TRABAJOS DE ESTADISTICA Y
DE INVESTIGACION OPERATIVA
Vol. 36. Núm. 1, 1985, pp. 45 a 61

CONDICIONES DE MARTINGALA SOBRE UN PROCESO DE APRENDIZAJE TIPO BETA CON DOS OPERADORES Y REFORZAMIENTO NO CONTINGENTE SIMPLE. 2.—CASO GENERAL

J. I. Domínguez Martínez
Departamento de Estadística
Facultad de Ciencias
Universidad de Málaga

RESUMEN

Se analizan las condiciones bajo las cuales un proceso de aprendizaje no lineal (modelo beta) con dos operadores y reforzamiento no contingente simple es una sub(super)martingala en el supuesto de que todas las respuestas sean reforzadas, generalizándose al caso de ausencia de reforzamiento.

Las condiciones establecidas, que nos conducen a 23 casos posibles, permiten analizar exhaustivamente el comportamiento asintótico del modelo y compararlo con la clasificación de Norman.

Palabras claves: aprendizaje no lineal; modelo beta de aprendizaje; reforzamiento.

Clasificación AMS: 60 J 20

ABSTRACT

Conditions under which a nonlinear learning process (beta model) with two operators and simple noncontingent reinforcement is a sub(super)martingale are analyzed under the hypotheses that all responses are reinforced, thus generalizing the case of lack of reinforcement.

These conditions result in 23 possible cases which allows us to analyse exhaustively the asymptotic behaviour of the model and compare it with Norman's classification.

Key words: nonlinear learning; beta model of learning; reinforcement.

AMS classification: 60 J 20.

1. Introducción

Este artículo es continuación de otro del mismo autor (J. I. Domínguez, 1982) dedicados monográficamente a analizar los procesos de aprendizaje no lineales en relación con la teoría de martingalas.

Como el proceso de martingala posee propiedades interesantes cuando es contemplado como un proceso de aprendizaje, es de sumo interés buscar condiciones bajo las cuales el modelo constituye una sub(super)martingala, con lo que su comportamiento asintótico es analizado bajo estas condiciones.

En general, como se comentó en la primera parte (1. Caso simétrico), es difícil obtener las condiciones analíticas para que un proceso de aprendizaje posea dicha propiedad, y en este caso, es de interés resaltar que, el hecho de no considerar ninguna relación entre los dos parámetros del modelo (2. Caso general) nos conduce a una situación bastante compleja resuelta con un detallado análisis comparativo entre las condiciones de martingala y la clasificación de Norman para el comportamiento asintótico del modelo, lo que nos origina 23 casos posibles que se convierten en uno sólo cuando el producto de los dos parámetros es la unidad (1. Caso simétrico).

Para no ser reiterativo (ver primera parte de este trabajo) se supone conocido los fundamentos teóricos del modelo general no lineal así como los aspectos de interés de la teoría básica de martingalas.

2. Modelo de total reforzamiento

En el modelo beta cuatro-operador con dos respuestas y en el caso contingente general tomamos las restricciones:

$$\beta_{ij} = \begin{cases} \beta & i = j \\ \gamma & i \neq j \end{cases} \quad \text{y} \quad \Pi_{ijn} = \begin{cases} \Pi & i = j \\ 1 - \Pi & i \neq j \end{cases}$$

$\forall i, j, n$ con $i, j = 1, 2$; $n = 0, 1, 2, \ldots$; $0 < \beta, \Pi < 1$ y $\gamma > 1$

Con esto, el modelo de total reforzamiento es (en su forma «fuerte»):

$$(1) \quad V_{n+1} = \begin{cases} \beta V_n & \text{con probabilidad } \Pi \\ \gamma V_n & \text{con probabilidad } 1 - \Pi \end{cases} \quad \forall n \text{ con}$$

(2) $V_n = P_n/(1 - P_n)$ $\forall n$, $P_0 = p \in (0, 1)$ y P_n la probabilidad de elección de la respuesta A_1 (genérica) en la prueba n.

3. Condición general de martingala

Es elemental obtener con sólo operar en (1) al tener en cuenta el cambio «fuerte» (2) que:

(3) $$E(P_{n+1}/P_n = x) - x = x(1 - x)\frac{Ax + B}{[(1 - x) + \beta x]\,[(1 - x) + \gamma x]}$$

donde $A = (\gamma - 1)(\beta - 1)$ y $B = (\gamma - 1) - \Pi(\gamma - \beta)$.

Para valores arbitrarios de x, β y γ se tiene que $1 - x > 0$, $(1 - x) + \beta x > 0$, $(1 - x) + \gamma x > 0$, $\gamma - \beta > 0$ y $A < 0$.

Luego para $0 \leqslant P_n \leqslant 1$ obtenemos

(i) $$E(P_{n+1}/P_n) \geqslant P_n \Leftrightarrow B \geqslant -A \Leftrightarrow \Pi \leqslant \beta\frac{\gamma - 1}{\gamma - \beta}$$

(ii) $$E(P_{n+1}/P_n) \leqslant P_n \Leftrightarrow B \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \Pi \geqslant \frac{\gamma - 1}{\gamma - \beta}$$

Definiendo:

(4) $\Pi_1 = \Pi_1(\beta, \gamma) = \beta(\gamma - 1)/(\gamma - \beta)$ y $\Pi_2 = \Pi_2(\beta, \gamma) =$ $= (\gamma - 1)/(\gamma - \beta)$; es decir, $\Pi_1 = \beta\Pi_2$ y $\Pi_1 < \Pi_2$, obtenemos que:

(5) $$\{P_n; n \geqslant 0\} \begin{cases} \text{Submartingala} \Leftrightarrow \Pi \leqslant \Pi_1 \\ \text{Supermartingala} \Leftrightarrow \Pi \geqslant \Pi_2 \end{cases} \text{con}$$

(6) $$\Pi_1 + \Pi_2 = \Pi_2(1 + \beta) = 1 + \frac{\gamma\beta - 1}{\gamma - \beta} > (<)(=)1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \gamma\beta > (<)(=)1.$$

Luego, solamente en el caso simétrico ($\gamma = \beta^{-1}$) la suma de las dos cotas vale la unidad (J. I. Domínguez, 1982).

4. Comportamiento asintótico del modelo

Ahora se analiza la distribución de probabilidad asintótica de la probabilidad de respuesta P_n en función de Π, β y γ. Definamos, a partir de (1), el nuevo proceso

(7) $L_n = \ln V_n \quad \forall n$

con lo que el modelo toma la forma

(8) $$L_{n+1} = \begin{cases} L_n + \ln \beta & \text{con probabilidad } \Pi \\ L_n + \ln \gamma & \text{con probabilidad } 1 - \Pi \end{cases} \quad \forall n$$

siendo $L_0 = \ln [p/(1 - p)]$.

Como la variable estado inicial L_0 no tiene efecto sobre el comportamiento asintótico de $\{L_n; n \geqslant 0\}$ bajo la clasificación de Norman, es posible, sin pérdida de generalidad, suponer $p = 1/2$, con lo que $L_0 = 0$ y así L_n se puede expresar como la suma de n v.a.i.e. $X_i (i = 1, 2, ..., n)$ tipo Bernouilli con $P(X_i = \ln \beta) = \Pi$ y $P(X_i = \ln \gamma) = 1 - \Pi \ \forall i$.

Aplicando la LFGN, con probabilidad 1

(9) $$L_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad \delta > 0 \\ -\infty & \text{si} \quad \delta < 0 \end{cases} \quad \text{donde}$$

(10) $\delta = E(X_i) = \Pi \ln \beta + (1 - \Pi) \ln \gamma = \ln [(\beta/\gamma)^{\Pi} \gamma]$

Por tanto:

(11) $$P_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \delta > 0 \\ 0 & \text{si} \quad \delta < 0 \\ \text{Oscila entre 0 y 1} & \text{si} \quad \delta = 0 \end{cases}$$ (a pesar de esta oscilación, existe una distribución límite; está concentrada en 0 y 1 con igual probabilidad).

Por otro lado, el valor esperado del salto, dado en (10), se puede expresar como

(12) $$\delta = (w - \Pi) \ln \frac{\gamma}{\beta} \quad \text{siendo} \quad w = \frac{\ln \gamma}{\ln \frac{\gamma}{\beta}} = \left(1 - \frac{\ln \beta}{\ln \gamma}\right)^{-1} \quad \text{con}$$

(13) $\delta > (<)(=) 0 \Leftrightarrow \Pi < (>)(=) w$ y

(14) $P_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 1(0)\ (\text{oscila}) \Leftrightarrow \Pi < (>)(=) w$

Según el comportamiento de los parámetros del modelo, w se puede acotar con más precisión. A partir de (12) es trivial que

$$(15) \quad w > (<)(=)1/2 \Leftrightarrow \gamma\beta > (<)(=)1$$

y de nuevo, $w = 1/2 \Leftrightarrow \gamma\beta = 1$ corresponde al caso simétrico.

5. Resultados fundamentales en relación con la condición de martingala

Si definimos

$$(16) \quad \beta_1 = \beta/(1 + \beta) \quad \text{y} \quad \beta_2 = 1/(1 + \beta)$$

como $\beta < 1$, obtenemos que $\beta_1 < 1/2$, $\beta_2 > 1/2$, $\beta_1 + \beta_2 = 1$ y $\beta_1 < \beta_2$. Además, es trivial obtener, con sólo operar, que

$$(17) \quad \Pi_i = \beta_i + \frac{(\gamma\beta - 1)z_i}{(\gamma - \beta)(1 + \beta)} \quad \text{con} \quad z_i = \begin{cases} \beta & \text{si} \quad i = 1 \\ 1 & \text{si} \quad i = 2 \end{cases}$$

y

$$(18) \quad \gamma\beta > (<)(=)1 \Leftrightarrow \Pi_i > (<)(=)\beta_i \quad (i = 1, 2)$$

siendo la igualdad la correspondiente al caso simétrico.

Con el objeto de obtener una clasificación más rigurosa necesitamos algunas nuevas relaciones. A partir de (16) y (17) es fácil observar que:

$$(19) \quad \begin{cases} \Pi_1 = {}^1/_2 + \dfrac{2\gamma\beta - (\gamma + \beta)}{2(\gamma - \beta)} > (<)(=){}^1/_2 \Leftrightarrow \\ \quad \Leftrightarrow \gamma > (<)(=) \dfrac{\beta}{2\beta - 1} \\ \Pi_2 = {}^1/_2 + \dfrac{\gamma + \beta - 2}{2(\gamma - \beta)} > (<)(=){}^1/_2 \Leftrightarrow \gamma + \beta > (<)(=)2 \end{cases}$$

$$(20) \quad \begin{cases} \Pi_1 = \beta_2 + \dfrac{\beta(\gamma - \beta) - \gamma(1 - \beta^2)}{(\gamma - \beta)(1 + \beta)} > (<)(=)\beta_2 \Leftrightarrow \\ \quad \Leftrightarrow \gamma > (<)(=) \dfrac{\beta^2}{\beta^2 + \beta - 1} \\ \Pi_2 = \beta_1 + \dfrac{\gamma - [1 + \beta(1 - \beta)]}{(\gamma - \beta)(1 + \beta)} > (<)(=)\beta_1 \Leftrightarrow \\ \quad \Leftrightarrow \gamma > (<)(=)1 + \beta(1 - \beta) \end{cases}$$

y

(21) $\beta = (\Pi_1 - \beta_1)/(\Pi_2 - \beta_2)$

A partir de (19), (20) y (21) es evidente que la situación relativa de Π_i, $\beta_i (i = 1, 2)$ y $^1/_2$ dependerá no sólo de los valores de los parámetros sino también de la posición en el plano respecto de $\gamma + \beta = 2$ y $\gamma\beta = 1$.

La figura 1 nos aclara el problema.

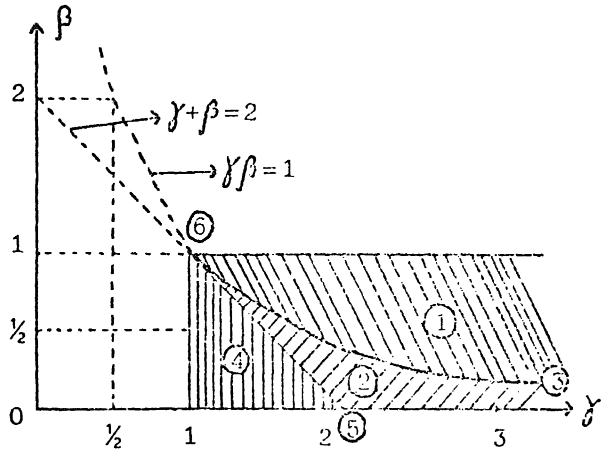

Figura 1.

La zona rayada corresponde a los posibles valores para los parámetros γ y β.

Con esto, los nueve casos potencialmente posibles (ver Tabla 1) se reducen a cinco (el sexto es la condición $\gamma = \beta = 1$ que contradice la hipótesis del modelo).

Tabla 1	$\gamma\beta > 1$	$\gamma\beta < 1$	$\gamma\beta = 1$
$\gamma + \beta > 2$	1 $w > {}^1/_2$ varios casos	2 $w < {}^1/_2$ un sólo caso	3 $w = {}^1/_2$ caso simétrico
$\gamma + \beta < 2$		4 $w < {}^1/_2$ varios casos	
$\gamma + \beta = 2$		5 $w < {}^1/_2$ un sólo caso	6 $\gamma = \beta = 1$ no es válido

Estudiemos estos cinco casos comenzando por los de solución única. A partir de (4) y (16) obtenemos:

1. Caso 5 (puntos de $\gamma + \beta = 2$)

   Como $\gamma + \beta = 2 \Rightarrow \Pi_2 = {}^1/_2$ y $\gamma\beta < 1 \Rightarrow \Pi_i < \beta_i \quad \forall i$,
   obtenemos: $\Pi_1 < \beta_1 < {}^1/_2 = \Pi_2 < \beta_2$ (I)

2. Caso 2 (puntos entre $\gamma + \beta = 2$ y $\gamma\beta = 1$)

   Como $\gamma + \beta > 2 \Rightarrow \Pi_2 > {}^1/_2$ y $\gamma\beta < 1 \Rightarrow \Pi_i < \beta_i \quad \forall i$,
   obtenemos: $\Pi_1 < \beta_1 < {}^1/_2 < \Pi_2 < \beta_2$ (II)

3. Caso 3 (puntos de $\gamma\beta = 1$)

   Como $\gamma\beta = 1 \Rightarrow \Pi_i = \beta_i \quad \forall i$ y $\gamma + \beta > 2 \Rightarrow \Pi_2 > {}^1/_2$,
   obtenemos: $\Pi_1 = \beta_1 < {}^1/_2 < \beta_2 = \Pi_2$ (III) (Caso simétrico)

4. Caso 4 (puntos entre $\gamma = 1$ y $\gamma + \beta = 2$)

Como $\gamma + \beta < 2 \Rightarrow \Pi_2 < {}^1/_2$ y $\gamma\beta < 1 \Rightarrow \Pi_i < \beta_i \quad \forall i$,
   el problema ahora es comparar Π_2 y β_1 por medio de (20). Pero como $\Pi_2 > (<)(=)\beta_1 \Leftrightarrow \gamma > (<)(=) 1 + \beta(1 - \beta)$, obtenemos:

   4.1. Si $\gamma < 1 + \beta(1 - \beta) \Rightarrow \Pi_1 < \Pi_2 < \beta_1 < {}^1/_2 < \beta_2$ (IV)

   4.2. Si $\gamma > 1 + \beta(1 - \beta) \Rightarrow \Pi_1 < \beta_1 < \Pi_2 < {}^1/_2 < \beta_2$ (V)

   4.3. Si $\gamma = 1 + \beta(1 - \beta) \Rightarrow \Pi_1 < \Pi_2 = \beta_1 < {}^1/_2 < \beta_2$ (VI)

5. Caso 1 (puntos entre $\beta = 1$ y $\gamma\beta = 1$)

   Como $\gamma + \beta > 2 \Rightarrow \Pi_2 > {}^1/_2$ y $\gamma\beta > 1 \Rightarrow \Pi_i > \beta_i \quad \forall i$.

   Esta situación es la más compleja. Las relaciones (19) y (20) nos aclaran el problema. Con esto:

   5.1. $\gamma = \beta/(2\beta - 1)$ con $\beta > {}^1/_2 \Rightarrow \Pi_1 = {}^1/_2 \Rightarrow$
   $\Rightarrow \beta_1 < \Pi_1 = {}^1/_2 < \beta_2 < \Pi_2$ (VII)

   5.2. $\left.\begin{array}{l}\gamma < \beta/(2\beta - 1) \text{ con } \beta \geqslant {}^1/_2 \\ \gamma > \beta/(2\beta - 1) \text{ con } \beta < {}^1/_2\end{array}\right\} \Rightarrow \Pi_i < {}^1/_2 \Rightarrow$
   $\Rightarrow \beta_1 < \Pi_1 < {}^1/_2 < \beta_2 < \Pi_2$ (VIII)

5.3. $\gamma > \beta/(2\beta - 1)$ con $\beta > {}^1/_2 \Rightarrow \Pi_1 > {}^1/_2$; pero queda aún por comparar Π_1 y β_2. Observando (20), todo dependerá de la situación de los puntos respecto de la curva $\gamma = \beta^2/(\beta^2 + \beta - 1)$; en consecuencia:

$$\text{Si } \beta^2/(\beta^2+\beta-1)\begin{cases} \text{5.3.1.} \quad = \gamma \Rightarrow \Pi_1 = \beta_2 \Rightarrow \\ \qquad \Rightarrow \beta_1 < {}^1/_2 < \beta_2 = \Pi_1 < \Pi_2 & \text{(IX)} \\ \text{5.3.2.} \quad < \gamma \Rightarrow \Pi_1 > \beta_2 \Rightarrow \\ \qquad \Rightarrow \beta_1 < {}^1/_2 < \beta_2 < \Pi_1 < \Pi_2 & \text{(X)} \\ \text{5.3.3.} \quad > \gamma \Rightarrow \Pi_1 < \beta_2 \Rightarrow \\ \qquad \Rightarrow \beta_1 < {}^1/_2 < \Pi_1 < \beta_2 < \Pi_2 & \text{(XI)} \end{cases}$$

Por consiguiente, visualizando en una sola gráfica (a partir de la Fig. 1) las curvas anteriores, obtenemos 11 distintas regiones y por tanto 11 casos (numerados en romano) que nos relacionan ${}^1/_2$, Π_i y β_i $(i = 1, 2)$.

Sólo queda, por tanto, situar w dentro de estos 11 casos posibles. Los casos III, IV, VI, IX y X son inmediatos y con solución única; en todos ellos w está unívocamente determinado (situado). Los restantes casos admiten, a su vez, tres alternativas cada uno.

El problema se resuelve comparando w con $\beta_i (i = 1, 2)$, de la forma siguiente:

(i) Si $w < {}^1/_2 (\gamma\beta < 1 \text{ y } \beta_1 < {}^1/_2) \Rightarrow$ hay que comparar w con β_1. Como:

(22) $$w - \beta_1 = \frac{\ln \gamma + \beta \ln \beta}{(1 + \beta) \ln \dfrac{\gamma}{\beta}}$$, tendremos que

(23) $$w > (<)(=)\beta_1 \Leftrightarrow \gamma > (<)(=)\beta^{-\beta}$$

(ii) Si $w > {}^1/_2 (\gamma\beta > 1 \text{ y } \beta_2 > {}^1/_2) \Rightarrow$ hay que comparar w con β_2. Como:

(24) $$w - \beta_2 = \frac{\beta \ln \gamma + \ln \beta}{(1 + \beta) \ln \dfrac{\gamma}{\beta}}$$, tendremos que

(25) $w > (<)(=)\beta_2 \Leftrightarrow \gamma > (<)(=)\beta^{-1/\beta}$

Con esto ya estamos en disposición de dar la:

6. Clasificación general

La relación entre w, $^1/_2$, Π_i y $\beta_i (i = 1, 2)$ viene dada por 23 casos diferentes (22 más el caso simétrico) que se pueden visualizar, según el comportamiento de β y γ, en las tablas 2 y 3 del anexo.

Ilustremos todo esto con un ejemplo:

Supongamos un modelo con valores $\beta = 0,7$ y $\gamma = 3,5$.

a) Como $\gamma + \beta > 2$ y $\gamma\beta > 1$, estamos en $\{1, 2, 3, ..., 11\}$.

b) Como $\beta > {}^1/_2$ y $\beta/(2\beta - 1) = 7/4 < \gamma$, se reducen a $\{4, 5, ..., 8\}$.

c) Por último, como $\beta^2/(\beta^2 + \beta - 1) = 2,57 < \gamma$, estamos en definitiva en el caso 7.

En consecuencia: $\beta_1 < {}^1/_2 < \beta_2 < \Pi_1 < w < \Pi_2$
y gráficamente se puede visualizar en la figura 2:

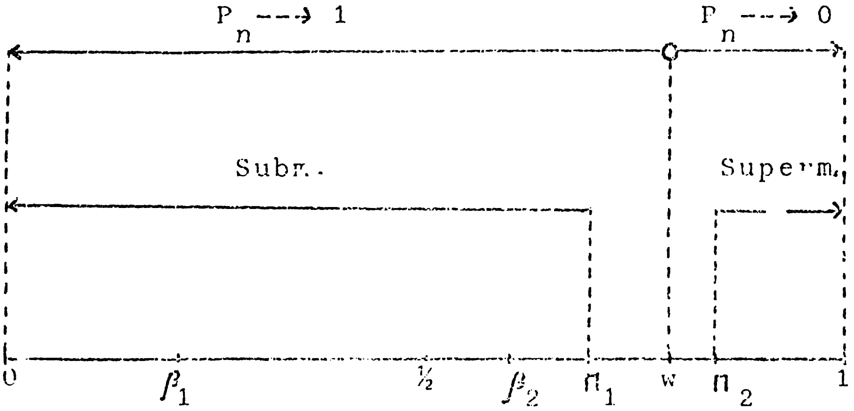

Figura 2.

En este caso, es inmediato obtener que:

$\beta_1 = 0{,}41$; $\beta_2 = 0{,}59$; $\Pi_1 = 0{,}62$; $\Pi_2 = 0{,}89$ y $w = 0{,}77$

y

$$P_n \begin{cases} \text{Subm.} \Leftrightarrow \Pi \leqslant 0{,}62 \\ \text{Superm.} \Leftrightarrow \Pi \geqslant 0{,}89 \end{cases} \qquad P_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \begin{cases} 1 & \text{si } \Pi < 0{,}77 \\ 0 & \text{si } \Pi > 0{,}77 \\ \text{Oscila} & \text{si } \Pi = 0{,}77 \end{cases}$$

7. El caso de ausencia de reforzamiento

Ahora generalizamos el modelo anterior al suponer que no todas las respuestas son reforzadas. Bajo este supuesto, el modelo dado en (1) toma la forma:

$$(26) \quad V_{n+1} = \begin{cases} \beta V_n & \text{con probabilidad } \Pi_1^* \\ \gamma V_n & \text{con probabilidad } \Pi_2^* \\ V_n & \text{con probabilidad } 1 - \Pi_1^* - \Pi_2^* \end{cases}$$

y que corresponde, bajo esta situación, a la aparición de un suceso reforzante nulo E_0 que deja invariante la probabilidad de elección de la respuesta en la prueba que aparezca.

En este caso, las condiciones de martingala se pueden generalizar del modo siguiente. Operando de igual modo que en los apartados anteriores, tendremos:

$$(27) \quad E(P_{n+1}/P_n = x) - x = x(1-x)\frac{A^*x + B^*}{[(1-x) + \beta x][(1-x) + \gamma x]}$$

$$\text{con } A^* = (\Pi_1^* + \Pi_2^*)A \quad \text{y} \quad B^* = (\beta\Pi_1^* + \gamma\Pi_2^*) - (\Pi_1^* + \Pi_2^*)$$

Con todo esto, es inmediato obtener que:

$$(28) \quad P_n \begin{cases} \text{Subm.} \Leftrightarrow B^* \geqslant -A^* \Leftrightarrow \Pi_1^*/\Pi_2^* \leqslant \dfrac{\beta(\gamma - 1)}{\gamma(1-\beta)} = \alpha_1 \\ \\ \text{Superm.} \Leftrightarrow B^* \leqslant 0 \Leftrightarrow \Pi_1^*/\Pi_2^* \geqslant \dfrac{\gamma - 1}{1 - \beta} = \alpha_2 \end{cases}$$

Como $\alpha_1 = \dfrac{\beta}{\gamma}\alpha_2$ y $\beta/\gamma < 1$, obtenemos, a partir de (4), que

$$(29) \quad \alpha_1 < \alpha_2 \quad \text{y} \quad \alpha_i = \frac{\Pi_i}{1 - \Pi_i} \quad (i = 1,2)$$

$$(30) \quad \alpha_2 < (>)(=)1 \Leftrightarrow \gamma + \beta < (>)(=)2$$

De igual modo que en el caso de total reforzamiento, el valor esperado del salto será

$$(31)\quad \delta^* = \Pi_1^* \ln \beta + \Pi_2^* \ln \gamma = (w^* - \Pi_1^*/\Pi_2^*)\Pi_2^* \ln \beta^{-1}$$

$$\text{con } w^* = \frac{\ln \gamma}{\ln \beta^{-1}} = w/(1 - w) \text{ después de considerar (13).}$$

En consecuencia:

$$(32)\quad \begin{cases} \delta^* > (<)(=)0 \Leftrightarrow w^* > (<)(=)\Pi_1^*/\Pi_2^* \Leftrightarrow \\ \qquad\qquad \Leftrightarrow w > (<)(=)\dfrac{\Pi_1^*}{\Pi_1^* + \Pi_2^*} \\ w^* > (<)(=)1 \Leftrightarrow \gamma\beta > (<)(=)1 \Leftrightarrow w > (<)(=)^1/_2 \end{cases}$$

y

$$(33)\quad P_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0(1)\ (\text{oscila}) \Leftrightarrow \Pi_1^*/\Pi_2^* < (>)(=) w^* = w/(1 - w)$$

Siguiendo el mismo razonamiento realizado con la tabla 1, es fácil relacionar w^*, 1 y α_1 ($i = 1{,}2$) según el comportamiento de β y γ. En concreto obtenemos 7 casos posibles que se pueden visualizar en la tabla 4 (ver anexo) y que corresponden a los mismos que en el modelo de total reforzamiento se obtendrían al considerar sólo w, $^1/_2$ y Π_i ($i = 1{,}2$). (Se invita al lector a comprobarlo en la Tabla 3.)

A la vista de estos resultados, las condiciones de martingala obtenidas para el modelo de total reforzamiento resultan ser particularizaciones de las ahora obtenidas.

En efecto, si todas las respuestas son ahora reforzadas, entonces $\Pi_1^* + \Pi_2^* = 1$, y tomando $\Pi_1^* = \Pi$ obtenemos $A^* = A$, $B^* = B$ y $\delta^* = \delta$ con lo que la condición de sub(super)martingala (28) se transforma en (5) y volveríamos al primer modelo.

Nota final

Para el modelo de total reforzamiento, se ha elaborado un programa BASIC (ver anexo) con un ordenador Olivetti P 6066. El programa indica a qué caso, de los 23 posibles, corresponde la introducción de cada pareja de valores, $\beta \in (0, 1)$ y $\gamma \in (1, \infty)$, que representan los dos parámetros del modelo.

REFERENCIAS

DOMINGUEZ, J. I. (1982): «Condiciones de martingala sobre un proceso de aprendizaje tipo beta con dos operadores y reforzamiento no contingente simple. 1. Caso simétrico». *Actas de la XIII[a] Reunión Nacional de Estadística, I.O. e Informática.* Valladolid, sep.-oct. 1982.

IOSIFESCU, M., y THEODORESCU, R. (1969): «Random processes and learning». Springer-Verlag. Cap. 3, 264-278.

KATAI, O., y IWAI, S. (1979): «Construction of a conditional probability learning model and information theoretical evaluation of its efficiency». *Journ. of Mathem. Psychol. 19,* 3, 259-294.

LAMPERTI, J., y SUPPES, P. (1960): «Some asymptotic properties of Luce's beta learning model». *Psychom. 25,* 3, 233-241.

NORMAN, M. F. (1972): «Markov processes and learning models». *Academic Press.* Cap. 14, 209-221.

WILLIAMS, D. (1979): «Diffusions, Markov processes, martingales». Wiley, New-York.

ANEXO

Tabla 2

- $\gamma + \beta$
  - >2 — $\gamma\beta$
    - >1 — $\dfrac{\beta}{2\beta - 1}$
      - $>\gamma$
      - $<\gamma$
        - $\beta < {}^1/_2$ — $\beta^{-1/\beta}$
          - $>\gamma$ ----→ 1
          - $<\gamma$ ----→ 2
          - $=\gamma$ ----→ 3
        - $\beta < {}^1/_2$ — $\dfrac{\beta^2}{\beta^2 + \beta - 1}$
          - $>\gamma$ — $\beta^{-1/\beta}$
            - $>\gamma$ ----→ 4
            - $<\gamma$ ----→ 5
            - $=\gamma$ ----→ 6
          - $<\gamma$ ----→ 7
          - $=\gamma$ ----→ 8
      - $=\gamma$ — $\beta^{-1/\beta}$
        - $>\gamma$ ----→ 9
        - $<\gamma$ ----→ 10
        - $=\gamma$ ----→ 11
    - <1 — $\beta^{-\beta}$
      - $>\gamma$ ----→ 12
      - $<\gamma$ ----→ 13
      - $=\gamma$ ----→ 14
    - $=1$ ----→ 15 Caso Simétrico
  - <2 — $1+\beta(1-\beta$
    - $>\gamma$ ----→ 16
    - $<\gamma$ — $\beta^{-\beta}$
      - $>\gamma$ ----→ 17
      - $<\gamma$ ----→ 18
      - $=\gamma$ ----→ 19
    - $=\gamma$ ----→ 20
  - $=2$ — $\beta^{-\beta}$
    - $>\gamma$ ----→ 21
    - $<\gamma$ ----→ 22
    - $=\gamma$ ----→ 23

Tabla 3

1. $\beta_1 < \Pi_1 < {}^1/_2 < w < \beta_2 < \Pi_2$
2. $\beta_1 < \Pi_1 < {}^1/_2 < \beta_2 < w < \Pi_2$
3. $\beta_1 < \Pi_1 < {}^1/_2 < w = \beta_2 < \Pi_2$
4. $\beta_1 < {}^1/_2 < \Pi_1 < w < \beta_2 < \Pi_2$
5. $\beta_1 < {}^1/_2 < \Pi_1 < \beta_2 < w < \Pi_2$
6. $\beta_1 < {}^1/_2 < \Pi_1 < w = \beta_2 < \Pi_2$
7. $\beta_1 < {}^1/_2 < \beta_2 < \Pi_1 < w < \Pi_2$
8. $\beta_1 < {}^1/_2 < \beta_2 = \Pi_1 < w < \Pi_2$
9. $\beta_1 < \Pi_1 = {}^1/_2 < w < \beta_2 < \Pi_2$
10. $\beta_1 < \Pi_1 = {}^1/_2 < \beta_2 < w < \Pi_2$
11. $\beta_1 < \Pi_1 = {}^1/_2 < w = \beta_2 < \Pi_2$
12. $\Pi_1 < w < \beta_1 < {}^1/_2 < \Pi_2 < \beta_2$
13. $\Pi_1 < \beta_1 < w < {}^1/_2 < \Pi_2 < \beta_2$
14. $\Pi_1 < w = \beta_1 < {}^1/_2 < \Pi_2 < \beta_2$
15. $\Pi_1 = \beta_1 < w = {}^1/_2 < \Pi_2 = \beta_2$
16. $\Pi_1 < w < \Pi_2 < \beta_1 < {}^1/_2 < \beta_2$
17. $\Pi_1 < w < \beta_1 < \Pi_2 < {}^1/_2 < \beta_2$
18. $\Pi_1 < \beta_1 < w < \Pi_2 < {}^1/_2 < \beta_2$
19. $\Pi_1 < w = \beta_1 < \Pi_2 < {}^1/_2 < \beta_2$
20. $\Pi_1 < w < \Pi_2 = \beta_1 < {}^1/_2 < \beta_2$
21. $\Pi_1 < w < \beta_1 < {}^1/_2 = \Pi_2 < \beta_2$
22. $\Pi_1 < \beta_1 < w < {}^1/_2 = \Pi_2 < \beta_2$
23. $\Pi_1 < w = \beta_1 < {}^1/_2 = \Pi_2 < \beta_2$

Tabla 4

- $\gamma + \beta$
  - >2 : $\gamma\beta$
    - <1 $\dashrightarrow$ $\alpha_1 < w^* < 1 < \alpha_2$
    - $=1$ $\dashrightarrow$ $\alpha_1 < w^* = 1 < \alpha_2$
    - >1 : $\dfrac{\beta}{2\beta - 1}$
      - $>\gamma$ $\dashrightarrow$ $\alpha_1 < 1 < w^* < \alpha_2$
      - $<\gamma$ $\dashrightarrow$ $1 < \alpha_1 < w^* < \alpha_2$
      - $=\gamma$ $\dashrightarrow$ $\alpha_1 = 1 < w^* < \alpha_2$
  - <2 $\dashrightarrow$ $\alpha_1 < w^* < \alpha_2 < 1$
  - $=2$ $\dashrightarrow$ $\alpha_1 < w^* < \alpha_2 = 1$

Programa BASIC

```
0010 REM CONDICION DE MARTINGALA PARA EL
0020 REM MODELO BETA CON DOS OPERADORES
0030 REM
0040 PRINT "VALOR DE GAMMA  EN  (1,→)"
0050 INPUT A
0060 IF A<=1 THEN 1010
0070 PRINT "VALOR DE BETA EN (0.1)"
0080 INPUT B
0090 IF B>=1 THEN 1010
0100 IF B<=0 THEN 1010
0110 LET I1=A+B
0120 IF I1>2 THEN 240
0130 IF I1<2 THEN 770
0140 LET I2=B↑(-B)
0150 GOSUB 930
0160 ON R0 GOTO 180,200,210
0170 REM
0180 PRINT "CASO 21"
0190 GOTO 1020
0200 PRINT "CASO 22"
0210 GOTO 1020
0220 PRINT " CASO 23"
0230 GOTO 1020
0240 LET I3=A*B
0250 IF I3>1 THEN 290
0260 IF I3<1 THEN 680
0270 PRINT " CASO 15"
0280 GOTO 1020
0290 LET I2=B/(2*B-1)
0300 GOSUB 930
0310 ON R0 GOTO 500,320,590
0320 IF B<=0.5 THEN 500
0330 LET I2=B*B/(B*B+B-1)
0340 GOSUB 930
0350 ON R0 GOTO 360,460,480
0360 LET I2=B↑(-1/S)
0370 GOSUB 930
0380 ON R0 GOTO 390,420,440
0390 PRINT "CASO 4"
0400 GOTO 1020
```

```
0420 PRINT "CASO 5"
0430 GOTO 1020
0440 PRINT "CASO 6"
0450 GOTO 1020
0460 PRINT "CASO 7"
0470 GOTO 1020
0480 PRINT "CASO 8"
0490 GOTO 1020
0500 LET I2=B↑(-1/B)
0510 GOSUB 930
0520 ON R0 GOTO 530,550,570
0530 PRINT " CASO 1"
0540 GOTO 1020
0550 PRINT "CASO 2"
0560 GOTO 1020
0570 PRINT "CASO 3"
0580 GOTO 1020
0590 LET I2=B↑(-1/B)
0600 GOSUB 930
0610 ON R0 GOTO 620.640.660
0620 PRINT "CASO 9"
0630 GOTO 1020
0640 PRINT " CASO 10"
0650 GOTO 1020
0660 PRINT " CASO 11"
0670 GOTO 1020
0680 LET I2=B↑(-1/B)
0690 GOSUB 930
0700 ON R0 GOTO 710,730,750
0710 PRINT " CASO 12"
0720 GOTO 1020
0730 PRINT " CASO 13"
0740 GOTO 1020
0750 PRINT " CASO 14"
0760 GOTO 1020
0770 LET I2=(1-B)*B+1
0780 GOSUB 930
0790 ON R0 GOTO 800,820,910
0800 PRINT " CASO 16"
0810 GOTO 1020
0820 LET I2=B↑(-B)
0830 GOSUB 930
0840 ON R0 GOTO 850,870,890
```

```
0850 PRINT " CASO 17"
0860 GOTO 1020
0870 PRINT " CASO 18"
0880 GOTO 1020
0890 PRINT " CASO 19"
0900 GOTO 1020
0910 PRINT " CASO 20"
0920 GOTO 1020
0930 IF I2>A THEN 970
0940 IF I2<A THEN 990
0950 LET R0=3
0960 RETURN
0970 LET R0=1
0980 RETURN
0990 LET R0=2
1000 RETURN
1010 PRINT "EL VALOR NO ES CORRECTO"
1020 END
```