Trabajos de Estadística y
de Investigación Operativa
Vol. 35. Núm. 3, 1985, pp. 305 a 318

TESTS DE LA RAZÓN DE VEROSIMILITUD PARA MEDIAS DE POBLACIONES NORMALES, SUJETAS A RESTRICCIONES

J. A. Menéndez Fernández
Departamento de Estadística e Investigación Operativa.
Facultad de Ciencias.
Universidad de Valladolid.

This paper shows the statistics that define the likelihood ratio tests about the mean of a k-dimensional normal population, when the hypotheses to test are H_0: $\theta = 0$; H_0^*: $\theta \in \tau_\phi$; H_1: $\theta \in \tau$; H_2: $\theta \in R^k$, being τ a closed and poliedric convex cone in R^k, and τ_ϕ the minima dimension face in τ.

It is proved that the obtained statistics distributions are certain combinations of chi-squared distributions, when $\theta = 0$.

At last, it is proved that the power functions of the tests satisfy some desirable properties.

1. INTRODUCCIÓN

Sea X una v.a. k-dimensional, $N_k(\theta, \Lambda)$, con Λ conocida no singular, y sea $\tau = \{\theta\colon\ C_i'\theta \geqslant 0,\quad i = 1, 2, \ldots, p\}$ $(p > k)$ un cono convexo poliédrico y cerrado de R^k. Dado un conjunto $M \subset \{1, 2, \ldots, p\}$ llamaremos cara τ_M de τ al conjunto $\{\theta\colon\ C_i'\theta = 0,\quad i \in M^c;\quad C_i'\theta > 0,$ $i \in M\}$ y denotaremos por L_M al subespacio asociado a la cara τ_M. La dimensión de la cara τ_M supuesta no vacía, está definida por $\dim L_M$, de forma que la cara de menor dimensión de τ es $\tau_\phi = \{\theta\colon\ C_i'\theta = 0,$ $i = 1, 2, \ldots, p\}$, y si $\dim L_\phi = 0$ entonces $\tau_\phi = \{0\}$.

(*) Recibido, Julio, 1982

Sea $\bar{\theta}$ el E.M.V. para θ bajo τ.

Llamaremos R_M a la región de R^k tal que si $X \in R_M$ entonces $\bar{\theta} \in \tau_M$ (supuesta τ_M no vacía). Es evidente que las regiones R_M definen una partición de R^k.

Se puede obtener fácilmente que si $X \in R_M$, entonces $\bar{\theta}$ es la proyección de X, según la métrica que induce en R^k, Λ^{-1}, sobre el subespacio L_M, ésto es $\bar{\theta} = P_M X$ con

$$P_M = I - \Lambda C_M (C'_M \Lambda C_M)^{-1} C'_M$$

siendo C_M una matriz $k \times r$ formada por r vectores del conjunto $\{C_1, \ldots, C_m\}$ que generan el subespacio ortogonal a L_M y son linealmente independientes, lo que significa que $\dim L_M = k - r$.

En las demostraciones de los teoremas que nos interesarán podremos suponer sin pérdida de generalidad que $r = m$, de modo que $C_1, C_2, \ldots, C_m$ son linealmente independientes y generan el subespacio ortogonal a L_M.

En los apartados que siguen obtendremos las distribuciones bajo $\theta = 0$ de tres estadísticos que definen otros tantos tests de razón de verosimilitud, y analizaremos algunas de sus propiedades, acerca de las hipótesis siguientes:

$$H_0\colon\ \theta = 0; \quad H_0^*\colon\ \theta \in \tau_\phi; \quad H_1\colon\ \theta \in \tau; \quad H_2\colon\ \theta$$

es cualquiera de R^k, y denotaremos por θ_0 y $\bar{\theta}$ a los E.M.V. para θ bajo H_0^* y H_1 respectivamente.

2. SOBRE LA FORMA DE LOS TESTS DE RAZÓN DE VEROSIMILITUD

El T.R.V. para contrastar H_0^* contra $H_1 - H_0^*$ rechaza H_0^* para valores grandes del estadístico $T_{01}^* = -2 \ln \Lambda_{01}^*$ siendo λ_{01}^* la razón de verosimilitudes, dado X, bajo H_0^* y H_1.

Es fácil obtener que

$$\begin{aligned} T_{01}^* &= (X - \theta^0)'\Lambda^{-1}(X - \theta^0) - (X - \bar{\theta})'\Lambda^{-1}(X - \bar{\theta}) = \\ &= (\bar{\theta} - \theta^0)'\Lambda^{-1}(\bar{\theta} - \theta^0) + 2(X - \bar{\theta})'\Lambda^{-1}(\bar{\theta} - \theta^0). \end{aligned}$$

Ahora bien, $\bar{\theta} \in L_M$ para cierto $M \subset \{1, 2, \ldots, p\}$ de forma que τ_M es no vacía y por tanto $L_\phi \subset L_M$ con lo cual $(\bar{\theta} - \theta^0) \in L_M$. Pero X y $\bar{\theta}$ son los E.M.V. para θ bajo H_2 y bajo H_1 respectivamente luego minimizan la función cuadrática

$$(X - \theta)'\Lambda^{-1}(X - \theta) \quad \text{sobre} \quad R^k$$

y sobre L_M respectivamente, luego $X - \bar{\theta}$ es Λ^{-1} conjugado de L_M, y en particular de $\bar{\theta} - \theta^0$.

Por tanto,

$$T_{01}^* = (\bar{\theta} - \theta_0)'\Lambda^{-1}(\bar{\theta} - \theta^0).$$

Obviamente para contrastar H_0 contra $H_1 - H_0$ obtenemos

$$T_{01} = \bar{\theta}'\Lambda^{-1}\bar{\theta}.$$

Para contrastar H_1 contra $H_2 - H_1$ mediante el T.R.V. se obtiene el estadístico

$$T_{12} = (X - \bar{\theta})'\Lambda^{-1}(X - \bar{\theta}).$$

Podemos por tanto enunciar el siguiente resultado general:

«Si el E.M.V. de θ bajo la hipótesis nula, se obtiene "proyectando" el E.M.V. $\hat{\theta}$ para θ sin restricciones sobre un subespacio contenido en el subespacio sobre el que hay que proyectar $\hat{\theta}$ para obtener el E.M.V. para θ bajo la hipótesis alternativa, entonces el estadístico que define el T.R.V. viene definido por la distancia entre los E.M.V. para θ bajo ambas hipótesis.»

En el caso de k poblaciones normales independientes la matriz Λ es diagonal con elementos $w_i > 0$ y los estadísticos que se obtienen son sumas de cuadrados con pesos w_i, estadísticos utilizados por Barlow y otros (1972) para problemas de órdenes parciales sobre los elementos de θ, y por Salvador B. (1979) para problemas en los que aún estando las restricciones definidas por un cilindro poliédrico, en el momento de plantear el contraste de hipótesis se imponen condiciones tales que las restricciones anteriores se reducen a un cono de orden parcial en que la hipótesis nula es la cara τ_ϕ, y es por ésto por lo que también allí el estadístico es una *suma de cuadrados*.

3. DISTRIBUCIÓN DE LOS T.R.V. BAJO H_0: $\theta = 0$

Bajo H_0: $\theta = 0$ obtendremos la distribución de los estadísticos T_{01}, T_{01}^* y T_{12} mediante los siguientes teoremas cuya demostración detallaremos a continuación.

Teorema 3.1. La distribución de T_{01} bajo H_0 es

$$P_0(T_{01} \geqslant t) = \sum_{M \subset \{1,2,\ldots,p\}} P(\chi^2_{k-\#M^c} \geqslant t) P_0(X \in R_M).$$

Teorema 3.2. Si $\dim L_\phi = k - r$ entonces bajo H_0

$$P_0(T_{01}^* \geqslant t) = \sum_{M \subset \{1,2,\ldots,p\}} P(\chi^2_{r-\#M^c}) P_0(X \in R_M) \qquad \text{si } t > 0$$

$$P_0(T_{01}^* = 0) = P_0(X \in R_\phi).$$

Teorema 3.3. Bajo H_0

$$P_0(T_{12} \geqslant t) = \sum_{M \subset \{1,2,\ldots,p\}} P(\chi^2_{\#M^c} \geqslant t) P_0(X \in R_M) \qquad \text{si } t > 0$$

$$P_0(T_{12} = 0) = P_0(X \in R_{\{1,2,\ldots,p\}}).$$

Estos resultados generalizan los obtenidos por Barlow y otros (1972) cap. 3, Salvador B. (1979) cap. 2 y 3 y Kudo (1963), así como los de Robertson y Wegman (1978) en lo que se refiere a la distribución normal, extendiendo los contrastes estudiados en dichos trabajos a situación bastante más generales y recogiendo en éstas el hecho común de que la distribución del T.R.V. es una combinación de distribuciones chi-cuadrado.

Antes de pasar a las demostraciones daremos el siguiente lema.

Lema 3.4. Sea $\tau = \{C_i' x \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, p\}$ un cono convexo poliédrico cerrado de R^k de modo que $P_0(X \in \tau) > 0$.

Entonces

$$P_0(X'\Lambda^{-1}X > t; \quad C_i'X \geqslant 0) = P_0(X'\Lambda^{-1}X > t) P_0(C_i'X \geqslant 0)$$

Demostración. Sea $Y = AX$ de modo que bajo $\theta = 0$, $Y \to N_k(0, I)$.

$$P_0(X'\Lambda^{-1}X > t; C_i'X \geqslant 0) = P_0(Y'Y > t; C_i'A^{-1}Y > 0)$$

Efectuando ahora la transformación de Y a coordenadas polares $(\rho, \zeta_1, \ldots, \zeta_{k-1})$ donde $\rho = y'y$, se obtiene inmediatamente el resultado, dada la independencia entre ρ y los ángulos ζ_i (véase Kendall I, pág. 247, 1969), y dado que las restricciones lineales que definen τ sólo son función de ζ_i, $i = 1, 2, \ldots, k-1$.

Este lema es una generalización del lema 3.2. de Kudo (1963), por cuanto es aplicable a una normal cualquiera no singular y a cualquier cono convexo poliédrico y cerrado de R^k.

4. DEMOSTRACIONES

Se reducen a probar en cada caso que

$$P_0(T \geqslant t/X \in R_M) = P(\chi^2 \geqslant t).$$

Demostración del Teorema 3.1. Sea C una matriz $k \times k$ no singular particionada en la forma

$$C = \begin{bmatrix} & C'_1 & \\ & \vdots & \\ & C'_m & \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ 0 & \vdots & I_{k-m} \end{bmatrix}$$

$Y = CX \to N_k(\mu, \Gamma)$ con $\mu = C\theta$ y $\Gamma = C\Lambda C'$ no singular. Por la invariancia de la estimación máximo verosímil frente a transformaciones lineales cuando las restricciones son también lineales (Menéndez, J. A. (1982), se deduce que $\bar{\mu} = C\bar{\theta}$ es el E.M.V. para μ cuando $\mu \in \{C'_i C^{-1}\mu \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, p\}$.

De esta forma

$$P_0(T_{01} \geqslant t/X \in R_M) = P_0(\bar{\mu}'\Gamma^{-1}\bar{\mu} \geqslant t/\bar{\mu}_i = 0, \quad i \in M^c; \quad C'_i C^{-1}\bar{\mu} > 0, \quad i \in M)$$

Pero $\bar{\mu}$ es la proyección, según Γ^{-1}, de Y sobre el subespacio $L^*_M = \{\mu/\mu_i = 0, \quad i \in M^c\}$, ésto es $\bar{\mu} = P^*_M$ y siendo fácil comprobar que

$$P_M^* = \begin{bmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ \cdots\cdots\cdots & \vdots & \cdots\cdots \\ -\Gamma_{21}\Gamma_{11}^{-1} & \vdots & I_{k-m} \end{bmatrix}$$

sin más que particionar

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \vdots & \Gamma_{12} \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ \Gamma_{21} & \vdots & \Gamma_{22} \end{bmatrix}$$

y Γ_{11} $m \times m$.

Así podemos asegurar que $\bar{\mu} \to N_k(P_M^*\mu, P_M^*\Gamma P_M^{*\prime})$, distribución normal k-dimensional singular de rango $k - m$.

Si llamamos $\bar{\mu}_M$ al subvector de $\bar{\mu}$ formado por sus $k - m$ últimas componentes se deduce que bajo $H_0 \bar{\mu}_M \to N_{k-m}(0, \Gamma_{22.1})$ con $\Gamma_{22.1} = \Gamma_{22} - \Gamma_{21}\Gamma_{11}^{-1}\Gamma_{12}$ no singular.

Por otra parte $C_i'C^{-1}\mu$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ bajo R_M se reducen a una cierta combinación lineal de sólo las componentes de $\bar{\mu}_M(C_i'C^{-1}\bar{\mu} = b_i'\bar{\mu}_M$, $i = 1, 2, \ldots, p$ con ciertos $b_i)$.

Además $\bar{\mu} \in L_M^*$ y particionando Γ^{-1}

$$\Gamma^{-1} = \begin{bmatrix} \Gamma_{11}^* & \vdots & \Gamma_{12}^* \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ \Gamma_{21}^* & \vdots & \Gamma_{22}^* \end{bmatrix}$$

resulta que cuando $X \in R_M$ $T_{01} = \bar{\mu}_M'\Gamma_{22}^*\bar{\mu}_M$, forma cuadrática definida positiva de rango $k - m$.

En consecuencia podemos escribir en virtud de las consideraciones anteriores

$$P_0(T_{01} \geqslant t/X \in R_M) = P_0(\bar{\mu}_M'\Gamma_{22}^*\bar{\mu}_M \geqslant t/b_i'\bar{\mu}_M > 0, \quad i \in M)$$

De la expresión de la matriz Γ particionada inversa se deduce que

$$\Gamma_{22.1}^{-1} = \Gamma_{22}^*$$

y como

$$\operatorname{rang}(\Gamma_{22}^*\Gamma_{22.1}) = k - m,$$

según 3b.4.8 de Rao (1972) se verifica que

$$\bar{\mu}'_M \Gamma^*_{22} \bar{\mu}_M \to \chi^2_{k-m} \quad \text{bajo } H_0$$

Basta aplicar el lema 3.4 a la expresión anterior de la probabilidad condicional para obtener el resultado.

DEMOSTRACIÓN del Teorema 3.2. Supongamos que $\dim L_\phi = d > 0$. Si $\operatorname{rang}(C_1, \ldots, C_p) = r$ entonces $d = k - r$ y sin pérdida de generalidad podemos suponer que $C_1, C_2, \ldots, C_r$ son linealmente independientes y que generan el subespacio ortogonal a L_ϕ.

Sea

$$C = \begin{bmatrix} & C'_1 & \\ & \vdots & \\ & C'_r & \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ 0 & \vdots & I_{k-r} \end{bmatrix} k \times k \qquad \text{no singular.}$$

Sea $Y = CX$ de modo que $Y \to N_k(\mu, \Gamma)$ donde $\mu = C\theta$ y $\Gamma = C\Lambda C'$ es $k \times k$ no singular.

Si llamamos $\bar{\mu}$ al E.M.V. para μ cuando $\mu \in \tau^* = \{C'_i C^{-1} \mu \geqslant 0, i = 1, 2, \ldots, p\}$ y μ^0 al E.M.V. para μ cuando $\mu \in \tau^*_\phi$, se verifica que

$$P_0(T^*{}_{01} \geqslant t / X \in R_M) = P_0((\bar{\mu} - \mu^0)' \Gamma^{-1} (\bar{\mu} - \mu^0) \geqslant t / \bar{\mu}_i = 0, \quad i \in M^c;$$
$$\bar{\mu}_j > 0, \quad j = m+1, \ldots, r; \quad C'_i C^{-1} \bar{\mu} > 0; \quad i = r+1, \ldots, p).$$

Sea T una matriz $k \times k$ triangular no singular tal que $T\Gamma T' = I$. (Para su construcción puede verse por ejemplo Anderson (1958).

Si $Z = TY$ entonces $Z \to N_k(\tau, I)$ con $\tau = T\mu$.

Sea $\tau^{**} = \{C'_i C^{-1} T^{-1} \tau \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, p\}$. Si $\tau^0 = T\mu^0$ y $\bar{\tau} = T\bar{\mu}$ son los E.M.V. para τ bajo τ^{**}_ϕ y τ^* respectivamente, entonces

$$T^*_{01} = (\bar{\tau} - \tau^0)'(\bar{\tau} - \tau^0).$$

La condición $X \in R_M$ viene definida por

$$\bar{\tau}_i = 0, \quad i \in M^c; \quad T_i^{-1} \bar{\tau} > 0, \quad i = m+1, \ldots, r;$$
$$C'_i C^{-1} T^{-1} \bar{\tau} > 0, \quad i = r+1, \ldots, p.$$

Pero $\bar{\tau}$ es la proyección ortogonal, bajo $\theta = 0$, de Z sobre el subespacio definido por $Z_i = 0$, $i \in M^c$, cuando $X \in R_M$, luego $\bar{\tau} = (0, \ldots, 0,$

$Z_{m+1}, \ldots, Z_k)'$ y análogamente $\tau^0 = (0, \ldots, 0, \quad Z_{r+1}, \ldots, Z_k)'$ y por tanto bajo la condición $X \in R_M$ y cuando $\theta = 0$,

$$T_{01}^* = \sum_{i=m+1}^{r} Z_i^2 \rightarrow \chi_{r-m}^2.$$

Por otra parte si particionamos

$A_i = C_i' C^{-1} T^{-1}$según $A_i = (A_i^0 \;\vdots\; A_i^1 \;\vdots\; A_i^2)$, $i = r+1, \ldots, p$, de modo que A_i^0 son las m primeras componentes de A_i, A_i^1 las $r-m$ siguientes y A_i^2 las $k-r$ últimas, entonces cuando $\bar{\tau}_i = 0$, $i \in M^c$

$$C_i' C^{-1} T^{-1} \bar{\tau} = 0 + A_i^1 \begin{pmatrix} Z_{m+1} \\ \vdots \\ Z_r \end{pmatrix} + A_i^2 \begin{pmatrix} Z_{r+1} \\ \vdots \\ Z_k \end{pmatrix}$$

pero

$$A_i^2 \begin{pmatrix} Z_{r+1} \\ \vdots \\ Z_k \end{pmatrix} = C_i' C^{-1} T^{-1} \tau^0 = 0 \qquad i = r+1, \ldots, p$$

por definición de τ^0, luego bajo $X \in R_M$

$$C_i' C^{-1} T^{-1} \bar{\tau} = A_i^1 \begin{pmatrix} Z_{m+1} \\ \vdots \\ Z_r \end{pmatrix}$$

y por tanto la condición $C_i' C^{-1} T^{-1} \bar{\tau} > 0$, $i = r+1, \ldots, p$, es función de las variables $Z_{m+1}, \ldots, Z_r$.

Análogamente por ser T^{-1} triangular, cuando $\bar{\tau}_i = 0$, $i \in M^c$, las condiciones $T_i^{-1} \bar{\tau} > 0$, $i = m+1, \ldots, r$ son restricciones lineales en las variables $Z_{m+1}, \ldots, Z_r$.

En consecuencia la aplicación del lema 3.4 permite obtener el teorema 3.2.

Omitiremos la demostración del teorema 3.3. dado que se obtiene con el mismo método empleado para demostrar el 3.2.

Distribución conjunta de T_{01}^* y T_{12}. La matriz C definida en la anterior demostración al teorema 3.2 también podría ser utilizada para obtener la distribución de T_{12}, de forma que la matriz Γ fuera la misma, lo cual significaría que podríamos utilizar la matriz T triangular en ambos casos.

De esta forma, cuando $X \in R_M$, y como resultado de efectuar las transformaciones C y T, obtendríamos

$$T_{01}^* = \sum_{i=m+1}^{r} Z_i^2; \qquad T_{12} = \sum_{i=1}^{m} Z_i^2$$

Entonces

$$P_0(T_{01}^* \geq t'; \quad T_{12} \geq t''/X \in R_M) = P_0\left(\sum_{i=m+1}^{r} Z_i^2 \geq t'; \quad \sum_{i=1}^{m} Z_i^2 \geq t''/\right.$$
$$\left. /Z_i < 0, \quad i \in M^c; \quad A_i^1 \begin{bmatrix} Z_{m+1} \\ \vdots \\ Z_r \end{bmatrix} > 0, \quad i = r+1, \ldots, p \right) =$$
$$= P(\chi_{r-m}^2 \geq t')P(\chi_m^2 \geq t'')$$

y podemos enunciar el siguiente teorema.

Teorema 4.5.

$$P_0(T_{01}^* \geq t'; \quad T_{12} \geq t'') =$$
$$= \sum_{M \subset \{1,2,\ldots,p\}} P(\chi_{r-\#M^c}^2 \geq t')P(\chi_{\#M^c}^2 \geq t'')P_0(X \in R_M).$$

Además bajo $X \in R_M$ queda probado que los estadísticos T_{01}^* y T_{12} son independientes cuando $\theta = 0$.

5. PROPIEDADES DE LOS T.R.V.

Esta última sección la dedicaremos a probar ciertas propiedades de los T.R.V. anteriormente expuestos y que desde luego han de ser exigidas a cualquier test propuesto para los contrastes anteriores.

Teorema 5.1. La potencia del T.R.V. definido por T_{01}^* tiende hacia uno uniformemente en $\theta \in \tau$ cuando $(\theta - \theta^*)'\Lambda^{-1}(\theta - \theta^*) \to \infty$, siendo θ^* la proyección, según Λ^{-1}, de θ sobre τ_ϕ.

DEMOSTRACIÓN. Sea θ cualquiera fijado de τ. Hemos de probar que fijado $\epsilon > 0$, existe M independiente de θ tal que si $(\theta - \theta^*)'\Lambda^{-1}(\theta - \theta^*) \geqslant \geqslant M$ entonces $P_\theta(T_{01}^* > t) > 1 - \epsilon$.

Sea $T_* = (X - \theta^0)'\Lambda^{-1}(X - \theta^0) - (X - \theta)'\Lambda^{-1}(X - \theta)$. Teniendo en cuenta la primera expresión de T_{01}^* obtenida en (2) y dado que $\bar{\theta}$ es el E.M.V. para θ bajo τ, se deduce que $T_{01}^* \geqslant T_*$ luego cualquiera que sea $\theta \in \tau$,

$$P_\theta(T_{01}^* > t) \geqslant P_\theta(T_* > t) \quad \forall t.$$

Bajo θ, $(X - \theta)'\Lambda^{-1}(X - \theta) \rightarrow \chi_k^2$, distribución independiente de θ, luego el problema estará resuelto si demostramos que dado $\epsilon > 0$, existe $M(\epsilon)$ tal que si

$$(\theta - \theta^*)'\Lambda^{-1}(\theta - \theta^*) > M$$

entonces

$$P_\theta((X - \theta^0)'\Lambda^{-1}(X - \theta^0) > t) > 1 - \epsilon.$$

Si $C_1, \ldots, C_r$ son los vectores definidos en la demostración del teorema 3.2, dado que $\theta^0 \in L_\phi$ se verifica que $C_i'\theta^0 = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, r$. Sea $Z = TCX$, con C y T las matrices utilizadas en dicha demostración.

Entonces $Z \rightarrow N_k(\tau, I)$ con $\tau = TC\theta$. Además $\tau^0 = TC\theta^0$ verifica que

$$\tau_i^0 = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, r; \quad \tau_i^0 = Z_i, \quad i = r + 1, \ldots, k.$$

Por consiguiente,

$$P_\theta((X - \theta^0)'\Lambda^{-1}(X - \theta^0) > t) = P_\tau((Z - \tau^0)'(Z - \tau^0) > t) = \\ = P_\tau\left(\sum_{i=1}^{r} Z_i^2 > t\right)$$

Bajo τ,

$$\sum_{i=1}^{r} Z_i^2 \rightarrow \chi_r^2(\lambda)$$

con parámetro de descentralidad

$$\lambda = \sum_{i=1}^{r} \tau_i^2.$$

Por otra parte dado τ cualquiera de τ^*, $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_k)'$, su proyección ortogonal τ^* sobre L_ϕ es $\tau^* = (0, \ldots, 0, \quad \tau_{r+1}, \ldots, \tau_k)'$ luego

$$(\theta - \theta^*)'\Lambda^{-1}(\theta - \theta^*) = (\tau - \tau^*)'(\tau - \tau^*) = \sum_{i=1}^{r} \tau_i^2 = \lambda.$$

La función de distribución $F(t; r, \lambda)$ de una $\chi_r^2(\lambda)$ es decreciente en λ para t, k fijados y además

$$F(t; r, \lambda) \to 0 \quad \text{si} \quad \lambda \to \infty.$$

En consecuencia fijado $\epsilon > 0$ $\exists M(\epsilon)$ tal que si $\lambda > M$ entonces,

$$P_\tau\left(\sum_{i=1}^{r} Z_i^2 > t\right) > 1 - \epsilon$$

y tenemos la demostración buscada.

Teorema 5.2. La potencia del T.R.V. T_{01} tiende hacia uno uniformemente en $\theta \in \tau$ cuando $\theta'\Lambda^{-1}\theta \to \infty$.

DEMOSTRACIÓN. Aunque algo mas sencilla que la demostración del teorema 5.1, sigue una línea paralela, por lo que la omitiremos.

Teorema 5.3. El nivel de significación del T.R.V. definido por T_{12} es $P_0(T_{12} > t)$.

DEMOSTRACIÓN. Sea θ_0 cualquiera fijado de τ. Sea $\bar{\theta}_0$ la proyección, según Λ^{-1}, de $X - \theta_0$ sobre τ, y sea $T = (X - \theta_0 - \bar{\theta}_0)'\Lambda^{-1}(X - \theta_0 - \bar{\theta})$. $\theta_0 + \bar{\theta}_0 \in \tau$ luego dado que $\bar{\theta}$ es el E.M.V. para θ bajo τ y dada la expresión de T_{12} obtenida en (2) se deduce que $T_{12} \leqslant T$, luego

$$P_{\theta_0}(T_{12} > t) \leqslant P_{\theta_0}(T > t)$$

Por otra parte, ya que bajo θ_0, $X - \theta_0 \to N_k(0, \Lambda)$ se demuestra fácilmente que

$P_{\theta_0}(T > t) = P_0(T_{12} > t)$.

Por tanto, hemos demostrado que ya que θ^0 es cualquiera de τ

$$P_\theta(T_{12} > t) \leqslant P_0(T_{12} > t) \qquad \forall\theta \in \tau$$

y queda probado el teorema.

Teorema 5.4. La potencia del T.R.V. definido por T_{12} tiende hacia uno uniformemente en θ si $(\theta - \bar{\theta}^*)'\Lambda^{-1}(\theta - \bar{\theta}^*) \to \infty$, siendo $\bar{\theta}^*$ el punto de R^k que hace mínima la función

$$(\theta - \theta^*)'\Lambda^{-1}(\theta - \theta^*) \quad \text{en} \quad \theta^* \in \tau.$$

Demostración. Sea $E(\theta; r) = \{x \in R^k\colon\ (x - \theta')\Lambda^{-1}(x - \theta) \leqslant r\}$. Bajo θ, $X \to N_k(\theta, \Lambda)$ luego $P_\theta(X \in E(\theta; r))$ es una función creciente en r, de modo que $P_\theta\ (X \in E(\theta; r)) \to 1$ si $r \to \infty$ cualquiera que sea θ fijados de R^k.

Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ los valores propios de Λ, y sea $\lambda_{\min} = \min(\lambda_1, \ldots$ $\ldots, \lambda_k)$. Entonces el semieje mayor principal del elipsoide $(x - \theta)'\Lambda^{-1}(x - \theta) = t$ tiene una longitud $l = (t \cdot \lambda_{\min})^{1/2}$.

Fijado $\epsilon > 0$, existe $r(\epsilon) > 0$ tal que $P_\theta(X \in E(\theta; r(\epsilon)) = 1 - \epsilon$, y la longitud del semieje mayor del elipsoide que cierra la región $E(\theta; r(\epsilon))$ es $l' = (r(\epsilon)\lambda_{\min})^{1/2}$.

Sea θ cualquiera fijado de R^k tal que $(\theta - \bar{\theta}^*)'(\theta - \bar{\theta}^*) \geqslant l + l'$. Entonces cualquiera que sea t

$$\{T_{12} \geqslant t\} \subset \{X \notin E(\theta; r(\epsilon))\}$$

luego,

$$P_\theta(T_{12} \leqslant t) \leqslant P_\theta(X \notin E(\theta; r(\epsilon))) = \epsilon$$

y se deduce el resultado buscado ya que la condición

$$(\theta - \bar{\theta}^*)'(\theta - \bar{\theta}^*) \geqslant l + l'$$

es equivalente a que

$$(\theta - \bar{\theta}^*)\Lambda^{-1}(\theta - \bar{\theta}^*) \geqslant t + r(\epsilon).$$

La cota $l + l'$ o bien $t + r(\epsilon)$ sólo depende de ϵ, para nada de θ, lo que significa la uniformidad de la convergencia anterior.

Dado que $\{T_{12} = 0\} \subset \{T_{12} \leqslant t\}$ $\forall t > 0$ se deduce de la demostración anterior que $P_\theta(T_{12} = 0) \leqslant \epsilon$ y en consecuencia también se demuestra que

$$P_\theta(T_{12} = 0) \to 0 \quad \text{si} \quad (\theta - \bar{\theta}^*)'\Lambda^{-1}(\theta - \bar{\theta}^*) \to \infty.$$

Teorema 5.5. Si $P_0(X \in \tau) > 0$ entonces cualquiera que sea $t > 0$ se verifica que

$$\inf_{\theta \in \tau} P_\theta(T_{12} > t) = 0.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea θ_0 un punto interior de τ. Por hipótesis existe una esfera B abierta contenida en τ y centrada en θ_0.

Sea $c(\theta_0)$ un número real positivo fijado de forma que B contiene a la región

$$E(\theta_0) = \{x\colon\ (x - \theta_0)'\Lambda^{-1}(x - \theta_0) \leqslant c(\theta_0)\}.$$

Sea $E(\theta)$ un sistema de elipsoides homotéticos de $E(\theta_0)$, ésto es con $\theta = \lambda\theta_0$, $\lambda > 0$.

Sea τ^0 el cono convexo y cerrado generado por el sistema $E(\theta)$.

Si $\theta \in \{\theta = \lambda\theta_0\}$ es evidente que $P_\theta(X \in E(\theta))$ es una función creciente en λ, ya que si $\lambda' < \lambda''$ entonces $c(\lambda'\theta_0) < c(\lambda''\theta_0)$ y por tanto

$$P_{\lambda'\theta_0}(X \in E(\lambda'\theta_0)) \leqslant P_{\lambda''\theta_0}(X \in E(\lambda''\theta_0)).$$

Además $c(\lambda\theta_0) \to \infty$ si $\lambda \to \infty$ y por consiguiente

$$P_{\lambda\theta_0}(X \in E(\lambda\theta_0)) \to 1 \quad \text{si} \quad \lambda \to \infty.$$

Ahora bien si $t > 0$, cualquiera que sea $\lambda > 0$

$\{T_{12} > t\} \subset \{X \notin E(\lambda\Theta_0)\}$, luego cualquiera que sea $\theta = \lambda\theta_0$ se verifica que $\forall t > 0$

$$P_\theta(T_{12} > t) \to 0 \quad \text{si} \quad \lambda \to \infty,$$

y queda así probado el teorema.

Evidentemente se deduce de igual forma que

$$\sup_{\theta \in \tau} P_\theta(T_{12} = 0) = 1.$$

Teorema 5.6. Si θ', θ'' satisfacen que $\theta'' - \theta' \in \tau$, entonces

$$P_{\theta''}(T_{12} > t) \leqslant P_{\theta'}(T_{12} > t).$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\theta^0 = \theta'' - \theta' \in \tau$, y sea τ^0 el conjunto convexo y cerrado obtenido al trasladar el cono τ según θ^0, ésto es

$$\tau^0 = \{\theta\colon \theta = \theta^0 + \theta^*, \quad \forall \theta^* \in \tau\}.$$

Puesto que $\theta^0 \in \tau$, $\tau^0 \subset \tau$.

Sea $\bar{\theta}$ el E.M.V. para θ bajo τ y $\bar{\theta}^0$ bajo τ^0; ya que $\bar{\theta}^0 \in \tau$ y por ser $\bar{\theta}$ el E.M.V. bajo τ se cumple que $T_{12} \leqslant (X - \bar{\theta}^0)'\Lambda^{-1}(X - \bar{\theta}^0)$, luego

$$\begin{aligned} P_{\theta''}(T_{12} > t) &\leqslant P_{\theta''}((X - \bar{\theta}^0)'\Lambda^{-1}(X - \bar{\theta}^0) > t) = \\ &= P_{\theta''}(((X - \theta^0 - (\bar{\theta}^0 - \theta^0))'\Lambda^{-1}(X - \theta^0 - (\bar{\theta}^0 - \theta^0)) > t) \end{aligned}$$

Bajo θ'', $X \to N_k(\theta'', \Lambda)$ luego $X - \theta^0 \to N_k(\theta', \Lambda)$ y además $\bar{\theta}^0 - \theta^0$ es la proyección, según Λ^{-1}, de $X - \theta^0$ sobre τ. Por tanto podemos asegurar que

$$P_{\theta''}(T_{12} > t) \leqslant P_{\theta'}((X - \bar{\theta})'\Lambda^{-1}(X - \bar{\theta}) > t) = P_{\theta'}(T_{12} > t)$$

como queríamos demostrar.

Este último teorema asegura que la función potencia de T_{12} verifica una cierta monotonía.

REFERENCIAS

ANDERSON, T. W. (1958), «An Introduction to Multivariate Statistical Analysis». Ed. Wiley.

BARLOW, R. E., BARTHOLOMEW, D. J., BREMNER, J. M., BRUNK, H. D. (1972), «Statistical Inference under Order Restrictions». Ed. Wiley.

KENDALL, M. G., STUART, A. (1969), «The Advanced Theory of Statistics, vol. I». Ed. Griffin.

KUDO, AKIO (1961), «A multivariate analogue of the one-sided test». *Biometrika*, **50**, 403-418.

MENÉNDEZ, J. A. (1982), «Problemas de estimación de medias normales que se resuelven mediante los algoritmos P.A.V.A. o M.L.S.A.». Actas IX Jornadas Matemáticas Hispano-Lusas, vol. II, 687-690. Universidad de Salamanca.

RAO, C. C. (1973), «Linear Statistical Inference and its applications». Ed. Wiley.

ROBERTSON, T., WEGMAN, E. (1978), «Likehood Ratio Tests for restrictions in exponential families». *Ann. Statist.* 485-505.

SALVADOR, B. (1979), «Inferencia Estadística multidimensional bajo condiciones del tipo $k_i\theta_i \leqslant k_j\theta_j$ o $\theta_j + a_j \leqslant \theta_{j+1} \leqslant \theta_j + b_j$». Tesis doctoral. Universidad de Valladolid.