Trabajos de Estadística y
de Investigación Operativa
Vol. 35. Núm. 2, 1984, pp. 154 a 169

# PROGRACIÓN MULTICRITERIO*

**E. Chacon S. J.**
**F. Gomez Bezares**
*Departamento de Técnicas Cuantitativas*
*Universidad de Deusto*

## 1. INTRODUCCIÓN

En este trabajo vamos a estudiar el planteamiento y resolución de los problemas con varios criterios de optimización. Nos circunscribiremos al caso lineal, contínuo y determinístico, dejando por lo tanto el caso no lineal, de números enteros o estocástico, dado que complicaríamos excesivamente el desarrollo matemático y aquí pretendemos centrarnos exclusivamente en la idea de este tipo de programación.

Supongamos por lo tanto que nos encontramos ante un conjunto de ecuaciones a optimizar (maximizar o minimizar) y un conjunto de restricciones, el problema se puede plantear de dos maneras distintas (si bien pueden ser complementarias):

—Fijándonos fundamentalmente en las restricciones, puede suceder que éstas no sean compatibles, en este caso intentaremos minimizar los errores por incumplimiento de las restricciones. Es el caso del «Goal Programming» y extensiones al mismo planteamiento, ya estudiadas en un artículo precedente (4).

(*) Recibido, Febrero, 1982

—Supuesto que las restricciones han de cumplirse en su totalidad, por lo tanto deben ser compatibles, nos podemos encontar con distintas funciones objetivo a optimizar, es decir, con distintos criterios de decisión. A esto es a lo que llamaremos programación multicriterio y a la que dedicaremos las siguientes páginas. El problema que plantea este tipo de programación, puede resumirse en el hecho de que dado que normalmente no es posible alcanzar el óptimo simultáneo en todos los criterios del programa, es preciso arbitrar una solución de compromiso que de alguna manera, pondere esos criterios.

En el ya citado artículo sobre programación multiobjetivo, se trataba de resolver problemas basados en sistemas de inecuaciones incompatibles en mayor o igual, menor o igual, o simplemente como ecuación en igualdad. Como caso particular de este planteamiento se trató brevemente alguno de los problemas que aquí desarrollaremos con mayor profundidad.

La programación multicriterio se justifica cuando existen distintas funciones a optimizar, con restricciones que han de cumplirse en todo caso, por tratarse de factores limitados. Este caso es perfectamente aplicable en la economía en general y en la empresa en particular, así como en otras muchas disciplinas. En la empresa, por ejemplo, existen a corto plazo, factores claramente limitados como pueden ser el número de horas de trabajo máximas (incluidas las horas extraordinarias permitidas), la maquinaria, el número de delegaciones de venta, etc. Estos factores se combinarán de tal manera que optimicen una o varias funciones objetivo. El caso de una función objetivo única, es el tradicional de la programación lineal y se puede reducir a un caso particular del planteamiento con varias funciones objetivo. Cuando tenemos varias funciones objetivo, como pueden ser, maximizar el beneficio a corto plazo, servir a los clientes en el mínimo plazo posible, maximizar el bienestar de los trabajadores, minimizar la contaminación etc., nos encontramos con varios criterios de optimización y esto da lugar a la programación multicriterio.

Los problemas con múltiples criterios son bastante normales en la vida cotidiana, así es normal que los seres humanos intentemos ganar más dinero y a la vez tener más tiempo para el ocio, de igual manera los gobiernos intentan simultaneamente disminuir la inflación, el paro, el deficit presupuestario etc., y todo esto mejorando las ayudas sociales, el sueldo de los funcionarios, etc. Como vemos, tanto a nivel individual como colectivo, nos encontramos muchas veces ante distintos criterios de optimización, que muchas veces se contraponen unos a otros. La solución debe venir de una elección del decisor para ver que es lo que le interesa más, es decir, debe buscar una forma de ponderación de los beneficios que le ofrece cada uno de los criterios. Si la unidad de medida fuese la misma en las distintas funciones objetivo, como sería si todas se midieran en pesetas, podríamos optimizar la función resultante de haber tenido todas en cuenta, pero lo normal es que esto no suceda así, en cuyo caso la solución estaría en pasar a funciones de utilidad que sería lo que habría que maximizar en último término.

En general los métodos de programación multicriterio se basan en buscar una forma de ponderación correcta de las magnitudes ofrecidas por los distintos criterios de decisión, fijándose generalmente en la función de utilidad del decisor. Nosotros lo que vamos a plantear es un método que proporcione al decisor todas las posibles alternativas, especificando las consecuencias prácticas que tendrá el optar por una o por otra. En realidad los métodos son muy similares unos a otros y nuestro objetivo ha sido plantear una visión completa del problema basándonos en las propiedades de las variables duales.

El problema fundamental con que se encuentra este tipo de programación es el enorme subjetivismo a la hora de decidir la combinación entre los distintos criterios. Para evitarlo algunos autores como Belenson y Kapur (1973), han planteado decidir en base a la teoría de juegos. Evidentemente se trata de un planteamiento interesante que comentaremos al final de este trabajo, pero no exento de posibles críticas.

En general es difícil (por no decir imposible) dar al decisor la solución definitiva de un programa multicriterio y lo que se pretende es presentar un conjunto de soluciones posibles con las ventajas e inconvenientes correspondientes a cada una, incluso obtenidas por las directrices marcadas por el decisor en el decurso del algoritmo. Así el responsable, a la hora de tomar la decisión, cuenta con un elemento más que completará la información suministrada por otros posibles métodos.

## 2. PLANTEAMIENTO GENERAL

Un programa lineal generalizado fue expuesto por Gale, Kuhn y Tuc-

KER (1951), y lo reproducimos a continuación.

Partimos del problema siguiente expuesto en forma matricial: Max Du, tal que:

$$Cx \geqslant Du, \quad Ax \leqslant Bu, \quad x \geqslant 0, \quad u > 0,$$

donde $C$ es una matriz $(p, n)$, $D$ es una matriz $(p, q)$, $A$ es una matriz $(m, n)$, $B$ es una matriz $(m, q)$.

El dual es: Min $D'v$ condicionado a:

$$B'y \leqslant D'v, \quad A'y \geqslant C'v, \quad y \geqslant 0, \quad v > 0$$

Estos dos problemas tienen una solución si se cumple que:

$$\left.\begin{array}{l} Ax \leqslant Bu \\ A'y \geqslant C'v \end{array}\right\} \text{ para algún valor } \left\{\begin{array}{ll} x \geqslant 0; & u > 0 \\ y \geqslant 0; & v > 0 \end{array}\right.$$

Este planteamiento general se reduce en nuestro caso al siguiente programa lineal multicriterio:

$$\operatorname{Max} Z = Cx, \quad Ax \leqslant B, \quad x \geqslant 0,$$

donde $Z$ es una matriz $(p, 1)$, $C$ es una matriz $(p, n)$, $A$ es una matriz $(m, n)$, $B$ es una matriz $(m, 1)$.

Antes de entrar en los algoritmos, y dado que para nuestros razonamientos consideramos más apropiado el método simétrico que proporciona una mejor visión de conjunto del problema, vamos a recordar brevemente esta variación del método simplex.

El cuadro simétrico es el siguiente:

$$\begin{array}{c|cccc|c|c}
 & Y_{c1} & Y_{c2} & \cdots\cdots & Y_{cn} & V & \\
\hline
Z & -c_1 & -c_2 & \cdots\cdots & -c_n & 0 & 1 \\
\hline
X_{c1} & a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} & b_1 & Y_1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
X_{cm} & a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn} & b_m & Y_m \\
\hline
 & -X_1 & -X_2 & \cdots\cdots & -X_n & 1 &
\end{array}$$

Donde $X_{ci}$ son las variables complementarias o de holgura del primal y $Y_{cj}$ las correspondientes del dual.

En que se lee:

$$
\begin{array}{l}
X_{c1} = b_1 - a_{11}X_1 - a_{12}X_2 - \dots - a_{1n}X_n \\
\vdots \quad \vdots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\
X_{cm} = b_m - a_{m1}X_1 - a_m X_2 - \dots - a_{mn}X_n \\
\quad Z = 0 + c_1X_1 + c_2X_2 + \dots + c_nX_n \\
Y_{c1} = -c_1 + a_{11}Y_l + a_{21}Y_2 + \dots + a_{m1}Y_m \\
\vdots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\
Y_{cn} = -c_n + a_{1n}Y_1 + a_{2n}Y_2 + \dots + a_{mn}Y_m \\
\quad V = 0 + b_1Y_1 + b_2Y_2 + \dots + b_mY_m
\end{array}
$$

Efectuando las transformaciones de modo semejante al Simplex sin más cambio que la columna correspondiente al pivote, en la cual el pivote se cambia por su recíproco y las demás por su cociente por el pivote con signo cambiado, se llega al cuadro final:

$$
\begin{array}{c|cccc|c|c}
 & Y_{b1} & Y_{b2} & \dots\dots & Y_{bn} & & \\
\hline
 & c'_1 & c'_2 & \dots\dots & c'_n & & \\
\hline
X_{b1} & & & & & b'_1 & Y_{s1} \\
\vdots & & & & & \vdots & \vdots \\
X_{bm} & & & & & b'_m & Y_{sm} \\
\hline
 & -X_{s1} & -X_{s2} & \dots\dots & -X_{sn} & &
\end{array}
$$

en que:

$$
\begin{array}{ll}
c'_1, c'_2, \dots, c'_n \geqslant 0 & \\
b'_1, b'_2, \dots, b'_m \geqslant 0 & \\
X_{b1} = b'_1, \dots, X_{bm} = b'_m & \text{(variables básicas, primal)} \\
X_{s1} = X_{s2} = \dots = X_{sn} = 0 & \text{(variables no básicas, primal)} \\
Y_{s1} = Y_{s2} = \dots = Y_{sm} = 0 & \text{(variables no básicas, dual)} \\
Y_{b1} = c'_1, \dots, Y_{bn} = c'_n & \text{(variables básicas, dual)}
\end{array}
$$

Que cumplen con las condiciones de KUHN y TUCKER como puede comprobarse facilmente.

Tratamos el caso de maximizar con condiciones en menor o igual, dado que los otros casos, se pueden reducir a este con facilidad.

## 3. APLICACIÓN A NUESTRO PROBLEMA

Supongamos varias funciones a optimizar en las cuales los valores de las variables rara vez consiguen un óptimo simultáneo en todas ellas. Por lo tanto sería preciso estudiar los distintos vectores $X^i$, que irán dando distintas soluciones al vector $Z^i$ (donde $i = 1, 2, \ldots$)

Decimos que $X^*$ es un vector eficiente si no existe otro vector $X^i$ tal que:

$Z_j^i \geqslant Z_j^*$ para todo $j$, y además:
$Z_j^i \neq Z_j^*$ para al menos un $j$.

El sistema de resolución del problema consistirá en encontrar una serie de vectores eficientes $X^i$ que irán dando una serie de soluciones $Z^i$. El primer problema que se plantea consiste en ir buscando todas las soluciones eficientes para que el decisor pueda elegir entre ellas según sus criterios subjetivos. Para encontrar estas soluciones hay distintos métodos desarrollados por varios autores. (2, 11, 12, 16, . . . ). Nosotros apoyándonos en los trabajos ya citados, desarrollaremos nuestro método basándonos en las soluciones de los cuadros simétricos, introduciendo en base las variables que optimicen alguna de las funciones objetivo, según los valores del dual, y teniendo siempre en cuenta los criterios del decisor. Al final del problema se presentarán al decisor las soluciones óptimas para cada una de sus posibles preferencias subjetivas.

Las soluciones eficientes $X^i$, darán lugar a una serie de vectores $Z^i$ entre los cuales será preciso escoger. El decisor para esta elección habrá de ponderar los elementos de cada vector $Z^i$ mediante un vector $\lambda$, de elementos $\lambda_j$, tal que $\sum_{j=1}^{p} \lambda_j = 1$ y $\lambda_j \geqslant 0$.

Ese vector $\lambda$ indicará las preferencias que entre los distintos criterios tenga el decisor.

Nosotros lo que haremos será buscar entre qué valores se pueden mover los elementos del vector $\lambda$ para que cada decisión eficiente se convierta en óptima, así el decisor podrá escoger cuáles son los valores del vector $\lambda$ que más se ajustan a sus preferencias subjetivas y decidir en consecuencia.

Desarrollemos esto según el siguiente ejemplo:

Sean las ecuaciones a maximizar:

$$Z_1 = 4X_1 + X_2 \quad \text{(criterio uno)}$$
$$Z_2 = 3X_1 + 12X_2 \quad \text{(criterio dos)}$$

Sujetas a las restricciones

$$\begin{aligned} X_1 + 2X_2 &\leqslant 10 \\ 2X_1 + X_2 &\leqslant 10 \\ X_1 + X_2 &\leqslant 6 \\ -5X_1 + X_2 &\leqslant 0 \\ X_1, X_2 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Planteamos el primer cuadro simétrico:

$$\begin{array}{c|cc|c|} \hline & -4 & -1 & 0 \\ & -3 & -12 & 0 \\ \hline X_{c1} & 1 & 2 & 10 \\ X_{c2} & 2 & 1 & 10 \\ X_{c3} & 1 & 1 & 6 \\ X_{c4} & -5 & 1 & 0 \\ \hline \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{-X_1} & \multicolumn{1}{c}{-X_2} & \multicolumn{1}{c}{} \end{array} \qquad \text{Cuadro 0}$$

Para ir buscando las soluciones eficientes el sistema que vamos a utilizar se basará en ir buscando los puntos adyacentes en el poliedro convexo hasta completar el recorrido. Siempre que tengamos valores negativos en las variables básicas del dual (aquí vectores dado que equivale a un doble primal y a un doble dual), alguno de los criterios puede ser mejorado y por lo tanto se superará en algún valor del vector $Z$ al resultado anterior. En cada caso el decisor estudiará si el cambio le resulta o no ventajoso en su conjunto.

Tomando como pivote el punto $(-X_1, X_{c2})$ llegamos al cuadro simétrico n.º 1:

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 2 | 1 | 20 |
| | 3/2 | −21/2 | 15 |
| $X_{c1}$ | −1/2 | 3/2 | 5 |
| $X_1$ | 1/2 | 1/2 | 5 |
| $X_{c3}$ | −1/2 | 1/2 | 1 |
| $X_{c4}$ | 5/2 | 7/2 | 25 |
| | $-X_{c2}$ | $-X_2$ | |

Cuadro 1

Cuyas soluciones son:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Hemos conseguido el máximo del criterio uno, pues sus variables duales correspondientes son positivas. Sin embargo el máximo del criterio dos no ha sido conseguido pues hay un valor negativo $(-21/2)$.

Nos hemos de plantear si conviene ganar 21/2 en el criterio dos aun a costa de perder 1 unidad en el criterio uno. El decisor tendrá que plantear si esto le interesa o no. En nuestro planteamiento supondremos en principio que le interesa, para luego dar al decisor todas las posibles alternativas.

Tomamos como pivote el punto $(-X_2, X_{c3})$ y tendremos así el cuadro n.º 2:

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 3 | − 2 | 18 |
| | −9 | 21 | 36 |
| $X_{c1}$ | 1 | −3 | 2 |
| $X_1$ | 1 | −1 | 4 |
| $X_2$ | −1 | 2 | 2 |
| $X_{c4}$ | 6 | −7 | 18 |
| | $-X_{c2}$ | $-X_{c3}$ | |

Cuadro 2

Cuyas soluciones son:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 36 \end{pmatrix}$$

Hemos mejorado en el criterio dos, pero hemos empeorado en el criterio uno. En el momento actual hemos de escoger entre ganar 9 en el criterio dos perdiendo 3 en el uno, o ganar 2 en el uno para perder 21 en el dos. Tomaremos la primera decisión, pues la segunda nos lleva al cuadro 1. También sería posible que a nuestro decisor le interesara más quedarse en el cuadro 2, pero vamos a suponer de momento que no es así.

Tomamos como pivote el punto $(-X_{c2}, X_{c1})$ y tendremos el cuadro n.°3:

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $-3$ | $7$ | $12$ |
| | $9$ | $-6$ | $54$ |
| $X_{c2}$ | $1$ | $-3$ | $2$ |
| $X_1$ | $-1$ | $2$ | $2$ |
| $X_2$ | $1$ | $-1$ | $4$ |
| $X_{c4}$ | $-6$ | $11$ | $6$ |
| | $-X_{c1}$ | $-X_{c3}$ | |

Cuadro 3

Cuyas soluciones son:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 54 \end{pmatrix}$$

El decisor se planteará si le interesa quedarse en el cuadro 3 (supondremos que no) o bien ganar 6 en el criterio dos perdiendo 7 en el uno (el otro planteamiento nos llevaría al cuadro 2). Tomaremos como pivote el punto $(-X_{c3}, X_{c4})$ y tendremos el cuadro n.° 4:

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 9/11 | −7/11 | 90/11 |
| | 63/11 | 6/11 | 630/11 |
| $X_{c2}$ | −7/11 | 3/11 | 40/11 |
| $X_1$ | 1/11 | −2/11 | 10/11 |
| $X_2$ | 5/11 | 1/11 | 50/11 |
| $X_{c3}$ | −6/11 | 1/11 | 6/11 |
| | $-X_{c1}$ | $-X_{c4}$ | |

Cuadro 4

Cuyas soluciones son:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10/11 \\ 50/11 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90/11 \\ 630/11 \end{pmatrix}$$

En este momento sólo es posible meter en base $X_{c4}$ sacando $X_{c3}$, lo que nos llevaría a la situación anterior luego ya tenemos las cuatro soluciones, que son todas eficientes:

$$Z^1 = \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \end{pmatrix}, \quad Z^2 = \begin{pmatrix} 18 \\ 36 \end{pmatrix}, \quad Z^3 = \begin{pmatrix} 12 \\ 54 \end{pmatrix}, \quad Z^4 = \begin{pmatrix} 90/11 \\ 630/11 \end{pmatrix}$$

(Véase Figura 1)

Vamos a estudiar a continuación cuál de las cuatro decisiones es más conveniente según los valores que el decisor de a las $\lambda$. Llamemos $\lambda_1$, al valor que da el decisor al primer criterio y $\lambda_2$ al que da al segundo, tal que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.

Para que un cuadro sea la solución adoptada por el decisor, tiene que suceder que la combinación lineal de las variables básicas del dual con las $\lambda$ quede positiva. Aplicado esto al cuadro uno tendremos:

$$2\lambda_1 + 3/2\lambda_2 \geqslant 0$$
$$\lambda_1 - 21/2\lambda_2 \geqslant 0$$

Luego:

$$\lambda_2 \leqslant \frac{2}{21}\lambda_1$$

En el cuadro dos tendremos:

$$3\lambda_1 - 2\lambda_2 \geqslant 0$$
$$-9\lambda_1 + 21\lambda_2 \geqslant 0$$

Luego:

$$\frac{2}{21}\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \frac{3}{9}\lambda_1$$

En el cuadro tres:

$$-3\lambda_1 + 9\lambda_2 \geqslant 0$$
$$7\lambda_1 - 6\lambda_2 \geqslant 0$$

Luego:

$$\frac{3}{9}\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \frac{7}{6}\lambda_1$$

Por fin viendo el cuadro 4:

$$9/11\,\lambda_1 + 63/11\,\lambda_2 \geqslant 0$$
$$-7/11\,\lambda_1 + 6/11\,\lambda_2 \geqslant 0$$

Luego:

$$\lambda_2 \geqslant 7/6\,\lambda_1$$

Por otro lado sabemos que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, luego puede expresarse gráficamente el abanico de soluciones posibles según los valores subjetivos de $\lambda$. (Figura 2).

En conclusión tenemos cuatro posibles soluciones eficientes, de las cuales el decidir cuál es la «óptima», dependerá de cuál sea la proporción que el decisor asigne a $\lambda_1$ y a $\lambda_2$.

## 4. DETERMINACIÓN DE $\lambda$ MEDIANTE JUEGOS

En el ya citado trabajo de BELENSON y KAPUR se plantea el interés de la fijación de $\lambda$ de forma menos subjetiva, y proponer como alternativa para su determinación el planteamiento de un juego que de lugar a un compromiso entre los distintos objetivos. Iremos comentando la operativa de este sistema a la vez que lo desarrollamos para nuestro ejemplo.

Recordemos que la solución que optimizaba $Z_1$ era el vector $X^1$ del primer cuadro, y la que conseguía lo propio con $Z_2$ era el vector $X^4$ expuesto en el cuadro cuarto. Por lo tanto tendremos:

| | $X^1$ | $X^4$ |
|---|---|---|
| $Z_1$ | 20 | $8,\widehat{18}$ |
| $Z_2$ | 15 | $57,\widehat{27}$ |

Evidentemente $X^1$ es preferible para el primer objetivo y $X^4$ preferible para el segundo y se planteará un juego para buscar una ponderación entre ambos. El primer paso sería la normalización de las magnitudes pues éstas presumiblemente no serán comparables. Es fácil imaginar que no se pueden comparar puntos porcentuales en la reducción del índice de inflación, con millones de déficit presupuestario, por poner un ejemplo. Luego en general será interesante la normalización, si bien el decisor debe decir la última palabra. Así tendremos:

| | $X^1$ | $X^4$ |
|---|---|---|
| $Z_1$ | 1 | 0,4091 |
| $Z_2$ | 0,2619 | 1 |

Ponderando por $\lambda_1$ los resultados del primer criterio y por $\lambda_2$ los del segundo y planteando el juego tendremos:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 0{,}2619\lambda_2 &\geqslant V \\ 0{,}4091\lambda_1 + \lambda_2 &\geqslant V \\ \lambda_1 + \lambda_2 &= 1 \\ \text{Max } V& \end{aligned}$$

Dividiendo por $V$ tendremos:

$$\begin{aligned} \lambda_1' + 0{,}2619\lambda_2' &\geqslant 1 \\ 0{,}4091\lambda_1' + \lambda_2' &\geqslant 1 \\ \text{Min} \frac{1}{V} &= \lambda_1' + \lambda_2' \end{aligned}$$

Con lo que tendremos:

$$\lambda_1' = 0{,}8267, \quad \lambda_2' = 0{,}6618$$

Estos valores sería preciso dividirlos por su suma al objeto de que sumaran uno, pero todavía es preciso hacer una transformación, dado que las $\lambda$ no van a ser utilizadas para ponderar en la matriz normalizada, sino en la original, por lo tanto es preciso dividirlas por los factores de normalización así:

$$n_1 = \frac{\lambda_1'}{20} = 0{,}0413, \qquad n_2 = \frac{\lambda_2'}{57,\widehat{27}} = 0{,}0116, \quad \sum n_i = 0{,}05289$$

Haciendo ahora que sumen uno:

$$\lambda_1^* = 0{,}7815, \quad \lambda_2^* = 0{,}2185$$

Que son la solución para hacer la ponderación.

Con esto podemos hacer una optimización:

$$\text{Max}\, \lambda_1^* Z_1 + \lambda_2^* Z_2$$

Pero esto es innecesario en nuestro caso dado que ya conocemos la solución para cada combinación de $\lambda_1$ y $\lambda_2$.

$\lambda_2^* = 0{,}2796\lambda_1^*$, luego está entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{21}$, lo que a la vista de la figura 2, nos da como solución el cuadro 2.

Este planteamiento tiene la evidente ventaja de quitar los subjetivismos y desde este punto de vista es una posibilidad a tener en cuenta. Sin embargo no creemos que sea del todo convincente el plantear la solución por la teoría de juegos, ya que el simil de los dos jugadores es difícilmente aplicable a este caso donde debe ser el único jugador, el que decida lo que más le conviene. Luego parece más lógico el utilizar funciones de utilidad.

## 5. APLICACIÓN DIRECTA DE FUNCIONES DE UTILIDAD

Un sistema basado en las funciones de utilidad consiste en buscar el vector $\lambda$ que más se aproxima a los deseos del decisor tal como desarrollan Zionts y Wallenius (1976).

El procedimiento consiste en dar unos valores arbitrarios a $\lambda$ y buscar la solución óptima para esa combinación. En este punto el decisor, a la vista de las variables duales básicas, decide si le interesa, según sus preferencias, introducir alguna variable no básica del primal. Así iríamos operando hasta que al decisor no le interese ningún cambio, donde habremos encontrado su función de utilidad. No desarrollamos más el método por ser muy similar al desarrollado por nosotros.

## BIBLIOGRAFÍA


[1] ASHTON D. J. y ATKINS D. R. «Multicriteria programming for financial planning». Opl. Res. vol. 30, n.°3, Marzo 1979 pp. 259-270.

[2] BELENSON S. M. y KAPUR K. C. «An algorithm for solving multicriterion linear programming problems with examples». Opl. Res. Q. Marzo 1973. vol. 24, n.° 1, pp. 65-77.

[3] BENAYOUN, R., MONTGOLFIER, J., TERGNY, S. and LARITCHEV, O. «Linear programming with multiple objective functions, step method (STEM)». Math. Prog. Diciembre, 1971, pp. 366-373.

[4] CHACÓN-CHACÓN. «Programación multiobjetivo» T. de Est. y de I. O. vol. 30, n.° 3, 1979, pp. 3-22.

[5] DAUER, J. P. and KRUEGER R., J.. «An interative approach to goal programming». Opl. Res. Q. vol. 28, n.° 3 II, 1977, pp. 671-681.

[6] DEMOKAN N. y LAND A. H.. «A parametric quadratic program to solve a class of bicriteria decision problems». Opl. Res. vol. 32, n.° 6. Junio 1981 pp. 477-488.

[7] DYER S. «Interactive goal programming». Man. Sci. Septiembre 1972, pp. 62-70.

[8] GALE, KUHN y TUCKER. «Linear programming and theory of games» en «Activity analysis of production and allocation». University of CHICAGO, 1951.

[9] GEOFFRION A. M. «Solving bicriterion mathematical programs» Ops. Res. vol. 15, n.° I. Enero-Febrero 1967, pp. 39-54.

[10] GEOFFRION A. M., DYER J. S., FEINBERG A. «An interactive approach for multicriterion optimization with and application to the operation of an academic departement». Mgmt. Sci. vol. 19, Diciembre 1972, pp. 357-368.

[11] HANNAN E. L. «Using duality theory for identification of primal efficient points and for sensitivity analysis in multiple objective linear programming». Opl. Res. vol. 29, n.° 7. Julio 1978, pp. 643-649.

[12] ISERMANN H. «The enumeration of the set of all efficient solutions for a linear multiple objective program». Opl. Res. Q. 1977, vol. 28, n.° 3 pp. 711-725.

[13] RALPHE STEVER. «Multiple objective linear programming with interval criterion weights «Man. Sci. Noviembre 1976, pp. 305-316.

[14] Roy, B. «Problems and methods with multiple objective functions». Math. Prog., Noviembre 1971, pp. 234-266.
[15] Wallenius J. «Comparative evaluation of some interactive approaches to multicriterion optimization». Mgmt. Sci. vol. 21, n.° 12, Agosto 1975, pp. 1387-1396.
[16] Zionts, S. y Wallenius, J. «An interactive programming method for solving multiple criterion problem». Mang. Sci. Febrero 1976, p. 652, ss.
[17] Yu P. L. y Zeleny, M. «Linear multiparametric programming by multicriteria simplex method» Man. Sci. Octubre 1976, pp. 159-169.

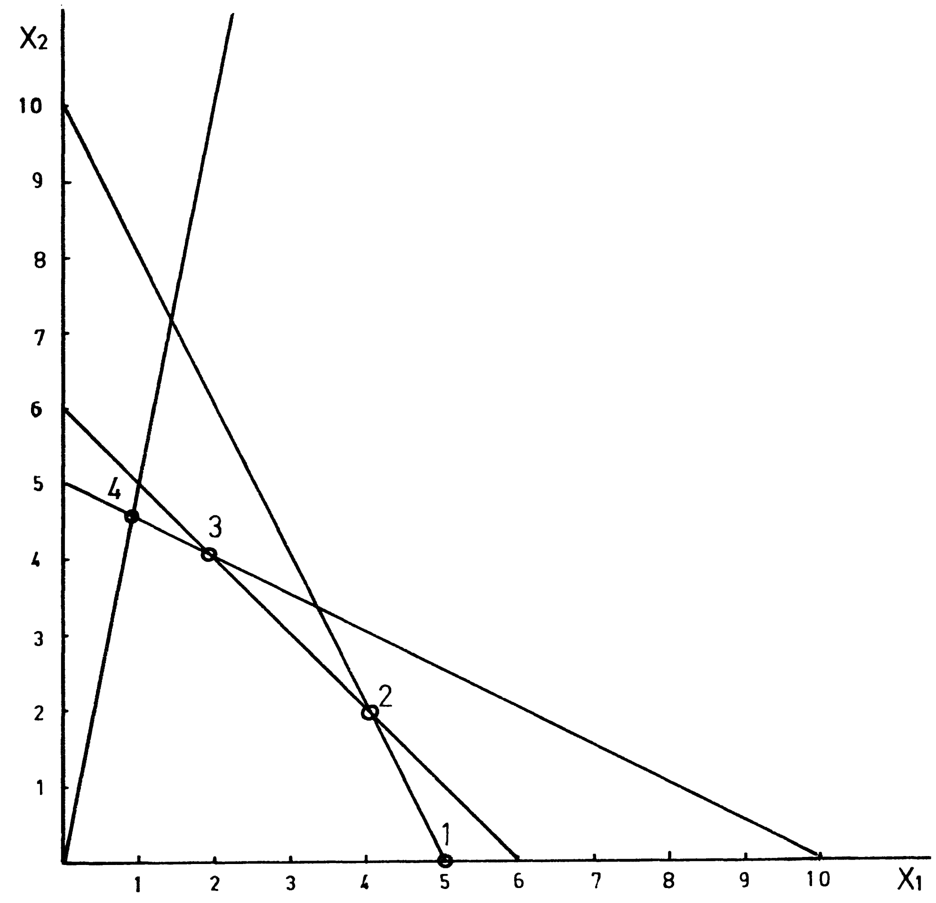


Figura 1

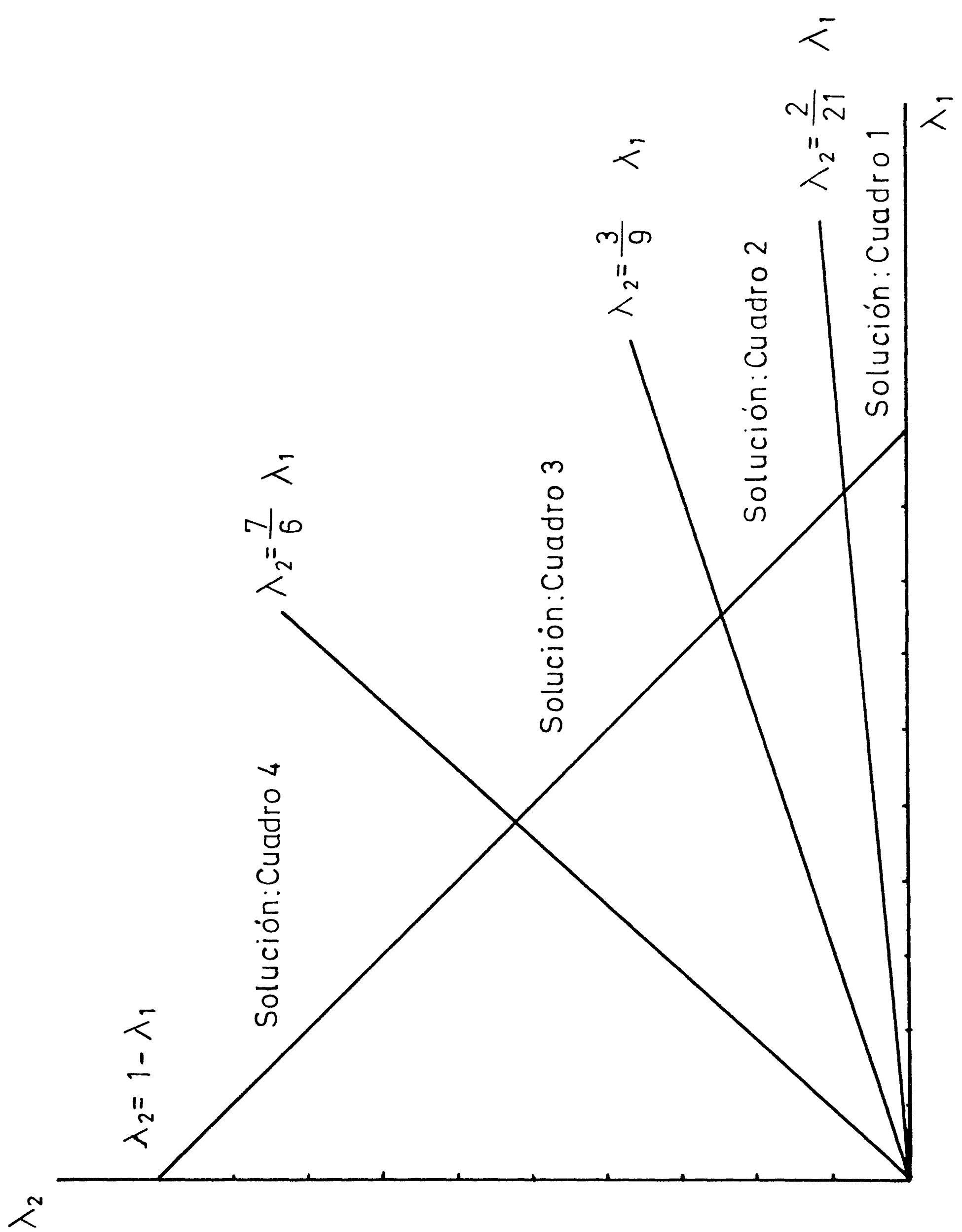
$\lambda_2 = 1 - \lambda_1$
$\lambda_2 = \frac{7}{6} \lambda_1$
$\lambda_2 = \frac{3}{9} \lambda_1$
$\lambda_2 = \frac{2}{21} \lambda_1$
Solución:Cuadro 4
Solución:Cuadro 3
Solución:Cuadro 2
Solución: Cuadro 1
$\lambda_1$
$\lambda_2$

Figura 2