TRABAJOS DE ESTADISTICA Y
DE INVESTIGACIÓN OPERATIVA
Vol. 35. Núm. 2, 1984, pp. 170 a 186

UNA DEFINICIÓN DE ROBUSTEZ CUALITATIVA EN INFERENCIA BAYESIANA

Antonio Cuevas González
Facultad de Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid

Summary

We propose a definition of 'stability' for a Bayesian model, with respect to changes in basic distribution (prior distribution remains fixed). This definition is discussed and interpreted by means of the concept of continuity.

Sufficient conditions are also obtained for stability defined in this way and some examples are proposed.

Finally, we suggest a generalization, with prior distribution also variable, and we obtain a theorem for this new situation.

KEY WORDS: Robustness, Bayesian Inference, Qualitative Robustness.

Resumen

Proponemos una definición de «estabilidad» para un modelo bayesiano, respecto a cambios en la distribución básica (la distribución a priori se mantiene fija). Esta definición se discute e interpreta mediante el concepto de continuidad.

Se obtienen también condiciones suficientes para la estabilidad así definida y se proponen algunos ejemplos.

(*) Recibido, Febrero, 1982

Finalmente, se sugiere una generalización, con la distribución a priori también variable, y se obtiene un teorema para esta nueva situación.
PALABRAS CLAVE: Robustez, Inferencia bayesiana, Robustez cualitativa.
CLASIFICACIÓN A.M.S. (1980): Primaria 62F35; Secundaria 62F15.

1. INTRODUCCIÓN

Las distribuciones básicas que se utilizan en la metodología estadística pueden considerarse, en general, como modelos teóricos que representan solamente aproximaciones a las distribuciones «reales».

Las consecuencias de este hecho en la Inferencia Bayesiana han sido estudiadas por BOX y TIAO en diversos artículos publicados entre 1962 y 1968 recopilados posteriormente en su libro de 1973. El procedimiento empleado en estos trabajos es, a grandes rasgos, el siguiente:

La verosimilitud básica se supone perteneciente a una familia indexada por un parámetro $\alpha \in (-1, 1]$ de forma que para $\alpha = 0$ se obtiene la verosimilitud «teórica» $N(\theta, \sigma)$; la distribución a priori sobre los parámetros θ y σ está prefijada. Haciendo variar α se obtienen distintas verosimilitudes que corresponden a distribuciones básicas con coeficientes de kurtosis diferentes del de la normal.

Este modelo se aplica al estudio de algunos problemas estadísticos usuales y, en cada caso, se comparan las distribuciones a posteriori correspondientes a distintos valores de α. Cuando estas distribuciones no difieren mucho entre sí se habla, informalmente, de «robustez».

Un paso posterior en el análisis consiste en eliminar el parámetro α de las distribuciones a posteriori definiendo una distribución a priori adecuada en $(-1, 1]$ e integrando respecto a ella.

Se trata, en resumen, de un enfoque eminentemente «cuantitativo» en el que se estudia el efecto de considerar una u otra verosimilitud básica mediante cálculo directo de las distribuciones a posteriori utilizando incluso muestras numéricas concretas.

En el presente trabajo se aborda el problema bajo un punto de vista distinto al de BOX-TIAO y, en cierto modo, complementario a él: concretamente se intenta esbozar un enfoque formalizado de la robustez en Inferencia Bayesiana a partir de una definición de «modelo bayesiano estable» (o «cualitativamente robusto»). Esta definición está inspirada en la noción de continuidad y en ella se recoge la idea intuitiva de que un modelo es «estable» cuando pequeñas variaciones en la verosimilitud básica provocan alteraciones pequeñas en la distribución a posteriori.

Se trata, por tanto, de una estabilidad frente a cambios «infinitesimales» que representa sólo un aspecto parcial del problema de robustez. En cada caso concreto el estudio puede completarse con un análisis de tipo «cuantitativo» que se ocupe del efecto ocasionado por determinadas alteraciones «finitas» en la verosimilitud básica.

En el marco de la Inferencia Clásica o «Frecuentista» la llamada «Teoría de la Robustez Cualitativa» desarrollada por HAMPEL (1968, 1971) ofrece una formalización matemática de la idea de «estimador robusto» estrechamente relacionada con el concepto de funcional continuo en un espacio de funciones dotado de la topología débil.

Nuestro enfoque de la robustez en Inferencia Bayesiana presenta cierta afinidad de fondo con la teoría de HAMPEL ya que (en un ámbito diferente) ofrece también una traducción de la noción de robustez en términos de continuidad.

2. EL CONCEPTO DE ESTABILIDAD EN UN MODELO BAYESIANO

2.1 Planteamiento y notación

Sea un conjunto cerrado $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ (espacio paramétrico) dotado del correspondiente σ-álgebra de BOREL $\mathcal{B}(\Omega)$, sobre el cual se tiene definida una medida de probabilidad π (distribución a priori).

Sea $\mathfrak{U} = \{F_\alpha\}_{\alpha \in I}$ donde, para cada $\alpha \in I$, F_α es una aplicación

$$\begin{aligned} F_\alpha : \mathbb{R}^n \times \Omega &\to [0, 1] \\ (x, \theta) &\to F_\alpha(x|\theta) \end{aligned}$$

tal que, $\forall \theta \in \Omega$, la aplicación inducida $F(\cdot|\theta)$ es una función de distribución en $\mathbb{R}^n$.

Supondremos en lo sucesivo que $F_{\alpha_1}(\cdot|\theta_1) \neq F_{\alpha_2}(\cdot|\theta_2)$ siempre que $(\alpha_1, \theta_1) \neq (\alpha_2, \theta_2)$ y que, $\forall(\alpha, \theta) \in I \times \Omega$ la medida de probabilidad correspondiente a $F_\alpha(\cdot\,\theta)$ está dominada por una medida σ-finita en

$(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ respecto a la cual admite una densidad $f_\alpha(\cdot|\theta)$ (que no será única en general).

El caso más importante será aquel en que cada $F_\alpha(\cdot|\theta)$ corresponde a una distribución discreta (dominada por una medida «de contar») o continua (dominada por la medida de LEBESGUE μ_L) sin que necesariamente sean del mismo tipo todas las medidas dominantes.

Tenemos así definido un conjunto $\mathcal{V} = \{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$ en el que cada elemento es, formalmente, una aplicación (que se supondrá $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{B}(\Omega)$ medible) de $\mathbb{R}^n \times \Omega$ en $[0, \infty)$, aunque será útil interpretarlo más bien como un conjunto $\{f_\alpha(\cdot|\theta), \theta \in \Omega\}$ de funciones de densidad obtenidas cuando θ varía en Ω; lo representaremos indistintamente por f_α o por $f_\alpha(\cdot|\theta)$ (entendiendo que θ es variable). Con este convenio, también usaremos las notaciones más explícitas:

$$\mathcal{U} = \{F_\alpha(\cdot|\theta), \theta \in \Omega\}_{\alpha\in I}, \quad \mathcal{V} = \{f_\alpha(\cdot|\theta), \theta \in \Omega\}_{\alpha\in I}$$

Utilizando, por extensión, el lenguaje habitual en Inferencia Bayesiana, llamaremos «verosimilitudes» a los elementos de $\mathcal{V}$, aunque, más estrictamente, este término se suele emplear para designar a la función de θ definida por $f_\alpha(x|\theta)$ cuando x está fijo. En algunos casos, nosotros usararemos también la palabra «verosimilitud» en esta segunda acepción, lo cual no dará lugar a confusión pues se trata de una diferencia de matiz que quedará clara a partir del contexto.

I es un conjunto arbitrario de índices; usualmente se tendrá $I \subset \mathbb{R}^m$.

En lo sucesivo diremos que $\mathcal{V}$ y la distribución a priori π determinan un «modelo» al que denotaremos por $(\pi, \mathcal{V})$.

Según se deduce de lo expuesto, α y θ juegan un papel totalmente distintos: θ es el parámetro de interés para la inferencia, mientras que α es el índice de identificación de las verosimilitudes.

Así, en un problema concreto, cada valor de α corresponde a una posible verosimilitud teórica y los restantes valores están asociados a verosimilitudes alternativas que representan desviaciones respecto a ella.

En lo referente a la estructura de las $f_\alpha(x|\theta)$, el caso más importante será aquel en que $x = (x_1, \ldots, x_n)$ es una muestra correspondiente a n observaciones independientes idénticamente distribuidas (i.i.d.) con función de densidad unidimensional $p_\alpha(\cdot|\theta)$ (es decir, que $f_\alpha(x|\theta) = \prod_{i=1}^{n} p_\alpha(x_i|\theta)$). Sin embargo, no necesitaremos imponer esta hipótesis para obtener los principales resultados.

Para todo $x \in \mathfrak{X}_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n | 0 < \int_\Omega f_\alpha(x|\theta)\, d\pi(\theta) < \infty\}$, la expresión

$$\pi_\alpha(x|\theta) = \frac{f_\alpha(x|\theta)}{\int_\Omega f_\alpha(x|\theta)\, d\pi(\theta)}$$

define una π-función de densidad correspondiente a una distribución π-continua en Ω (distribución a posteriori).

En lo que sigue, la fórmula de Bayes será utilizada preferentemente en esta versión que es la más sencilla y general.

El valor de $n \in \mathbb{N}$ («tamaño muestral») se considerará fijo en principio.

Denotaremos por $F_\pi^{(\alpha)}(\cdot|x)$ la función de distribución correspondiente a la densidad a posteriori $\pi_\alpha(\cdot|x)$.

Cuando $\{F_r\}_{r \in \mathbb{N}}$ y F son funciones de distribución, la notación $F_r \xrightarrow[r\to\infty]{d} F$ indicará la convergencia débil de la sucesión $\{F_r\}_{r \in \mathbb{N}}$ hacia F.

$\mathcal{P}$ designará al conjunto de todas las distribuciones de probabilidad sobre Ω al que se considerará dotado de la topología débil que puede definirse a partir de la distancia de Prohorov d_p (ver Huber (1981)).

2.2 Definición

Sea el modelo $(\pi, \mathcal{V})$ definido por $\mathcal{V} = \{f_\alpha(\cdot|\theta), \theta \in \Omega\}_{\alpha \in I}$ y por la distribución a priori π sobre Ω.

Diremos que $(\pi, \mathcal{V})$ es *estable* (o cualitativamente robusto) en $f_{\alpha_0} \in \mathcal{V}$ cuando, para toda sucesión $\{f_{\alpha_r}\}_{r \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{V}$ tal que

$$F_{\alpha_r}(\cdot|\theta) \xrightarrow[r\to\infty]{d} F_{\alpha_0}(\cdot|\theta) \quad \forall \theta \in \Omega,$$

se verifica que $F_\pi^{(\alpha_r)}(\cdot|x) \xrightarrow[r\to\infty]{d} F_\pi^{(\alpha_0)}(\cdot|x)$ $\forall x \in \bigcap_{r=0}^{\infty} \mathfrak{X}$.

Cuando esta condición se verifique en f_α $\forall \alpha \in I$, se dirá que $(\pi, \mathcal{V})$ es estable.

2.3 Discusión y análisis de la definición

En primer lugar establecemos un resultado que nos permite concretar el significado estadístico y matemático de la definición anterior interpretándola en términos de continuidad.

Teorema 1. Dado un modelo $(\pi, \mathcal{V})$, supongamos que:

(i) $\forall(\alpha,\theta) \in I \times \Omega$, la función de distribución correspondiente a $f_\alpha(\cdot|\theta)$ es de la forma $F_\alpha(\cdot|\theta) = F_\alpha(u_\theta(\cdot))$, siendo $\mathcal{C} = \{F_\alpha\}_{\alpha \in I}$ un conjunto de funciones de distribución absolutamente continuas en $\mathbb{R}^n$ y, $\forall\theta \in \Omega$, $u_\theta: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ función biyectiva y bicontinua tal que $F_\alpha(u_\theta(\cdot))$ es función de distribución.
(ii) Existe un conjunto $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\mathcal{X}_\alpha = \mathcal{X}$ $\forall\alpha \in I$.

Entonces $(\pi, \mathcal{V})$ es estable en $f_{\alpha 0}$ si y solo si todos los operadores $\{B_x\}_{x \in \mathcal{X}}$ son continuos en $F_{\alpha 0}$, siendo $\forall x \in \mathcal{X}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &\xrightarrow{B_x} \mathcal{P} \\ F_\alpha &\longrightarrow B_x(F_\alpha) = F_\pi^{(\alpha)}(\cdot|x) \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar obsérvese que

$$\begin{aligned} F_{\alpha_r} \xrightarrow[r\to\infty]{d} F_{\alpha 0} &\Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{R}^n \lim_{r\to\infty} F_{\alpha_r}(y) = F_{\alpha 0}(y) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall\theta \in \Omega, \lim_{r\to\infty} F_{\alpha_r}(u_\theta(x)) = F_{\alpha 0}(u_\theta(x)). \end{aligned} \tag{1}$$

La primera equivalencia se verifica por ser $F_{\alpha 0}$ continua. La implicación hacia la derecha en la segunda equivalencia se obtiene trivialmente haciendo $y = u_\theta(x)$. La implicación hacia la izquierda se obtiene haciendo $x = u_\theta^{-1}(y)$ para un valor cualquiera, prefijado, de θ. Así, se tiene

$$F_{\alpha_r} \xrightarrow[r\to\infty]{d} F \Leftrightarrow F_{\alpha_r}(\cdot|\theta) \xrightarrow[r\to\infty]{d} F_{\alpha 0}(\cdot|\theta) \qquad \forall\theta \in \Omega \tag{2}$$

Por otra parte, la caracterización de la continuidad por sucesiones, (en $\mathcal{C}$ se considera también la topología débil) nos permite afirmar que $\forall x \in \mathcal{X}$, B_x es continuo en $F_{\alpha 0} \Leftrightarrow$ Para toda sucesión $\{F_{\alpha_r}\}_{r \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}$ tal que $F_{\alpha_r} \xrightarrow[r\to\infty]{d} F_{\alpha 0}$, se verifica que $B_x(F_{\alpha_r}) = F_\pi^{(\alpha_r)}(\cdot|x) \xrightarrow[r\to\infty]{d} B_x(F_{\alpha 0}) = F_\pi^{(\alpha 0)}(\cdot|x)$ y este último enunciado es a su vez equivalente por (2) y por la definición enunciada en 2.2 a la estabilidad de $(\pi, \mathcal{V})$ en $F_{\alpha 0}$.

El hecho de que las posibles distribuciones básicas sean del tipo $F_\alpha(\cdot|\theta) = F_\alpha(u_\theta(\cdot))$, significa que, para un valor de θ fijo, las $F_\alpha(\cdot|\theta)$ $(\alpha \in I)$ sólo se diferencian por la «forma» dada por F_α, mientras que el parámetro θ desempeña el mismo papel en todas ellas. Esta es una situación sumamente general que incluye, por ejemplo, el caso de que θ sea un parámetro de posición o de escala.

Así, el significado intuitivo de la noción de estabilidad en las condiciones del Teorema 1 resulta bastante claro: el modelo es estable en $f_{\alpha 0}$ cuando las desviaciones suficientemente pequeñas en la forma de la distribución básica provocan alteraciones pequeñas en la distribución a posteriori.

Puede darse una segunda interpretación matemática para la definición del apartado 2.2, aplicable en algunas situaciones no consideradas en el Teorema 1.

El resultado es el siguiente:

Teorema 2. Sea un modelo $(\pi, \mathcal{V})$ tal que la correspondiente familia $\mathcal{U} = \{ F_\alpha(\cdot|\theta), \theta \in \Omega \}_{\alpha \in I}$ verifica que para toda sucesión

$$\{F_{\alpha_r}(\cdot|\theta)\}_{r \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{U}$$

con $F_{\alpha_r}(\cdot|\theta) \underset{r\to\infty}{\overset{d}{\longrightarrow}} F_{\alpha 0}(\cdot|\theta)$ $\forall \theta \in \Omega$, se tiene $d_p^*(f_{\alpha_r}, f_{\alpha 0}) = \sup_{\theta \in \Omega} d_p(F_{\alpha_r}(\cdot|\theta), F_{\alpha 0}(\cdot|\theta)) \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Entonces:

(i) d_p^* es una métrica en $\mathcal{V}$.

(ii) $(\pi, \mathcal{V})$ es estable en $f_{\alpha 0}$ si y solo si $\forall x \in \mathcal{X}_{\alpha_0}$ el operador $B_x^{(\alpha_0)}$: $\mathcal{V} \to \mathcal{P}$, definido por

$$B_x^{(\alpha 0)}(f_\alpha) = \begin{cases} F_\pi^{(\alpha)}(\cdot|x) & \text{si} \quad x \in \mathcal{X}_\alpha \\ F_\pi^{(\alpha 0)}(\cdot|x) & \text{si} \quad x \notin \mathcal{X}_\alpha \end{cases}$$

es continuo en $f_{\alpha 0}$.

La demostración de este resultado es sencilla y puede verse en CUEVAS (1981).

La hipótesis del Teorema 2 tiene un contenido intuitivo similar al de la convergencia uniforme de una sucesión de funciones y se introduce para definir una topología «natural» en $\mathcal{V}$ que nos permita hablar de continuidad.

Si $F_\alpha(\cdot|\theta) = F_\alpha(\cdot - \theta)$, se comprueba de inmediato que $d_p^*(f_{\alpha 1}, f_{\alpha 2}) = d_p(F_{\alpha 1}, F_{\alpha 2})$ y, en consecuencia, las condiciones de aplicación del Teorema 2 son, en este caso, más generales que las del Teorema 1, si bien este último admite una interpretación estadística más interesante y directa.

Por último, hay un aspecto formal que merece ser comentado: con la definición propuesta, la estabilidad de un modelo depende esencialmente de la familia $\mathcal{V} = \{f_\alpha(\cdot|\theta), \theta \in \Omega\}_{\alpha \in I}$ elegida para representar a $\mathcal{U} = \{F_\alpha(\cdot|\theta), \theta \in \Omega\}_{\alpha \in I}$. En efecto, es fácil encontrar un ejemplo de un modelo $(\pi, \mathcal{V})$, estable en $f_{\alpha 0}$, tal que, modificando adecuadamente las densidades $f_\alpha(\cdot|\theta)$ en conjuntos de medida dominante nula, obtenemos nuevas densidades $\tilde{f}_\alpha(\cdot|\theta)$ de forma que el modelo resultante $(\pi, \tilde{\mathcal{V}})$ sea inestable en $\tilde{f}_{\alpha 0}$ aunque las $f_\alpha(\cdot|\theta)$ y $\tilde{f}_\alpha(\cdot|\theta)$ definen la misma distribución de probabilidad $F_\alpha(\cdot|\theta)$ (Cuevas 1981).

Esta observación sugiere la posibilidad de modificar la definición de tal manera que la estabilidad resulte ser un concepto intrínseco a $(\pi, \mathcal{U})$ independientemente de las densidades elegidas. Esto podría conseguirse en el caso particular de que (siendo π discreta o μ_L-continua), todas las posibles distribuciones básicas fueran μ_L-continuas manteniendo el mismo texto actual de la definición de 2.2 y añadiendo al final la expresión «...excepto, a lo sumo, para un conjunto $A \subset \bigcap_{r=0}^{\infty} \mathcal{X}_{\alpha_r}$ con $\mu_L(A) = 0$». No obstante, si $\mathcal{U}$ incluye distribuciones dominadas por distintas medidas (por ejemplo, distribuciones discretas y μ_L-continuas) la modificación anterior ya no sería adecuada y nos veríamos obligados a entrar en una casuística complicada y artificial.

En definitiva, se ha preferido mantener la definición en su forma actual (dependiendo de la familia concreta $\mathcal{V}$ que se ha elegido) por las siguientes razones:

(*a*) El enunciado propuesto recoge lo esencial de la idea en la forma más sencilla posible y es aplicable a situaciones muy generales.

(*b*) En la mayoría de los casos prácticos la familia $\mathcal{V}$ viene dada de una forma natural y nos interesa estudiar el problema para esa familia concreta, lo cual está de acuerdo, por otra parte, con la metodología bayesiana usual en la que la verosimilitud viene fijada.

3. CONDICIONES SUFICIENTES DE ESTABILIDAD

Se plantea ahora de manera natural el problema de hallar condiciones manejables que nos permitan deducir la estabilidad sin necesidad de acudir directamente a la definición.

Consideremos en primer lugar el siguiente ejemplo: $\mathcal{V} = \{f_{\alpha}(\cdot|\theta), \theta \in \Omega = [1, 2]\}_{\alpha \in \mathbb{R}}$ donde $\forall(\alpha, \theta) \in \mathbb{R} \times [1, 2]$, $f_\alpha(\cdot|\theta)$ es una función de densidad univariante definida por

$$f_\alpha(x|\theta) = (1 - \varepsilon)\frac{1}{2\theta}I_{(-\theta,\theta)}(x) + \varepsilon g_\alpha(x)$$

siendo $I_{(-\theta,\theta)}$ la función indicatriz del intervalo $(-\theta, \theta)$, $\varepsilon \in (0, 1)$ una constante conocida y $\{g_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{R}}$ una familia de densidades en $\mathbb{R}$ tal que $g_r(x) = [1 + \cos 2\pi r x]I_{(0,1)}(x)$ para $r \in \mathbb{N}$ y $g_0(x) = I_{(0,1)}(x)$. Tomamos como distribución a priori la uniforme en $\Omega = [1, 2]$.

Mediante cálculo directo se obtiene $F_r(\cdot|\theta) \xrightarrow[r\to\infty]{d} F_0(\cdot|\theta)$ $\forall\theta \in [1, 2]$ y, sin embargo, tomando p.e. $x = \frac{1}{2}$ se tiene $F_\pi^{(r)}(\cdot|\frac{1}{2}) \not\to F_\pi^{(0)}(\cdot|\frac{1}{2})$. Por tanto, el modelo es inestable en f_0.

Un ligero análisis de este ejemplo nos lleva concluir que la inestabilidad se debe al hecho de que $F_r(\cdot|\theta) \xrightarrow[r\to\infty]{d} F_0(\cdot|\theta)$ $\forall\theta \in [1, 2]$ no implica $f_r(x|\theta) \xrightarrow[r\to\infty]{} f_0(x|\theta)$ $\forall x$.

En general, dada la estructura de la fórmula de Bayes, la metodología más directa para obtener resultados sobre estabilidad es imponer condiciones sobre el modelo que permitan asegurar la implicación «$F_{\alpha_r}(\cdot|\theta) \xrightarrow[r\to\infty]{d} F_{\alpha_0}(\cdot|\theta)$ $\forall\theta \in \Omega \Rightarrow f_{\alpha_r}(x|\theta) \xrightarrow[r\to\infty]{} f_{\alpha_0}(x|\theta)$ $\forall x$ $\forall\theta$». A partir de aquí, introduciendo alguna condición adicional, se concluirá la convergencia puntual de las densidades a posteriori y, en consecuencia, utilizando el Teorema de Scheffé (Rao, 1973, p. 135), se obtendrá la estabilidad. Este es, en esencia, el procedimiento seguido en los Teoremas 4 y 5 que demostramos más adelante, mientras que el Teorema 3 se basa en un principio distinto.

Estableceremos previamente estos resultados y a continuación haremos algunos comentarios sobre su alcance y significado.

Teorema 3. Sea π una distribución a priori μ_L-continua sobre $\Omega = \mathbb{R}^n$ que admite una función de densidad, p, continua y acotada en $\mathbb{R}^n$.

Sea $\mathcal{V} = \{f_\alpha(\cdot|\theta),\ \ \theta \in \Omega\}_{\alpha \in I}$ donde $f_\alpha(x|\theta) = f_\alpha(x - \theta)$ y, $\forall\alpha \in I$, $f_\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ es una μ_L-densidad. Entonces, el modelo $(\pi, \mathcal{V})$ es estable.

Demostración. Sea $F_{\alpha_r}(\cdot|\theta) \xrightarrow{d} F_\alpha(\cdot|\theta)$ $\forall\theta \in \Omega$. Tenemos que probar que, para toda función $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua y acotada, se verifica

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(\theta)\, dF_\pi^{(\alpha_r)}(\theta|x) \xrightarrow[r\to\infty]{} \int_{\mathbb{R}^n} u(\theta)\, dF_\pi^{(\alpha)}(\theta|x) \qquad (3)$$

En efecto, denotando $K_r(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f_{\alpha_r}(x-\theta)p(\theta)\,d\theta$ y haciendo el cambio de variable $x - \theta = w$, tenemos

$$\begin{aligned}
K_r(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f_{\alpha_r}(w)p(x-w)\,dw \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^n} f_\alpha(w)p(x-w)\,dw = \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f_\alpha(x-\theta)p(\theta)\,d\theta = K_0(x); \int_{\mathbb{R}^n} u(\theta)\,dF_\pi^{(\alpha_r)}(\theta|x) = \\
&= [K_r(x)]^{-1}\int_{\mathbb{R}^n} f_{\alpha_r}(w)p(x-w)u(x-w)\,dw \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} \\
&\underset{r\to\infty}{\longrightarrow} [K_0(x)]^{-1}\int_{\mathbb{R}^n} f_\alpha(w)p(x-w)u(x-w)\,dw = \\
&= [K_0(x)]^{-1}\int_{\mathbb{R}^n} f_\alpha(x-\theta)p(\theta)u(\theta)\,d\theta
\end{aligned}$$

ya que, para x fijo, $p(x-w)$ es función continua y acotada de w. Queda así probada la relación (3) y con ella la estabilidad.

Teorema 4. Sea un modelo definido por $\mathcal{V} = \{f_\alpha(\cdot|\theta), \theta \in \Omega\}_{\alpha\in I}$ (donde $I \subset \mathbb{R}^m$ y todas las $f_\alpha(\cdot|\theta)$ corresponden a distribuciones μ_L-continuas) y por la distribución a priori π sobre $\Omega \subset \mathbb{R}^k$.

Supongamos que:

(i) $f_\alpha(x|\theta)$ es una función continua de α, $\forall(x,\theta) \in \mathbb{R}^n \times \Omega$.

(ii) Para toda sucesión $\{\alpha_r\}_{r\in\mathbb{N}} \subset I$ tal que $\alpha_r \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} c \in \hat{I} \setminus I$, se verifica que $\nexists \alpha \in I$ tal que $F_{\alpha_r}(\cdot|\theta) \overset{d}{\underset{r\to\infty}{\longrightarrow}} F_\alpha(\cdot|\theta)$ $\forall\theta \in \Omega$ (siendo $\hat{I}$ el cierre topológico de I en el espacio $\bar{\mathbb{R}}^k$, donde $\bar{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ se considera dotado de la topología usual compactificada).

(iii) Para toda $s = \{\alpha_r\}_{r\in\mathbb{N}} \subset I$ tal que $f_{\alpha_r}(x|\theta) \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} f_\alpha(x|\theta)$, $\forall(x,\theta) \in \mathbb{R}^n \times \Omega$, se verifica que, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ existe una función $g_x^s: \Omega \to \mathbb{R}$, π-integrable, tal que $\forall\theta \in \Omega$, $f_{\alpha_r}(x|\theta) \leqslant g_x^s(\theta)$.

Entonces, el modelo $(\pi, \mathcal{V})$ es estable.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos los enunciados: [1] $\alpha_r \to \alpha \in I$; [2] $f_{\alpha_r}(x|\theta) \to f_\alpha(x|\theta)$ $\forall(x,\theta) \in \mathbb{R}^n \times \Omega$; [3] $F_{\alpha_r}(\cdot|\theta) \overset{d}{\to} F_\alpha(\cdot|\theta)$ $\forall\theta \in \Omega$.

Vamos a demostrar, en primer lugar, que [1], [2] y [3] son equivalentes. En efecto: [1] $\Rightarrow$ [2] por la continuidad de $f_\alpha(x|\theta)$ considerada como función de α.

[2] $\Rightarrow$ [3] es consecuencia del teorema de SCHEFFÉ.

[3] $\Rightarrow$ [1] pues, si se verificase $\alpha_r \not\to \alpha$, o bien existiría una subsucesión $\{\alpha_{r_k}\}$ tal que $\alpha_{r_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} c \in \hat{I} \setminus I$, lo cual nos llevaría a contradicción con la hipótesis (ii), o bien existiría $\{\alpha_{r_k}\}$ con $\alpha_{r_k} \to \alpha' \in I(\alpha' \neq \alpha)$

lo cual implicaría $F_{\alpha_{r_k}}(\cdot\,\theta) \xrightarrow[k\to\infty]{d} F_{\alpha'}(\cdot|\theta)$ ($\neq F_\alpha(\cdot|\theta)$) en contradicción con $F_{\alpha_r}(\cdot|\theta) \xrightarrow{d} F_\alpha(\cdot|\theta)$.

Ahora la estabilidad resulta fácil de probar, pues $F_{\alpha_r}(\cdot|\theta) \xrightarrow{d} F_\alpha(\cdot|\theta)$ $\forall\theta \in \Omega$ implica (según las equivalencias anteriores) $f_{\alpha_r}(x|\theta) \to f_\alpha(x|\theta)$ $\forall(x,\theta) \in \mathbb{R}^n \times \Omega$. Por otra parte, la hipótesis (iii) nos permite aplicar el teorema de la convergencia dominada, y así tenemos

$$\int_\Omega f_{\alpha_r}(x|\theta)\, d\pi(\theta) \xrightarrow[r\to\infty]{} \int_\Omega f_\alpha(x|\theta)\, d\pi(\theta)$$

En definitiva, hemos probado

$$F_{\alpha_r}(\cdot|\theta) \xrightarrow{d} F_\alpha(\cdot|\theta) \quad \forall\theta \in \Omega \Rightarrow \pi_{\alpha_r}(\theta|x) \to \pi_\alpha(\theta|x) \qquad \forall x \in \bigcap_{r=1}^{\infty} \mathfrak{X}_{\alpha_r} \cap \mathfrak{X}_\alpha$$

de aquí, aplicando de nuevo el teorema de SCHEFFÉ, concluimos

$$F_\pi^{(\alpha_r)}(\cdot|x) \xrightarrow{d} F_\pi^{(\alpha)}(\cdot|x).$$

Teorema 5. Sea π una distribución a priori sobre Ω y sea $\mathfrak{U} = \{F_\alpha(\cdot|\theta), \theta \in \Omega\}_{\alpha\in I}$ donde, $\forall(\alpha,\theta) \in I \times \Omega$, $F_\alpha(\cdot|\theta)$ es una función de distribución en $\mathbb{R}^n$ de la forma $F_\alpha(\cdot|\theta) = F_\alpha(u_\theta(\cdot))$, siendo $F_\alpha: \mathbb{R}^n \to [0,1]$ una función de distribución cuya función característica denotaremos por φ_α.

Supongamos que:

(i) Para toda sucesión $s = \{\alpha_r\}_{r\in\mathbb{N}}$ tal que $F_{\alpha_r} \xrightarrow[r\to\infty]{d} F_{\alpha_0}$, existe una función $h^s: \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ integrable, cumpliendo $|\varphi_{\alpha_r}(t)| \leqslant h^s(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

(ii) Para todo $\theta \in \Omega$, $u_\theta: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es función biyectiva bicontinua y diferenciable tal que $\forall x \in \mathbb{R}^n$ el valor absoluto del jacobiano $|J_x(\theta)| = |\det(\partial u_\theta^i/\partial x_j)(x)|$ es función continua y acotada de θ.

Entonces, el modelo definido por la distribución a priori π y por la familia de verosimilitudes $\mathfrak{V} = \{f_\alpha(\cdot|\theta) = f_\alpha(u_\theta(\cdot))|J_x(\theta)|, \theta \in \Omega\}_{\alpha\in I}$ (donde $f_\alpha(x) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-it's)\, \varphi_\alpha(t)\, dt$) es estable en f_{α_0}.

DEMOSTRACIÓN. Según el teorema de inversión de FOURIER, cuando φ_α es absolutamente integrable en $\mathbb{R}^n$, entonces la correspondiente distribución admite una función de densidad continua y acotada dada por $f_\alpha(x) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-it'x)\, \varphi_\alpha(t)\, dt$.

Obsérvese que, si F_{α_0} no está «aislada» [es decir, si existe alguna sucesión $\{F_{\alpha_r}\}$ tal que $F_{\alpha_r}(\cdot|\theta) \xrightarrow[r\to\infty]{d} F_{\alpha_0}(\cdot|\theta)$ $\forall\theta \in \Omega$] lo cual se supone siempre implícitamente (pues en caso contrario la estabilidad sería trivial), la hipótesis (i) implica que todas las $F_\alpha(\cdot|\theta)$ tienen función característica absolutamente integrable y, por tanto, tiene sentido considerar la familia de verosimilitudes.

Ahora, sea $\{F_{\alpha_r}\}_{r\in\mathbb{N}}$ tal que $F_{\alpha_r}\xrightarrow{d}F_{\alpha 0}$. Esto equivale a $|\varphi_{\alpha_r}(t)-\varphi_{\alpha 0}(t)|\underset{r\to\infty}{\longrightarrow}0$. Según la hipótesis (i), $\exists h^s$ cumpliendo $|\varphi_{\alpha_r}(t)-\varphi_{\alpha 0}(t)|\leqslant\leqslant 2h^s(t)$. Así pues, según el teorema de la convergencia dominada,

$$|\varphi_{\alpha_r}(t)-\varphi_{\alpha 0}(t)|\underset{r\to\infty}{\longrightarrow}0 \text{ implica } \int_{\mathbb{R}^n}|\varphi_{\alpha_r}(t)-\varphi_{\alpha 0}(t)|dt\underset{r\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

Por otra parte,

$$\forall x\in\mathbb{R}^n,\quad |f_{\alpha_r}(x)-f_{\alpha 0}(x)|\leqslant(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}|\varphi_{\alpha_r}(t)-\varphi_{\alpha 0}(t)|dt\underset{r\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

Luego, $f_{\alpha_r}\underset{r\to\infty}{\longrightarrow}f_{\alpha 0}$ uniformemente en $\mathbb{R}^n$.

Ahora, teniendo en cuenta $f_\alpha(x|\theta)=f_\alpha(u_\theta(x))|J_x(\theta)|$, se tiene

$\forall x\quad \sup_{\theta\in\Omega}|f_{\alpha_r}(x|\theta)-f_{\alpha 0}(x|\theta)|\leqslant\sup_{\theta\in\Omega}|J_x(\theta)|\quad\sup_{\theta\in\Omega}|f_{\alpha_r}(u_\theta(x))-f_{\alpha 0}(u_\theta(x))|\underset{r\to\infty}{\longrightarrow}0$. Es decir, que $\forall x\in\mathbb{R}^n$, $F_{\alpha_r}(x|\cdot)\to f_{\alpha 0}(x|\cdot)$ uniformemente en Ω y ésto implica (por tener Ω π-medida finita):

$$\int_\Omega f_{\alpha_r}(x|\theta)d\pi(\theta)\underset{r\to\infty}{\longrightarrow}\int_\Omega f_{\alpha 0}(x|\theta)d\pi(\theta).$$

En definitiva, se tiene $\pi_{\alpha_r}(\theta|x)\underset{r\to\infty}{\longrightarrow}\pi_{\alpha 0}(\theta|x)$, con lo que queda probada la estabilidad.

Discusión y comentarios:

(*a*) La hipótesis más restrictiva que se impone en el Teorema 1 es suponer que el espacio muestral y el paramétrico tienen la misma dimensión, lo cual limita bastante la aplicabilidad práctica de este resultado aunque permite demostrar la estabilidad mediante un simple cambio de variable sin necesidad de imponer hipótesis sobre las distribuciones que dan «la forma» de las verosimilitudes (salvo el hecho de ser μ_L-continuas).

(*b*) En el Teorema 4 se establece la convergencia débil de las $F_\pi^{(\alpha_r)}(\cdot|x)$ demostrando como paso previo la convergencia puntual de las $f_{\alpha_r}(x|\theta)$: esto se consigue mediante la hipótesis (i) que asegura la dependencia continua de las $f_\alpha(x|\theta)$ respecto a α.

La hipótesis (ii) es una especie de «condición de frontera» que se introduce para evitar la aparición de verosimilitudes «repetidas» cuando $\alpha_r \to c \in \hat{I} \setminus I$. Cuando I es compacto esta condición se cumple automáticamente.

La hipótesis (iii) se introduce únicamente para aplicar el teorema de la convergencia dominada a las integrales de los denominadores.

(*c*) En el th. 5 la convergencia de las densidades se garantiza mediante la acotación de las funciones características. Esta hipótesis puede resultar incómoda de comprobar en algunos casos, aunque tiene la ventaja de no obligarnos, en principio, a «confinar» las f_α en una familia paramétrica.

Una condición suficiente, en términos de las densidades, para que se cumpla la hipótesis (i) del th. 5 es la siguiente:

Para toda sucesión $F_{\alpha_r} \to F_{\alpha_0}$, las F_{α_r} (para $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) admiten densidades f_{α_r} dos veces derivables tales que existe una función integrable $q: \mathbb{R} \to [0, \infty)$ cumpliendo $|f''_{\alpha_r}(x)| \leqslant q(x)$ $\forall r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

En efecto, en este caso se cumple $\varphi_{\alpha_r}(t) = (it)^{-2} \int_{\mathbb{R}} \exp(itx) f''_{\alpha_r}(x)dx$ y, a partir de aquí, se concluye fácilmente que $\exists h: \mathbb{R} \to [0, \infty)$ integrable que verifica la acotación requerida en (i).

(*d*) Cuando $x = (x_1, \ldots, x_n)$ corresponde a una muestra de observaciones i.i.d., basta comprobar las hipótesis de los Teoremas 4 y 5 para las verosimilitudes «univariantes» $p_\alpha(\cdot|\theta)$, pues, si se cumplen en este caso, se verifican también para las $f_\alpha(\cdot|\theta)$ definidas por $f_\alpha(x|\theta) = \Pi_{i=1}^{n} p_\alpha(x_i|\theta)$.

(*e*) En todo el desarrollo anterior se ha supuesto que π es distribución a priori propia aunque, en realidad el concepto de estabilidad puede extenderse también al caso de que π sea impropia [con $\pi(\Omega) = \infty$].

En el Teorema 5, la distribución a priori no interviene en la formulación de las hipótesis pero en la demostración se utiliza de forma esencial el hecho de que π es propia. Por tanto, el Teorema 5 sólo es válido en este caso, mientras que los Teoremas 3 y 4 se pueden aplicar también cuando π es impropia.

4. EJEMPLOS DE APLICACIÓN

4.1 Modelo de Box-Tiao

Estudiaremos aquí una versión ligeramente simplificada de este modelo, definida por una distribución a priori π sobre $\Omega \subset \mathbb{R}$ y por $\mathcal{V}_1 = \{f_\alpha(\cdot|\theta),\ \theta \in \Omega \subset \mathbb{R}\}_{\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1)}$, donde α_0, $\alpha_1 \in (-1, 1)$, $\alpha_0 < \alpha_1$ y $\forall \alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$, $f_\alpha(x|\theta) = K_\alpha \exp\{-\frac{1}{2}|x-\theta|^{2/(1+\alpha)}\}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, siendo $K_\alpha^{-1} = \Gamma[1 + \frac{1}{2}(1+\alpha)]2^{[1+\frac{1}{2}(1+\alpha)]}$.

Este modelo resulta adecuado para estudiar la estabilidad en las proximidades de la normal con respecto a variaciones en la curtosis.

Es fácil comprobar que $(\pi, \mathcal{V})$ verifica las tres hipótesis del Teorema 4; ésto nos lleva a concluir la estabilidad.

4.2 Modelos de mixturas infinitas

Una posibilidad alternativa al modelo de BOX-TIAO, sugerida por GIRÓN (1981), viene dada por las llamadas «mixturas infinitas». Las familias de verosimilitudes definidas por este procedimiento tienen, entre otras propiedas interesantes, una interpretación estadística directa, permiten cubrir una amplia gama de verosimilitudes y son relativamente sencillas en lo que se refiere a su manejo matemático.

Consideremos, por ejemplo $\mathcal{V}_1 = \{f_\alpha(\cdot|\theta),\ \theta \in \Omega \subset \mathbb{R}\}_{\alpha \in [0,\infty)}$ donde para $\alpha > 0$, $f_\alpha(x|\theta) = \int_0^\infty N(x; \theta, 1/v)\gamma(v; 1/\alpha, 1/\alpha)\,dv$, siendo $N(x; \theta, 1/v)$ y $\gamma(v; 1/\alpha, 1/\alpha)$ las funciones de densidad de la normal de media θ y varianza $1/v$ y de la gamma de parámetros $a = 1/\alpha$ y $p = 1/\alpha$, respectivamente.

Para $\alpha = 0$, se define $f_0(x|\theta) = N(x; \theta, 1)$.

Mediante cálculo directo puede comprobarse que, para $\alpha = 2/n$, $f_\alpha(x|\theta)$ es la t de Student con n grados de libertad «centrada» en θ. En general, $f_\alpha(x|\theta)$ puede considerarse como una t generalizada con «grados de libertad» $2/\alpha$. En resumen, la familia $\mathcal{V}_1$ refleja la siguiente situación: la verosimilitud «teórica» es $N(x; \theta, 1)$ y estudiamos las desviaciones de ella en el sentido de la t de Student.

Aplicando de nuevo el th. 4 puede comprobarse la estabilidad de $(\pi, \mathcal{V}_1)$ para cualquier distribución a priori π, si bien la verificación de las hipótesis es en este caso algo más complicada que en el ejemplo anterior.

De manera análoga se pueden definir otros modelos de mixturas infinitas (por ejemplo, cambiando el parámetro y/o la distribución de mixtura); algunos de éstos son más sencillos de manejar a través de las funciones características y entonces resultará adecuado abordar el análisis del modelo a través del teorema 5.

En CUEVAS (1981) pueden encontrarse otros resultados sobre estabilidad en la teoría del modelo lineal bayesiano.

5. ESTABILIDAD CONJUNTA

Una idea que parece sugestiva consiste en esbozar una «teoría general de la robustez cualitativa en Inferencia Bayesiana» que estudiaría los efectos de los «pequeños cambios simultáneos» en los tres elementos fundamentales de un problema bayesiano general: la verosimilitud, la distribución a priori y la función de pérdida (f, π y L).

En esta línea se puede considerar insertado el artículo de KADANE y CHUANG (1978) en el que se estudia (para un problema de decisión) el efecto de las alteraciones en π y L.

A continuación se estudia el caso en que π y f son variables; concretamente proponemos una definición de estabilidad adecuada y obtenemos una condición suficiente para la misma.

Sea Q un conjunto de distribuciones de probabilidad sobre Ω y $\mathcal{V}$ un conjunto de verosimilitudes. Se dice que el «modelo generalizado» $(Q, \mathcal{V})$ es estable en $(\pi_0, f_{\alpha 0}) \in Q \times \mathcal{V}$, cuando, para toda sucesión $s = \{(\pi_r, f_{\alpha_r})\}_{r \in \mathbb{N}} \subset Q \times \mathcal{V}$ tal que $\pi_r \xrightarrow[r \to \infty]{d} \pi_0$ y $F_{\alpha_r}(\cdot|\theta) \xrightarrow[r \to \infty]{d} F_{\alpha 0}(\cdot|\theta)$ $\forall \theta \in \Omega$, se verifica $F_{\pi_r}^{(\alpha_r)}(\cdot|\theta) \xrightarrow[r \to \infty]{d} F_{\pi 0}^{(\alpha)}(\cdot|\theta)$ $\forall x \in \bigcap_{r=0}^{\infty} \mathfrak{X}_r^s$, siendo $\mathfrak{X}_r^s = \{x \in \mathbb{R} | 0 < \int_\Omega f_{\alpha_r}(x|\theta)\, d\pi_r(\theta) < \infty\}$.

Teorema 6. Sea un modelo generalizado $(Q, \mathcal{V})$ donde Q es un conjunto arbitrario de distribuciones sobre Ω. Supongamos que la familia $\mathcal{V}$ verifica:

(i) Para toda sucesión $\{f_{\alpha_r}\}_{r \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{V}$ tal que $F_{\alpha_r}(\cdot|\theta) \xrightarrow[r \to \infty]{d} F_{\alpha 0}(\cdot|\theta)$ $\forall \theta \in \Omega$ se cumple $f_{\alpha_r}(x|\cdot) \xrightarrow[r \to \infty]{} f_{\alpha 0}(x|\cdot)$ uniformemente en Ω $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

(ii) $f(x|\cdot)$ es función continua y acotada en Ω $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Entonces, $(Q, \mathcal{V})$ es estable en $(\pi_0, f_{\alpha 0})$ $\forall \pi_0 \in Q$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{(\pi_r, f_{\alpha_r})\}_{r \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{V}$ tal que $\pi_r \xrightarrow[r \to \infty]{d} \pi_0 \in Q$ y $F_{\alpha_r}(\cdot|\theta) \xrightarrow[r \to \infty]{d} F_{\alpha 0}(\cdot|\theta)$. Por la hipótesis (i), tenemos para un $x \in \mathbb{R}^n$ fijo:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists r_0 = r_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall r \geqslant r_0, \quad |f_{\alpha_r}(x|\theta) - f_{\alpha 0}(x|\theta)| < \varepsilon$$

Esto implica

$$\int_\Omega (f_{\alpha 0}(x|\theta) - \varepsilon)\, d\pi_r(\theta) \leqslant \int_\Omega f_{\alpha_r}(x|\theta)\, d\pi_r(\theta) \leqslant \int_\Omega (f_{\alpha 0}(x|\theta) + \varepsilon)\, d\pi_r(\theta),$$

pero

$$\int_\Omega f_{\alpha 0}(x|\theta)\, d\pi_r(\theta) \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega f_{\alpha 0}(x|\theta)\, d\pi_0(\theta),$$

ya que $f_{\alpha 0}(x|\theta)$ es función continua y acotada de θ y $\pi_r \xrightarrow[r\to\infty]{d} \pi_0$. Así pues

$$\int_\Omega f_{\alpha 0}(x|\theta)\, d\pi_0(\theta) - \varepsilon \leqslant \liminf \int_\Omega f_{\alpha_r}(x|\theta)\, d\pi_r(\theta) \leqslant$$
$$\limsup \int_\Omega f_{\alpha_r}(x|\theta)\, d\pi_r(\theta) \leqslant \int_\Omega f_{\alpha 0}(x|\theta)\, d\pi_0(\theta) + \varepsilon, \qquad \forall \varepsilon > 0.$$

Se sigue

$$\int_\Omega f_{\alpha_r}(x|\theta)\, d\pi_r(\theta) \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega f_{\alpha 0}(x|\theta)\, d\pi_0(\theta) \tag{4}$$

Por otra parte, para toda función $u:\Omega \to \mathbb{R}$ continua y acotada tenemos también

$$\int_\Omega f_{\alpha_r}(x|\theta)u(\theta)\, d\pi_r(\theta) \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega f_{\alpha 0}(x|\theta)u(\theta)\, d\pi_0(\theta) \tag{5}$$

El razonamiento es idéntico al utilizado para demostrar (4), ya que $g_{\alpha_r}(x|\cdot) = f_{\alpha_r}(x|\cdot)u(\cdot) \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} g_{\alpha 0}(x|\cdot) = f_{\alpha 0}(x|\cdot)u(\cdot)$ uniformemente en Ω (por ser u acotada) y $g_{\alpha 0}(x|\cdot)$ es también función continua y acotada en Ω. En definitiva, de (4) y (5) resulta que para toda función $u:\Omega \to \mathbb{R}$ continua y acotada:

$$\begin{aligned}\int_\Omega u(\theta)\, dF^{(\alpha_r)}_{\pi_r}(\cdot|x) &= \left[\int_\Omega f_{\alpha_r}(x|\theta)\, d\pi_r(\theta)\right]^{-1} \int_\Omega u(\theta) f_{\alpha_r}(x|\theta)\, d\pi_r(\theta) \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} \\ &\underset{r\to\infty}{\longrightarrow} \left[\int_\Omega f_{\alpha 0}(x|\theta)\, d\pi_0(\theta)\right]^{-1} \int_\Omega u(\theta) f_{\alpha 0}(x|\theta)\, d\pi_0(\theta) = \\ &= \int_\Omega u(\theta)\, dF^{(\alpha 0)}_{\pi_0}(\cdot|x) \qquad \forall x \in \bigcap_{r=0}^{\infty} \mathfrak{X}_r^s\end{aligned}$$

quedando probada la estabilidad en $(\pi_0, f_{\alpha 0})$.

BIBLIOGRAFÍA

BOX, G. E. P. and TIAO, G. C. (1973). «Bayesian Inference in Statistical Analysis». Addison-Wesley.

CUEVAS, A. (1981). «Robustez en Inferencia Bayesiana: Un estudio cualitativo». Tesis Doctoral. Universidad Complutense. Madrid.

GIRON, F. J. (1981). «Mixturas infinitas de distribuciones». Comunicación personal.

HAMPEL, F. R. (1968). «Contributions to the theory of robust estimation». Ph. D. Thesis. University of California. Berkeley.

HAMPEL, F. R. (1971). «A general qualitative definition of robustness». Ann. Math. Statist. 42, pp. 1887-1896;

HUBER, P. J. (1981). «Robust Statistics». Wiley.

KADANE, J. B. and CHUANG, D. T. (1978). «Stable decision problems». Ann of Statist. 6, n.5 pp. 1095-1110.

RAO, C. R. (1973). «Linear Statistical Inference and its applications». Wiley.

DE ROBERTIS, L. and HARTIGAN, J. A. (1981). «Bayesian inference using intervals of measures». Ann. Statist. 9, 235-244.