y h una función de X en $[0, 1]$ β-medible. Se cumple la siguiente igualdad:

$$C - \int_{\substack{A\\ T'}} (a \wedge h)(x)\circ g(.) = a \wedge \mathrm{C} - \int_{\substack{A\\ T'}} h(x)\circ g(.), \quad \forall A \in \beta$$

Corolario 3.3. Sea $M = C - \int_{\substack{A\\ T'}} h(x)\circ g(.)$, y sea h' una función definida:

$$h'(x) = \begin{cases} M & x \in H^h_M = \{x/h(x) \geqslant M\} \\ h(x) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

se verifica que:

$$C - \int_{\substack{A\\ T'}} h(x)\circ g(.) = C - \int_{\substack{A\\ T'}} h(x)\circ g(.)$$

Proposición 3.5. Sea $A \in \beta$. $\forall$ medida difusa $g(.)$ se verifica:

$$C - \int_{\substack{X\\ T'}} \mu_A(x)\circ g(.) = C - \int_{\substack{A\\ T'}} 1\circ g(.) = g(A)$$

Donde μ_A es la función de pertenencia del conjunto A.
Teniendo en cuenta que se verifica que:

$$T'_1(a, b) \leqslant T'(a, b) \leqslant T'_5(a, b), \quad \forall a, b \in [0, 1]$$

$\forall$ conorma triangular T', se demuestra la siguiente proposición.

Proposición 3.6. Para cualesquiera $A \in \beta$, h β-medible y $g(.)$ medida difusa, se cumplen las siguientes desigualdades:

$$C - \int_{\substack{A\\ T'_1}} h(x)\circ g(.) \leqslant C - \int_{\substack{A\\ T'}} h(x)\circ g(.) \leqslant C - \int_{\substack{A\\ T'_5}} h(x)\circ g(.)$$

Para cualquier conorma triangular T'.

Estableceremos la relación que existe entre las integrales normadas y conormadas, sobre iguales subconjuntos, de idénticas funciones y con respecto a la misma medida difusa $g(.)$.

Proposición 3.7. Sea $h{:}X \to [0,1]$ β-medible' $A \in B$, T una norma triangular y T' una conorma triangular, entonces:

$$N - \underset{T}{\int_A} h(x) \circ g(.) \leqslant C - \underset{T'}{\int_A} h(x) \circ g(.)$$

4. Integrales normadas y conormadas sobre subconjuntos difusos

Sea (X, β, g) un espacio difuso medible, denotaremos por $\mathscr{L}_\beta(X)$ el conjunto de los subconjuntos difusos de X β-medibles. Sea h una función de X en $[0,1]$ β-medible. Definimos.

Definición 4.1. Sea el subconjunto difuso $\underset{\sim}{D}$ con $\mu_{\underset{\sim}{D}} \in \mathscr{L}_\beta(X)$.
Se definen:

a) La integral normada extendida a $\underset{\sim}{D}$:

$$\underset{\sim}{N} - \underset{T}{\int_{\underset{\sim}{D}}} h(x) \circ g(.) = N - \underset{T}{\int_X} (h \wedge \mu_{\underset{\sim}{D}})(x) \circ g(.)$$

b) La integral conormada extendida a $\underset{\sim}{D}$:

$$\underset{\sim}{C} - \underset{T'}{\int_{\underset{\sim}{D}}} h(x) \circ g(.) = C - \underset{T'}{\int_X} (h \wedge \mu_{\underset{\sim}{D}})(x) \circ g(.)$$

Siendo T y T' una norma y una conorma triangular respectivamente.

A partir de la definición anterior es fácil probar las siguientes proposiciones.

Proposición 4.1. Si D es un conjunto clásico, es decir, si $\mu_D(x) \in \{0,1\}$, $x \in X$, se verifica:

a) $\underset{\sim}{N} - \underset{T}{\int_D} h(x) \circ g(.) = N - \underset{T}{\int_D} h(x) \circ g(.)$

$$b)\quad \underset{\sim}{C} - \underset{T}{\int_{D}} h(x) \circ g(.) = C - \underset{T'}{\int_{D}} h(x) \circ g(.)$$

Proposición 4.2. Sea $\underset{\sim}{D}_1$ y $\underset{\sim}{D}_2$ elementos de $\mathscr{L}_{\beta}(X)$, se verifica:

$$a)\quad \underset{\sim}{N} - \underset{T}{\int_{\underset{\sim}{D}_1 \cup \underset{\sim}{D}_2}} h(x) \circ g(.) \geqslant \underset{\sim}{N} - \underset{T}{\int_{\underset{\sim}{D}_1}} h(x) \circ g(.) \vee \underset{\sim}{N} - \underset{T}{\int_{\underset{\sim}{D}_2}} h(x) \circ g(.)$$

$$b)\quad \underset{\sim}{C} - \underset{T'}{\int_{\underset{\sim}{D}_1 \cup \underset{\sim}{D}_2}} h(x) \circ g(.) \geqslant \underset{\sim}{C} - \underset{T'}{\int_{\underset{\sim}{D}_1}} h(x) \circ g(.) \vee \underset{\sim}{C} - \underset{T'}{\int_{\underset{\sim}{D}_2}} h(x) \circ g(.)$$

$$c)\quad \underset{\sim}{N} - \underset{T}{\int_{\underset{\sim}{D}_1 \cap \underset{\sim}{D}_2}} h(x) \circ g(.) \leqslant \underset{\sim}{N} - \underset{T}{\int_{\underset{\sim}{D}_1}} h(x) \circ g(.) \wedge \underset{\sim}{N} - \underset{T}{\int_{\underset{\sim}{D}_2}} h(x) \circ g(.)$$

$$d)\quad \underset{\sim}{C} - \underset{T'}{\int_{\underset{\sim}{D}_1 \cap \underset{\sim}{D}_2}} h(x) \circ g(.) \leqslant \underset{\sim}{C} - \underset{T'}{\int_{\underset{\sim}{D}_1}} h(x) \circ g(.) \wedge \underset{\sim}{C} - \underset{T'}{\int_{\underset{\sim}{D}_2}} h(x) \circ g(.)$$

Conclusiones

Es posible, ahora, ampliar la definición de *E. Trillas* y *N. Batle* [14], para la medida de entropía de subconjuntos difusos cualesquiera a partir de las integrales normadas y conormadas como sigue:

$$d_N(\underset{\sim}{A}) = N - \underset{T}{\int_{X}} \Delta[\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)] \circ g(.) \quad , \quad d_C(\underset{\sim}{A}) = C - \underset{T'}{\int_{X}} \Delta[\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)] \circ g(.)$$

Siendo Δ la función definida por *Knopfmacher* en [8], normalizada.

Se han aumentado las posibilidades de elección para medir la borrosidad de un subconjunto difuso, en cada caso, dependiendo de las circunstancias subjetivas del observador y a la vista de las propiedades anteriormente expuestas utilizará una u otra integral.

Sugerimos la siguiente regla de comportamiento:

Si interesa que exista una conexión entre α y la medida $g(H_{\alpha}^{h})$, $\forall \alpha \in [0, 1]$ puede ser útil emplear operadores interactivos como T_2 o T'_2, estos un cambio de α o de $g(H_{\alpha}^{h})$ implica un cambio de $T[\alpha, g(H_{\alpha}^{h})]$ o de $T[\alpha, g(H_{\alpha}^{h})]$.

Por el contrario utilizando operadores no interactivos como T_1 o T'_1 un cambio de α o de $g(H^h_\alpha)$ no implica necesariamente un cambio de $T[\alpha, g(H^h_\alpha)]$ o de $T'[\alpha, g(H^h_\alpha)]$.

BIBLIOGRAFIA

[1] DE LUCA, A., y TERMINI, S. (1979): «Entropy and Energy Measures of a Fuzzy set», en *Advances in fuzzy set theory and applications* (M. M. Gupta, R. K. Ragade y R. R. Yager, eds.) (pp. 321-338). North Holland Publ. Amsterdam.

[2] DUBOIS, D. (1979): «Quelques classes d'operateurs remarquables pour combiner des ensembles flous». *Busefal, Automne* (pp. 29-35).

[3] DUBOIS D., y PRADE H. (1981): «Additions of interactive fuzzy numbers». *IEEE. Trans. Auto. Contr. AC-26* (pp. 926-936).

[4] GILES, R. (1976): «Lukasiewicz logic and fuzzy theory». *Int. J. Man-Mach Studies 8* (pp. 313-327).

[5] GOGUEN, J. (1967): «L-Fuzzy sets». *J. of Math. Anal. Appl. 18* (pp. 145-174).

[6] KANDEL, A. (1978): «Fuzzy statistics and forecast evaluatión IEEE». *Trans. Syst. Man. Cybern. 8,* n.° 5 (pp. 396-401).

[7] KANDEL, A. (1979): «On fuzzy statistics», en *Advances in fuzzy set theory and applications* (M. M. Gupta, R. K. Ragade y R. R. Yager, eds.) (pp. 181-199). North Holland Publ. Amsterdam.

[8] KNOPFMACHER, J. (1975): «On measure of fuzzines». *J. of Math. Anal. Appl.* (pp. 529-534).

[9] MIZUMOTO, M. (1981): «Fuzzy sets and their operations II». *Inform. Contr. 50,* n.° 2 (pp. 160-174).

[10] SCHWEIZER, B., y SKLAR, A. (1963): «Associative functions and abstract semi-groups.». *Publ. Math. Debrecen 10* (pp. 69-81).

[11] SUGENO, M. (1974): «Theory of fuzzy integral and its applications». *Ph. D. Thesis Tokyo Ins. of Technol. Tokyo.*

[12] SUGENO, M. (1977): «Fuzzy measures and fuzzy integrals: A survey». en *Fuzzy automata and decision processes* (M. M. Gupta, G. N. Saridis, y B. R. Gaines, eds.) (pp. 88-102) North-Holland Publ. Amsterdam.

[13] TERANO, T., y SUGENO M. (1979): «Conditional fuzzy measures and their applications», en *Fuzzy sets and their applications toccognitive and decision processes* (L. A. Zadeh, K. S. Fu y M. Shimura, eds.)

[14]TRILLAS, E., y BATLE, N. (1979): «Entropy and fuzzy integral». *J. Math. Anal. Appl. 69*, n.º 2 (pp. 469-474).

[15] YAGER, R. (1980): «On a general class of fuzzy connectives». *Int. J. Fuzzy Sets Syst.*, n.º 3 (pp. 235-242).

[16] ZADEH, L. A. (1965): «Fuzzy sets». *Inform. Contr. 8* (pp. 338-353).

[17] ZADEH, L. A. (1977): «Theory of fuzzy sets Memo». *UCB/ERL M77/1*. Berkeley.

[18] ZADEH, L. A. (1978): «Fuzzy sets as basis for a theory of possibility». *Int. J. Fuzzy Sets Syst.*, n.º 1 (pp. 3-28).

CLASIFICACION AMS: 03E72