TRABAJOS DE ESTADISTICA Y
DE INVESTIGACION OPERATIVA
Vol. 36. Núm. 1, 1985, pp. 62 a 77

LA APROXIMACION GEOMETRICO-SECUENCIAL EN LOS PROBLEMAS DE OPTIMIZACION DINAMICOS: I. EL PRINCIPIO DE MAXIMO PUNTUAL

Miguel Martín Dávila
Departamento de Estadística e I.O.
Facultad de CC. Matemáticas
Universidad Complutense
Madrid

RESUMEN

En este artículo introducimos una nueva metodología para la generación de condiciones necesarias en problemas de optimización dinámicos.

Denominamos a esta metodología la *aproximación secuencial* en contraposición a la *aproximación puntual* clásica y mostramos cómo obtener un principio de máximo puntual con este método.

Palabras clave: conos convexos, vectores tangentes, principio de máximo.

SUMMARY

In this article we introduce a new methodology in the generation of necessary conditions in dynamic optimization problems.

We denominate this methodology the *sequential approach* in contraposition to the classical *punctual approach* and show how to derive a punctual maximum principle with this method.

Key words: convex cones, tangent vectors, maximum principle.

1. Introducción. Planeamiento del problema

En este trabajo se presenta una demostración de un *principio de máximo puntual* que constituye la primera fase de una demostración completa del principio de máximo de Pontryaguin, tal como se propone en la referencia [5], empleando una nueva metodología que hemos denominado *aproximación geométrico-secuencial.*

El espíritu de esta aproximación sigue siendo el de buscar la caracterización de las condiciones necesarias de optimalidad mediante la separación de un cierto cono de tangentes y una determinada dirección, definidos ambos en el espacio de fase del problema. Es por esto por lo que hemos calificado a la anterior aproximación de *geométrica.*

Pero, a diferencia de lo que se suele hacer, en general, proponemos que este enfoque geométrico se complemente con un análisis *secuencial* en vez de *puntual* del problema.

No nos extenderemos aquí, sin embargo, en las diferencias y problemas originados al adoptar uno u otro enfoque, ya que esta cuestión se analiza con detalle en la referencia [4], a la que nos remitimos. En todo caso, las ventajas de la aproximación secuencial quedarán patentes una vez que mostremos que se puede llevar a cabo, de una manera más sencilla y directa de lo que suele ser habitual, la demostración del principio fundamental en la optimización dinámica, lo que, en una primera fase, pondremos de manifiesto en este artículo.

Empezaremos, en primer lugar, con el planteamiento del problema que vamos a investigar aquí, así como el enunciado de las hipótesis que se admitirán sobre todas las funciones implicadas.

Este problema que vamos a plantear a continuación no es, desde luego, el más general posible, pero nuestro interés está no tanto en la generalidad del resultado a establecer, sino en la novedad de la metodología empleada, para mostrar la cual nos hemos limitado a seleccionar la versión clásica del principio de máximo, tal como se enuncia en la página 81 de la referencia [5].

(1) Problema de control óptimo:

Minimizar: $$x_0(t_1) = \int_0^{t_1} f_0(x(s), u(s))\, ds$$

sujeto a: $$x(t) = x(0) + \int_0^{t} f(x(s), u(s))\, ds$$

para todo $0 \leqq t \leqq t_1$, en donde las integrales se entienden en el sentido de

Lebesgue, con $t_1 \geqq 0$ arbitrario, $u(\cdot) \in \Delta$, $u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m$, para todo t, y la condición de contorno:

$$x(t_1) = x^{(1} \in \mathbb{R}^n$$

La clase Δ de funciones $u(\cdot)$ incluiría, como mínimo, a aquéllas verificando las siguientes propiedades:

(2) (i) Todas las funciones $u(\cdot)$ se suponen medibles y acotadas.

(ii) Si $u(\cdot) \in \Delta$ para $0 \leqq t \leqq t_1$, $\omega \in \Omega$, y t', t'' son tales que $0 \leqq t' < t'' \leqq t_1$, el control $u^{\&}(t)$, $0 \leqq t \leqq t_1$, definido de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} u^{\&}(t) &= u(t), \quad \text{si } 0 \leqq t \leqq t' \\ &= \omega, \qquad \text{si } t' < t \leqq t'' \\ &= u(t), \quad \text{si } t'' < t \leqq t_1 \end{aligned}$$

pertenecería también a Δ.

(iii) Si el intervalo $0 \leqq t \leqq t_1$ se particiona por medio de puntos de subdivisión en un número finito de subintervalos, en cada uno de los cuales el control $u(t)$ perteneciera a Δ, entonces este control sería también de Δ si se considerara en el intervalo completo $0 \leqq t \leqq t_1$. Además, un control obtenido a partir de otro control de Δ, $u(t)$, en $0 \leqq t \leqq t_1$, por una traslación en el tiempo, es decir, el control $u^{\&}(t) = u(t - \alpha)$, $\alpha \leqq t \leqq t_1 + \alpha$, también pertenecería a Δ.

Estas condiciones reproducen las que se proponen en las páginas 75 y 76 de la referencia [5].

Denotaremos por $\hat{f}$ a la función vectorial de $n + 1$ componentes: $f_0, f_1, ..., f_n$, y por $\hat{x}$ la vector de $n + 1$ componentes: $x_0, x_1, ..., x_n$.

(2') Respecto a $\hat{f}$ supondremos que es continua en $\mathbb{R}^n \times \bar{\Omega}$ y con derivadas parciales continuas respecto a las x_i, $i = 1, 2, ..., n$, en $\mathbb{R}^n \times \bar{\Omega}$, en donde $\overline{\{\cdot\}}$ denota la clausura del conjunto $\{\cdot\}$.

Un conjunto que desempeñará, como referencia, un papel principal en el análisis será el siguiente:

(3) $C = \{\hat{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid$ Existe $u(\cdot) \in \Delta$, definida en $0 \leqq t \leqq t_1$, con $u(t) \in \Omega$, para todo t, de manera que:

$$\hat{x}(t) = \hat{x}(0) + \int_0^t \hat{f}(x(s), u(s))\, ds$$

para todo t, $0 \leqq t \leqq t_1$, con $x_0(0) = 0$, $\hat{x}(t_1) = \hat{x}\}$.

El conjunto C recibe el nombre de *conjunto de accesibilidad* para el problema (1), y es inmediato que si $\bar{u}(t)$, en $0 \leqq t \leqq \bar{t}_1$, es un control óptimo, entonces el punto:

$$\hat{\bar{x}} = \hat{x}(0) + \int_0^{t_1} \hat{f}(x(t), u(t))\, dt$$

con $x_0(0) = 0$, pertenecería necesariamente a la que denominaremos *frontera inferior del conjunto C respecto a su primera coordenada*, que definiremos como el conjunto I siguiente:

$$I = \{\hat{x} \in C \mid \text{No existe } \hat{x}^* \in C, \text{ de manera que } x^* = x \text{ y } x_0^* < x_0\} \tag{4}$$

Obsérvese que el conjunto I sería vacío si C fuera abierto, y que, en cualquier caso, sería un subconjunto de la *frontera* de C.

Además, se puede demostrar también sin dificultad que no sólo el punto terminal $\hat{\bar{x}}$, sino toda la trayectoria óptima debería estar contenida en I para todo t: $0 \leqq t \leqq \bar{t}_1$.

Se puede establecer, pues, el siguiente resultado:

(5) **Lema.** Si $\hat{\bar{x}}(t)$, para $0 \leqq t \leqq \bar{t}_1$, es una trayectoria óptima para el problema (1), entonces:

$$\{\hat{\bar{x}}(t) \mid 0 \leqq t \leqq \bar{t}_1\} \subset I$$

Demostración. Si para algún t el $\hat{\bar{x}}(t)$ correspondiente no perteneciera a I, no habría dificultad en comprobar que debería de existir un punto $\hat{x}^* \in C$, con $x^* = x(t)$ y $x_0^* < x_0(t)$, lo que, recordando las condiciones (2) y el hecho de que $\hat{f}$ no depende de x_0, permitiría construir una nueva función de control $u^*(t)$, con trayectoria asociada que pasaría por el punto $\hat{x}^*$ y con punto terminal $\hat{x}^*(t_1^*)$, de manera que:

$$x^*(t_1) = x^{(1} \quad \text{y} \quad x_0^*(t_1^*) < \bar{x}_0(\bar{t}_1)$$

lo que contradiría la minimalidad de $\bar{x}_0(t_1)$.

La caracterización de I sería, por tanto, fundamental en la determinación de condiciones necesarias en todos los puntos de la hipotética trayectoria óptima.

Sin embargo, el hecho de que C puede ser, en general, arbitrario, y por tanto, también I, introduce grandes dificultades en la posible caracterización de sus puntos. Por ello, se suele plantear el análisis en determinados subconjuntos del C, aunque lo suficientemente amplios para obtener resultados significativos. En esta línea hemos considerado también, por nuestra parte, subconjuntos adecuados del C, aunque en esta aproximación hemos introducido algunos retoques de detalle, como más adelante mostraremos.

Ahora, por otra parte, como hemos evitado el *enfoque puntual* clásico, lo que implicaría la verificación de condiciones adicionales en relación a los subconjuntos de C a considerar (ver al respecto la discusión que se expone en la referencia [4]), estos subconjuntos, en nuestro enfoque, se pueden plantear y manejar de una manera más sencilla.

Los elementos básicos de trabajo en esta nueva metodología y las complicaciones propias que su utilización conlleva, se analizan sucintamente en la sección siguiente.

2. La aproximación geométrico-secuencial

Mediante el que denominamos *enfoque secuencial* pretendemos plantear una aproximación a la generación de condiciones necesarias en la teoría de la optimización tanto estática como dinámica.

La diferencia esencial entre esta aproximación y la que, en contraposición, denominamos *puntual*, es la de que en el enfoque secuencial la caracterización se pretende establecer no en el punto en cuestión, en el conjunto de accesibilidad en el espacio de fase, sino mediante una secuencia de puntos convergente al anterior. Esto evitaría el tener que definir conos especiales de tangentes en el propio punto para poder garantizar su separación, pudiendo considerar subconjuntos de los usuales conos de tangentes, y además de esta manera podría plantearse el establecimiento de condiciones necesarias de optimalidad aun en puntos para los que no se pudieran definir los conos especiales de tangentes a que nos hemos referido antes, con tal que estos subconjuntos convexos de los conos de tangentes usuales pudieran considerarse cerrados.

Un análisis más detallado de este nuevo enfoque se desarrolla en la referencia [4]. En dicha referencia se demuestra el siguiente Lema que es básico en la puesta en práctica de esta metodología y cuya demostración no repetiremos aquí:

(6) **Lema fundamental.** Sea Λ un subconjunto cerrado de puntos $\hat{x}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$, no necesariamente convexo. Supongamos que para todo $\hat{x}^* \in \Lambda$ existe un conjunto de vectores $L_{\hat{x}^*}$ definido de la siguiente manera:

$$L_{\hat{x}^*} = \{\hat{w} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \hat{w} \in \{\hat{v} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \hat{v} = \lim_{\delta \downarrow 0,\ \hat{x}(\delta) \in \Lambda} (\hat{x}(\delta) - \hat{x}^*/\delta\})\} \tag{7}$$

el cual es convexo e incluye al vector $\hat{0}$.

Entonces, si $\hat{\hat{x}}$ pertenece a la frontera inferior de Λ respecto a la primera coordenada de sus puntos, x_0, existe una sucesión de puntos $\{\hat{x}^{(k}. k \in \mathbb{N}\}$, y una sucesión de vectores $\{\hat{\eta}^{(k}, k \in \mathbb{N}\}$ en $\mathbb{R}^{n+1}$, no nulos, de manera que $\eta_0^{(k} < 0$, para todo $k \in \mathbb{N}$, con:

$$\hat{\eta}^* \cdot \hat{w} \leqq 0, \quad \text{para todo} \quad \hat{w} \in L_{\hat{x}}^{(k} \text{ y todo } k \in \mathbb{N}, \tag{8}$$

y tal que $\lim_k \hat{x}^{(k} = \hat{\hat{x}}$.

Como se sigue del enunciado del lema (6), su aplicación exige la definición de los conos convexos de vectores tangentes $L_{\hat{x}^*}$ en cada punto $\hat{x}^* \in \Lambda$ y que además Λ sea cerrado.

Estas exigencias introducen algunas dificultades debido al hecho de que, para garantizar la pertenencia del punto $\hat{\hat{x}}$ a investigar a la frontera inferior de Λ, es conveniente definir dicho conjunto Λ con ciertas restricciones, y la verificación sin holguras de dichas restricciones en algunos puntos de Λ no permitiría definir en dichos puntos los correspondientes conjuntos $L_{\hat{x}^*}$ de una manera significativa.

Para evitar esta dificultad, en nuestra demostración del principio de máximo consideraremos, en vez de la función objetivo original, una función objetivo perturbada, la cual se optimizaría, de todas formas, para el mismo control óptimo respecto a la función original que se pretendiera caracterizar.

Mediante esta modificación de la función objetivo se podría entonces traducir la existencia de una sucesión de puntos de Λ convergente al $\hat{\bar{x}}$ investigado, en los cuales no se pudieran definir los adecuados conos convexos de tangentes, en una condición operativa que facilitaría el posterior establecimiento de la existencia del hiperplano separador adecuado.

En esta línea, en la siguiente sección desarrollaremos la primera parte de la demostración de un principio de máximo en cada punto del intervalo $(0, \bar{t}_1)$. Este desarrollo incluirá la definición de conjuntos de accesibilidad convenientes y la discusión de la posibilidad de definición de conjuntos del tipo (7) en cada punto de sus clausuras.

3. Definición y caracterización de los conjuntos de accesibilidad

De aquí en adelante supondremos que la función de control $\bar{u}(t)$, para $0 \leqq t \leqq t_1$, y la trayectoria asociada $\hat{\bar{x}}(t)$, son óptimos para el problema (1).

Es inmediato entonces que también constituirían una solución óptima del nuevo problema planteado mediante la sustitución de la función objetivo original por la siguiente:

$$\int_0^{t_1} f_0(x(s), u(s))\, ds + \int_0^{\bar{t}_1} s \cdot (u(s) - \bar{u}(s))^2\, ds \tag{9}$$

supuestas invariables las restantes condiciones del problema (1). Esto convertiría, desde luego, el problema en uno no autónomo.

Sea entonces $\Omega \neq \phi$ y consideremos ahora la sucesión de conjuntos siguiente:

$$A^{(k} = \left\{ u \in \Omega \subset \mathbb{R}^m \mid \sum_{i=1}^{m} u_i^2 \leqq k \right\} \tag{10}$$

para $k \in \mathbb{N}$ y $k \geqq \sum_{i=1}^{m} \bar{u}_i(0)^2$, y sea $\{D^{(k}, k \in \mathbb{N}\}$ una sucesión paralela de subconjuntos densos y numerables en el correspondiente $A^{(k}$.

Sea, por otra parte, $\{D^{(kh}, h \in \mathbb{N}\}$ una sucesión creciente de conjuntos finitos tales que

$$\bigcup_{h \in \mathbb{N}} D^{(kh} = D^{(k}$$

y de manera que cada $D^{(kh}$ contenga a lo más h elementos.

Supongamos, pues, que $\hat{\hat{x}}(t)$, para $0 < t < \bar{t}_1$ es un punto intermedio de una trayectoria óptima del problema (1), y por tanto también de (1) cuando la función objetivo se sustituye por la (9).

Vamos a construir, para cada k y h fijos, un conjunto de puntos accesibles desde el $\hat{\hat{x}}(t)$ mediante funciones de control constantes a trozos, de manera que se pueda garantizar la pertenencia de $\hat{\hat{x}}(t)$ a la frontera inferior respecto a x_0 de la clausura del conjunto anterior.

Para ello consideraremos una colección de números no negativos b_{ij}, $i = 1, 2, ..., p$, y $j = 1, 2, ..., h$, y los números a_j, $j = 0, 1, ..., h$, definidos de la siguiente manera:

$$a_j = a_{j-1} + \sum_{i=1}^{p} b_{ij}$$

con $a_0 = 0$.

A dicha colección le haríamos corresponder la función de control constante a trozos $u_{ap}(s)$ definida de la siguiente manera:

$$u_{ap}(s) = u^{(j}, \text{ si } a_{j-1} \leqq s \leqq a_j, \; j = 1, 2, ..., h$$

en donde alguno de los $u^{(j}$ podría, eventualmente, repetirse.

Obsérvese, además, que la redundancia introducida en la definición anterior sería irrelevante porque el conjunto (finito) de puntos implicados tendría medida de Lebesgue nula.

Por otro lado, supondremos también que $a_{ph} < \tau < \bar{t}_1 - t$.

Entonces, si denotamos por $f_0^{(*}$ a la función:

$$f_0^{(*}((x(s), u(s)) = f_0(x(s), u(s)) + (s + t)(u(s) - \bar{u}(s + t))^2 \qquad (11)$$

y por $0\hat{f}^{(*}$ a la función $\hat{f}$, supuesta sustituida f_0 por $f_0^{(*}$, el conjunto de puntos accesibles desde $\hat{x}(t)$ a que nos referimos, y que denotaremos por $C_{t,*}^{(kh}$, sería el de $\hat{x}^* \in \mathbb{R}^{n+1}$ de manera que existiera una función $\hat{x}^*(s)$ definida en $0 \leqq s \leqq a_{ph}$ tal que

$$x^*(s) = \hat{x}(t) + \int_0^s 0\hat{f}^{(*}(x(z), u_{ap}(z))\, dz \tag{12}$$

con $\hat{x}^*(a_{ph}) = \hat{x}^*$ y de forma que exista $\sigma > 0$ con:

$$\sum_{i=0}^{n} (x_i^*(s) - \hat{x}_i(t))^2, \quad \text{para todo } 0 \leqq s \leqq a_{ph} \tag{13}$$

Nótese que la existencia y unicidad de la trayectoria $\hat{x}^*(s)$ estaría garantizada por las condiciones (2′) (ver al respecto el apéndice sobre ecuaciones diferenciales de la referencia [2] o el capítulo IX de la referencia [3]).

Nuestro primer objetivo es el de probar el siguiente resultado:

(14) **Lema.** Si $\hat{x}(t)$, obtenida para el control $\bar{u}(t)$ en $0 \leqq t \leqq \bar{t}_1$, es una trayectoria óptima para el problema (1) y se verifican las condiciones (2) y (2′), entonces $\hat{x}(t)$ es, para todo t: $0 < t < \bar{t}_1$, un punto perteneciente a la frontera inferior respecto a su primera coordenada del conjunto $\bar{C}_{t,*}^{(kh}$, clausura del $C_{t,*}^{(kh}$ indicado antes.

Demostración. La demostración consiste en comprobar que si $\hat{x}^{\&} \in \bar{C}_{t.}^{(kh}$ se podría construir una función $\hat{x}^{\&}(s)$ definida en cierto subintervalo $0 \leqq s \leqq a_h^{\&} \leqq \tau$ y correspondiente a una función de control $u_a^{\&}(s)$, perteneciente a Δ, con valores en $D^{(kh}$, de manera que

$$\hat{x}^{\&}(s) = \hat{x}(t) + \int_0^s \hat{f}^*(\hat{x}^{\&}(z), u_a^{\&}(z))\, dz \tag{15}$$

para todo s: $0 \leqq s \leqq a_h^{\&}$, con $\hat{x}^{\&}(a_h^{\&}) = \hat{x}^{\&}$.

Así, si $x^{\&} = \bar{x}(t)$ y $x_0^{\&} < \bar{x}_0(t)$ se contradiría el lema (5), el cual subsiste, por supuesto, para el conjunto obtenido de la misma manera que el C dado por (3), pero considerando sólo $t_1 \geqq \bar{t}_1$ y con $f_0^{(\&} = f_0 + s \cdot (u(s) - \bar{u}(s))^2$ en lugar de f_0, conjunto de accesibilidad que denotaremos por $C^{(\&}(\bar{t}_1)$, puesto que si existiera un t, $0 \leqq t \leqq \bar{t}_1$, de manera que no perteneciera a la frontera inferior del nuevo conjunto $C^{(\&}(\bar{t}_1)$ se seguiría entonces, necesariamente, debido a la positividad de $s \cdot (u(s) - \bar{u}(s))^2$, la no pertenencia de $\hat{\bar{x}}(t)$ a I en contradicción con (5).

En cuanto a la obtención de las funciones límite $u_a^{\&}(s)$, $\hat{x}^{\&}(s)$ y la verificación de su conexión mediante una ecuación como la (15), el procedimiento a seguir sería el siguiente:

En primer lugar, se observaría que de $\hat{x}^{\&} \in \bar{C}_{t,*}^{(kh}$ se seguiría la existencia de una sucesión $\{\hat{x}^{(r}, r \in \mathbb{N}\}$ en $C_{t,*}^{(kh}$ convergente a $\hat{x}^{\&}$, a la que estarían asociadas las funciones $\hat{x}^{(r}(s)$ y los controles $u_{ap_r}(s)$ definidos como $u^{(j}$ en los intervalos $a_{j-1}^{(r} \leqq s \leqq a_j^{(r}$, $j = 1, 2, ..., h$.

No habría dificultad, a la vista de la acotación (13) y de la definición del $A^{(k}$, en probar la equicontinuidad de la sucesión de funciones continuas $\hat{x}^{(r}(s)$ prolongadas a la totalidad del intervalo $[0, \tau]$ haciendo $\hat{x}^{(r}(s) = x^{\&}$ para $s \geqq a_h^{(r}$, y además su acotación uniforme. Por tanto, la aplicación del teorema de Arzelà (ver, por ejemplo, la referencia [1], pág. 102), mostraría la existencia de una subsucesión, que seguiremos denotando por $\hat{x}^{(r}(s)$, convergente a una función continua $\hat{x}^{\&}(s)$ en $0 \leqq s \leqq \tau$.

Restringidos a dicha subsucesión se podría seleccionar entonces una serie de h subsucesiones sucesivamente encajadas de las $a_j^{(r}$, $j = 1, 2, ..., h$, de manera que para la última de todas ellas se garantizara la convergencia de cada $a_j^{(r}$ a unos determinados límites $a_j^{\&}$.

Es inmediato que $a_{j-1}^{\&} \leqq a_j^{\&}$, y que la correspondiente sucesión de funciones de control $u_{ap_r}^{(r}(s)$, ampliadas al intervalo completo $[0, \tau]$ haciendo $u_{ap_r}^{(r}(s) = u^{(h}$, para $s \geqq a_h^{(r}$, convergerá casi seguramente en dicho intervalo a la función:

$$\begin{aligned} u^{\&}(s) &= u^{(j}, \ a_{j-1}^{\&} \leqq s \leqq a_j^{\&}, j = 1, 2, ..., h, \text{ con } a_0^{\&} = 0 \\ &= u^{(h}, \ a_h^{\&} \leqq s \leqq \tau \end{aligned}$$

Luego por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue y teniendo en cuenta la continuidad de $\hat{f}^*$ en x y u seguiría (5), lo que completaría la demostración.

El siguiente paso hacia el establecimiento del principio de máximo puntual consiste en la verificación de la posibilidad de definición de conjuntos del tipo (15) en cada punto de $\bar{C}_{t,*}^{(kh}$.

Con ese fin empezaremos suponiendo, en primer lugar, que, dado σ, τ se ha escogido lo suficientemente pequeño para garantizar (13) para cada posible trayectoria con punto terminal en $\bar{C}_{t,*}^{(kh}$. Que ello es posible se sigue inmediatamente de que en otro caso existiría una sucesión de puntos $\hat{x}^{(r}$ en la hiperesfera definida por la ecuación

$$\sum_{i=0}^{n} (x_i - \bar{x}_i(t))^2 = \sigma$$

cada uno de los cuales es punto terminal de una determinada trayectoria necesariamente continua $\hat{x}^{(r}(s)$, con $\hat{x}^{(r}(0) = \hat{\bar{x}}(t)$, aplicada durante un tiempo τ_r, con $\tau_r \to 0$ y

$$\sum_{i=0}^{n} (x_i^{(r}(s) - \bar{x}_i(t))^2 < \sigma, \quad \text{para } 0 \leqq s < \tau_r$$

lo que sería imposible, ya que existiría una constante positiva $M_{k,\sigma}$ dependiente sólo de k y σ tal que

$$-\tau_r M_{k,\sigma} \leqq \hat{x}^{(r} - \hat{\bar{x}}(t) = \int_0^{\tau_r} \hat{f}^*(x^{(r}(s), u_{ap_r}^{(r}(s))\, ds \leqq M_{k,\sigma}\tau_r$$

para todo $r \in \mathbb{N}$.

Supuesto, pues, lo anterior, consideremos entonces que $\hat{x} \in C_{t,*}^{(kh}$ y que se ha obtenido como punto terminal de la trayectoria $\hat{x}(s)$ definida en $0 \leqq s \leqq a_h$ por el control: $u_a(s) = u^{(j}$, si $a_{j-1} \leqq s \leqq a_j$, $j = 1, 2, ..., h$. Sean $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_h$, h números no negativos y $\delta > 0$.

Definamos los puntos de subdivisión:

$$a_j^{(\delta} = a_j + \sum_{r=1}^{j} \lambda_r \delta$$

y para δ suficientemente pequeño, de manera que:

$$a_h + \sum_{j=1}^{h} \lambda_j \delta < \tau$$

consideremos la función de control:

$$u_a^{(\delta}(s) = u^{(j} \ , \text{ si } a_{j-1}^{(\delta} \leqq s \leqq a_j^{(\delta}$$

y la correspondiente trayectoria $\hat{x}^{(\delta}(s)$ definida en $0 \leqq s \leqq a_h^{(\delta}$ por la ecuación

$$\hat{x}^{(\delta}(s) = \hat{\hat{x}}(t) = \int_0^s \hat{f}^*(\hat{x}^{(\delta}(z), u_a^{(\delta}(z))\, dz$$

Pongamos: $\hat{x}^{(\delta}(a_h^{(\delta}) = \hat{x}^{(\delta}$. Evidentemente, $\hat{x}^{(\delta} \in C_{t.*}^{(kh}$, para todo δ suficientemente pequeño.

Nuestro propósito es evaluar el límite:

$$\lim_{\delta \downarrow 0} (\hat{x}^{(\delta} - \hat{x})/\delta \tag{16}$$

Para ello necesitamos considerar las matrices fundamentales de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes variables del siguiente tipo:

$$d\hat{\xi}(s)/ds = \partial \hat{f}(\hat{x}(s), u_a(s))/\partial x \cdot \hat{\xi}(s) \tag{17}$$

en el intervalo $0 \leqq s \leqq a_h$.

Sea, pues, $\Phi_{u_a}(s, 0)$ la matriz fundamental del sistema (17) cuya existencia está garantizada por las condiciones impuestas a $\hat{f}$

Recordamos ahora sin demostrarlo (ver, por ejemplo, pág. 83 de la referencia [5]) un resultado estándar sobre el comportamiento de la solución de una ecuación diferencial vectorial cuando se modifica su condición de contorno inicial. Esta es la de que si $\hat{x}(s)$ es solución del sistema:

$$d\hat{x}(s)/ds = \hat{f}^*(\hat{x}(s), u_a(s))$$

para $0 \leqq s \leqq a_h$, con la condición inicial $\hat{x}(0)$, y se plantea la obtención de una solución $\hat{x}^{(\delta}(s)$ a dicho sistema con condición inicial:

$$\hat{x}^{(\delta}(0) = \hat{x}(0) + \hat{\xi}_0\delta + o(\delta)$$

siendo $\hat{\xi}_0$ un vector independiente de δ y $o(\delta)/\delta \to 0$ si $\delta \downarrow 0$, entonces:

$$\hat{x}^{(\delta}(s) = \hat{x}(s) + \Phi(s, 0)\hat{\xi}_0\delta + o(\delta) \tag{18}$$

para todo s en el intervalo en cuestión.

La utilidad de (18) en nuestro problema se evidencia si tomamos:

$$\int_{a_1}^{a_1+\lambda_1\delta} \hat{f}(x^{(\delta}(s), u_a^{(\delta}(s))\, ds + \cdots + \int_{a_h}^{a_h+\lambda_h\delta} \hat{f}(x^{(\delta}(s), u_a^{(\delta}(s))\, ds = \hat{\xi}_0\delta + o(\delta) \quad (19)$$

con:

$$\hat{\xi}_0 = \lambda_1\, \hat{f}(\hat{x}(a_1), u^{(1)}) + \cdots + \hat{f}(\hat{x}(a_h, u^{(h)})) \quad (21)$$

y tenemos en cuenta que

$$\int_{a_1}^{a_1+\lambda_1\delta} (s + t)(u_a^{(\delta}(s) - \bar{u}(s + t))^2\, ds +$$

$$+ \cdots + \int_{a_h}^{a_h\lambda_h\delta} (s + t)(u_a^{(\delta}(s) - u(s + t))^2\, ds = o(\delta) \quad (22)$$

debido a la acotación de $\bar{u}(s)$ y los $u^{(j}$.

Así, podríamos poner entonces que (16) coincide con:

$$\lambda_1\, \Phi(a_h, a_1)\, \hat{f}(\hat{x}(a_1), u^{(1)}) + \cdots + \lambda_h\, \hat{f}(\hat{x}(a_h), u^{(h)}) \quad (23)$$

Por tanto, cuando los λ_j variasen quedaría definido por el procedimiento anterior un cono convexo de tangentes $L_{\hat{x}}$ en el punto $\hat{x} = \hat{x}(a_h)$, que incluiría al vector 0 sin más que tomar $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_h = 0$.

Finalmente, sólo nos queda, pues, discutir, para completar la definición de los conos $L_{\hat{x}}$ en todos los puntos de $\bar{C}_{t,*}^{(kh}$, la posibilidad de definición de conos como los anteriores en aquellos puntos $\hat{x}(a_h^{\&})$ de $\bar{C}_{t,*}^{(kh} - C_{t,*}^{(kh}$ para los que se verificara $a_h^{\&} = \tau$.

Ahora, como se sigue del enunciado del lema (6), no necesitamos completar esta definición salvo en aquellos puntos mediante los cuales se pueda formar una sucesión convergente a $\hat{\hat{x}}(t)$.

Sea, pues, $\hat{x}^{(r}(a_h^{(r\&})$ convergente a $\hat{\hat{x}}(t)$ con $a_h^{(r\&} = \tau$, para todo $r \in \mathbb{N}$. Por el mismo procedimiento que el empleado en la demostración del lema (14) se podría obtener una subsucesión de funciones $\hat{x}^{(r}(s)$, en $0 \leqq s \leqq \tau$, uniformemente convergente a la función $\hat{x}^*(s)$ obtenida para la función de control $u^*(s)$ definida como $u^*(s) = u^{(j}$, si $a_{j-1}^* \leqq s \leqq a_j^*$, para determinadas a_j^*.

Se seguiría entonces que

$$\int_0^{\tau} \hat{f}^{(*}(\hat{x}^*(s), u^*(s))\, ds = \hat{0}$$

y ya que ha de verificarse el lema (5), debería ser, por tanto,

$$\int_0^{\tau} (s + t)\big(u^*(s) - \bar{u}(s + t)\big)^2\, ds = 0, \tag{24}$$

esto es, que $u^*(s) = \bar{u}(s + t)$, para $0 \leqq s \leqq \tau$.

Bastaría considerar ahora que τ 0 para concluir que, o bien (24) no se verifica para un τ suficientemente pequeño o bien existe una sucesión τ_r decreciente a 0 para cada uno de cuyos términos se verifica (24).

Supongamos entonces que $a_{j^*}^*$ es el primer de los a_j^* no nulos en la definición de $u^*(s)$ y que $\tau_r < a_{j^*}^*$. De acuerdo, por tanto, con (24) y si denotamos por $u^{(r*}(s)$ el control que correspondería a dicho τ_r, debería ser $u^{(r*}(s) = u^{(j*}$ para todo $0 \leqq s \leqq \tau_r$, de lo que se deduciría que:

$$\lim_{r \to \infty} (1/\tau_r) \int_0^{\tau_r} \hat{f}(\hat{x}^{(r*}(s), u^{(r*}(s))\, ds = \hat{f}(\hat{\hat{x}}(t), u^{(j*}) = \hat{0} \tag{25}$$

Supuesto, pues, eliminado dicho valor $u^{(j*}$ de $u(s)$ se podría repetir el proceso para los restantes valores $u^{(j}$ hasta que, o bien (25) se verificara para todo j o bien en todo punto de $\bar{C}_{t,*}^{(kh}$ para un τ_r suficientemente pequeño se pudieran definir conos convexos de vectores tangentes del tipo (23) con $\hat{f}(\hat{\hat{x}}(t), u^{(j}) \neq \hat{0}$, para todo j. Esto es suficiente, en conjunción con el lema (6), para obtener el principio de máximo puntual que pretendemos, como mostraremos en la sección siguiente.

4. Un principio de máximo puntual

En base a la discusión desarrollada en las secciones anteriores podemos establecer ya el siguiente resultado:

(26) **Teorema (principio de máximo puntual).** Si $\hat{\bar{x}}(s)$ obtenida para el control $\bar{u}(s)$, $0 \leqq s \leqq \bar{t}_1$, es una trayectoria óptima para el problema (1) y $0 < t < \bar{t}_1$, entonces existe un vector $\hat{\eta}(t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ no nulo, con $\bar{\eta}_0(t) \leqq 0$, de manera que

$$\hat{\bar{\eta}}(t) \cdot \hat{f}(\hat{\bar{x}}(t), u) \leqq 0 \ , \text{ para todo } u \in \Omega \tag{27}$$

Demostración. Como se ha mostrado en la sección 3, el punto $\hat{\bar{x}}(t)$ debería pertenecer a la frontera inferior respecto a su primera coordenada del conjunto $C^{(\&}(\bar{t}_1)$. Además, supuesto que $\hat{f}(\hat{\bar{x}}(t), u^{(j}) \neq \hat{0}$, para todo $u^{(j} \in D^{(kh}$, se podrían construir en cada punto de $\bar{C}^{(kh}_{t,*}$, obtenido para cierto τ, conos convexos de vectores tangentes del tipo (23).

Por tanto, aplicando el lema (6), se concluiría que existiría una sucesión $\{\hat{x}^{(r}, r \in \mathbb{N}\}$ contenida en $\bar{C}^{(kh}_{t,*}$ y convergente a $\hat{\bar{x}}(t)$, y una sucesión de vectores no nulos $\hat{\bar{\eta}}^{(khr}(t, \tau), r \in \mathbb{N}\}$, tales que $\bar{\eta}_0^{(khr}(t, \tau) \leqq 0$, para todo r y

$$\hat{\bar{\eta}}^{(khr}(t, \tau) \cdot \hat{w} \leqq 0, \text{ para todo } \hat{w} \in L_{\mathcal{S}}(r \tag{28}$$

en donde $L_{\mathcal{S}}(r$ representaría el cono convexo de generadores:

$$\Phi(a_h^{(r}, a_j^{(r}) \ \hat{f}(\hat{x}^{(r}(a_j^{(r}), u^{(j}), \ j = 1, 2, ..., h \tag{29}$$

Supuesto entonces que los vectores $\hat{\bar{\eta}}^{(khr}(t, \tau)$ se seleccionan de norma unitaria, se hace $\tau \downarrow 0$ y se escoge luego una sucesión de $\hat{x}^{(r}$ y $\hat{\bar{\eta}}^{(khr}(t, \tau)$ simultáneamente convergente en r y τ a $\hat{\bar{x}}(t)$ y a cierto vector $\hat{\bar{\eta}}^{(kh}(t)$, respectivamente, es inmediato que se podría establecer que

$$\hat{\bar{\eta}}^{(kh}(t) \cdot \hat{f}(\hat{x}(t), u^{(j}) \leqq 0 \ , \text{ para todo } u^{(j} \in D^{(kh} \tag{30}$$

incluyendo aquellos $u^{(j}$ tales que $\hat{f}(\hat{\bar{x}}(t), u^{(j}) = \hat{0}$.

Por último, si se hace k y $h \to \infty$ y se escoge una subsección de vectores unitarios $\hat{\bar{\eta}}^{kh}(t)$ convergente a cierto vector $\hat{\bar{\eta}}(t)$, en donde debería ser, por tanto, $\hat{\eta}_0(t) \leqq 0$, se obtendría (27), lo que completa la demostración.

Obsérvese que (27) habría quedado establecido para todo punto t del intervalo $(0, \bar{t}_1)$, ya fuera un punto *regular* o no.

El teorema (26) puede proseguirse, por supuesto, hasta llegar a establecer el clásico principio de máximo de Pontryaguin en todos sus términos, incluyendo la caracterización de la función $\hat{\bar{\eta}}(t)$ en el intervalo $[0, \bar{t}_1]$ como solución del sistema lineal *adjunto:*

$$d\hat{\bar{\eta}}(t)/dt = -\bar{\eta}(t)(\partial \hat{f}(\hat{\bar{x}}(t), \bar{u}(t))/\partial t)$$

cuestión que abordaremos en un futuro trabajo.

5. Conclusiones

En este artículo hemos mostrado una nueva metodología para la generación de condiciones necesarias en la teoría de la optimización tanto estática como dinámica.

En particular, hemos iniciado la demostración del más importante resultado en el ámbito dinámico, el principio de máximo de Pontryaguin, del que presentamos la primera fase de su establecimiento, la cual culmina con la obtención de un principio de máximo puntual.

Se pone de manifiesto, además, cuáles son las dificultades que se introducen en este nuevo enfoque, a pesar de las cuales, y tal como se sigue de los resultados obtenidos, esta nueva aproximación aparenta ser más sencilla y, quizá, más eficiente que la aproximación puntual clásica.

BIBLIOGRAFIA

1. KOLMOGOROV, A. N., y FOMIN, S. V. (1970): *Introductory Real Analysis*, Dover Publications.
2. HESTENES, M. R. (1966): *Calculus of Variations and Optimal Control Theory*, John Wiley and Sons.
3. MCSHANE, E. J. (1944): *Integration*, Princeton University Press.
4. MARTIN DAVILA, M. (1982): «La aproximaciión geométrico-secuencial en la teoría de la optimización: el caso estático», Technical Report n.º 3, Departamento de Estadística e I.O., Facultad de CC. Matemáticas, Universidad Complutense de Madrid.
5. PONTRYAGUIN, E. S.; BOLTYANSKII, V. G.; GAMKRELIZDE, R. V., y MISHCHENKO, E. F. (1962): *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, John Wiley Interscience.