TRABAJOS DE ESTADÍSTICA Y
DE INVESTIGACIÓN OPERATIVA
Vol. 35. Núm. 1, 1984, pp. 83 a 91

LOCALIZACIÓN MINIMAX BAJO POSICIONES ALEATORIAS DE LOS DESTINOS

José Muñoz Pérez
Departamento de Estadística e I.O.
Facultad de Matemáticas
Universidad de Sevilla

Resumen

En este trabajo, estudiamos el problema de localización minimax cuando no se conocen exactamente las coordenadas de los destinos, pero vienen especificadas por variables aleatorias con distribución conocida. Hemos analizado este problema bajo el criterio del valor esperado y el criterio de probabilidad máxima, por medio de la dominancia estocástica. Probamos, a través del concepto del valor esperado de información perfecta, que se puede obtener una reducción considerable de la distancia máxima cuando sea posible una política de esperar y ver, para el caso de las distribuciones normal y exponencial doble.

Summary

This paper deals with the minimax facility location problem for the case where the coordenates of the destinations were not known exactly but were instead specified by probability distributions. We have analyzed this problem under expected value criterion and maximun probability criterion by means of stochastics dominance. Through the concept

(*) Recibido, Octubre, 1981

of the expected value of perfect information, it is shown that a substancial reduction in maximun distance may be obtained when it is possible a wait-and-see policy for the case of normal and double exponencial distributions.

STOCHASTIC LOCATION, FACILTY LOCATION)

1. INTRODUCCIÓN

Dados n puntos sobre el plano, llamados destinos o puntos de demanda, que tienen coordenadas conocidas y que notaremos por (x_1, y_2), $(x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, se trata de encontrar un punto (x, y), llamado centro de servicio, que minimice la distancia máxima S, de este a los centros. Este criterio se utiliza principalmente, cuando se desean servicios rápidos o de urgencia. Si tomamos la distancia rectangular, que es mas apropiada que la distancia euclidea, para cierta clase de problemas, como cuando se trata de localización en centros urbanos o en plantas industriales, el problema queda planteado como

$$\min_{(x,y)\in R^2} \max_{i\in I}(|x - x_i| + |y - y_i|)w_i \qquad I = \{1, 2, \ldots, n\}$$

donde w_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, son los pesos, que pueden representarnos la tasa de tiempo por unidad de distancia. La solución de este problema, dada por ELZINGA y HEARN (1972), es cualquier punto del segmento determinado por los puntos $((c_1 - c_3)/2, (c_1 + c_3 + c_5)/2)$ y $[(c_2 - c_4)/2, (c_2 + c_4 - c_5)/2]$ siendo $c_1 = \min_i(x_i + y_i)$, $c_2 = \max_i(x_i + y_i)$, $c_3 = \min_i(y_i - x_i)$, $c_4 = \max_i(y_i - x_i)$, $c_5 = \max_i(c_2 - c_1, c_4 - c_3)$ y la distancia máxima $S = c_5/2$.

Sin embargo, hay situaciones donde los destinos no se conocen de antemano, pero estan distribuidos aleatoriamente según una cierta distribución de probabilidad, de manera que las coordenadas de los n destinos se consideran variables aleatorias. Supongamos que $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ son variables aleatorias independientes y distribuidas respectivamente, con funciones de distrución $F_1, F_2, \ldots, F_n$, $G_1, G_2, \ldots, G_n$. Si tomamos el criterio del valor esperado, el problema viene formulado como

$$\min_{(x,y)\in R^2} E(\max_{i\in I}(|x - x_i| + |y - y_i|)w_i) \qquad \text{(I)}$$

y si tomamos el criterio de probabilidad máxima, fijado un S_0, se trata de

$$\max_{(x,y)\in R^2} P\{\max_{i\in I}(|x - x_i| + |y - y_i|)w_i \leqslant S_0\} \tag{II}$$

El problema (I) ha sido resuelto por CARBONE y MEHREZ (1980) solo para el caso particular de variables aleatorias distribuidas según una normal de media cero y varianza uno, y con pesos iguales a uno, encontrando que el punto de coordenadas (0, 0) es la solución óptima, señalando la dificultad que entraña la resolución general, debida sobre todo a la determinación del valor esperado de la función objetivo. En este trabajo, resolvemos tanto el problema (I) como el problema (II), bajo hipótesis menos restrictivas, via la dominancia estocástica, encontrando que para cierta familia de distribuciones, la solución óptima corresponde a su mediana.

2. DOMINANCIA ESTOCÁSTICA EN EL PROBLEMA DE LOCALIZACIÓN MINIMAX

Consideremos la variable aleatoria

$$Z(x,y) = \max_{i\in I}((|x - x_i| + |y - y_i|)w_i), \qquad \forall (x,y) \in R^2.$$

Una variable aleatoria X con función de distribución $F(x)$ se dice que es menor estocásticamente o igual que otra variable aleatoria Y con función de distribución $G(x)$ si $F(x) \geqslant G(x)$, $\forall x$, y lo notaremos $X \preccurlyeq Y$. Se trata por tanto, de ver si existe un cierto $(x^*, y^*) \in R^2$ tal que $Z(x^*, y^*) \preccurlyeq Z(x,y)$, $\forall (x,y) \in R^2$ y entonces por las propiedades de la dominancia estocástica (x^*, y^*) sería la solución óptima, tanto del problema (I) como del problema (II). Diremos que la función de distribución F(x) de la variable aleatoria X posee la propiedad P si existe un valor x^* tal que $|X - x^*| \preccurlyeq |X - x|$, $\forall x$. Consideremos la familia $\mathfrak{F}$ de funciones de distribución con la propiedad P, a la que pertenecen, entre otras, la distribución normal y exponencial doble, como vemos a continuación:

EJEMPLO 1. La función de distribución normal de media μ y varianza

σ^2, posee la propiedad P. En efecto, como la variable aleatoria $|x - X|$, tiene como función de densidad

$$f_x(u) = 1/\sqrt{2\pi}[(\exp(-(x + u - \mu)^2/2\sigma^2) + \exp(-(x - u - \mu)^2/2\sigma^2)],$$
$$u > 0$$

y como para $x = \mu$, $f_\mu(u) = 2\ \exp(-u^2/2\sigma^2)/\sqrt{2\pi}$, $\mu > 0$, tenemos $f_\mu(0_+) = 2/\sqrt{2\pi}$ y para $\forall x = \mu' \neq \mu$

$$f_{\mu'}(0_+) = 2\exp((\mu' - \mu)^2/2\sigma^2)/\sqrt{2\pi} < f_\mu(0_+)$$

y por otra parte, $f_\mu(u)$ y $f_{\mu'}(u)$ se cortan en un solo punto u^*, que corresponde a la solución de la ecuación

$$\exp((\mu' - \mu)u/\sigma^2) + \exp(-(\mu' - \mu)u/\sigma^2) = 2\exp((\mu - \mu')^2/2\sigma^2$$

esto supone que $|\mu - X| < |\mu' - X|$

Ejemplo 2. La función de distribución exponencial doble (o de Laplace) verifica la propiedad P. En efecto, si X es una variable aleatoria con función de densidad $g(u) = \exp(|u - \alpha|/\beta)/2\beta$, $-\infty < u < \infty$, entonces la función de densidad de la variable aleatoria $|x - X|$ está dada por

$$h_x(u) = (\exp(-|x + u - \alpha|/\beta) + \exp(-|x - u - \alpha|/\beta)/2\beta, \quad u > 0$$

como $h_\alpha(0_+) = 1/\beta > h_{\alpha'}(0_+) = \exp(-|\alpha' - \alpha|/\beta)/\beta$ y además, como puede comprobarse, $h_\alpha(u)$ y $h(_{\alpha'}(u)$ se cortan en un solo punto $u^* = [\ln(2\exp(|\alpha' - \alpha|\beta) - 1]\beta/2$, resulta que $|\alpha - X| < |\alpha' - X|$, $\forall\alpha' \neq \alpha$.

Como hemos visto anteriormente, se trata de ver si existe un punto $(x', y') \in R^2$ tal que $Z(x', y') \leqslant Z(x, y)$ para todo $(x, y) \in R^2$. El teorema 1, nos pone de manifiesto cuando existe esta solución y la caracteriza. Veamos antes dos lemas previos, para la demostración.

Lema 1. Sean X_1, X_2 dos variables aleatorias independientes con funciones de distribución $F_1(x)$ y $F_2(x)$ respectivamente y sean Y_1, Y_2 dos variables aleatorias independientes con funciones de distribución respectivas $G_1(x)$ y $G_2(x)$. Entonces si $X_1 \leqslant Y_1$ y $X_2 \leqslant Y_2$ se verifica que $X_1 + X_2 \leqslant Y_1 + Y_2$.

Demostración. Si notamos por $H_1(u)$ a la función de distribución de la variable aleatoria $X_1 + X_2$, esta viene dada por

$$H_1(u) = \int F_1(u - y)\, dF_2(y)$$

y si notamos por $H_2(u)$ a la función de distribución de la variable aleatoria $Y_1 + Y_2$, ésta viene dada por

$$H_2(u) = \int G_1(u - y)\, dG_2(y),$$

se tiene

$$\begin{aligned} H_1(u) - H_2(u) &= \int F_1(u - y) dF_2(y) - \int G_1(u - y) dG_2(y) \geqslant \\ &\geqslant \int G_1(u - y) dF_2(y) - \int G_1(u - y) dG_2(y) \\ &\quad \text{pues } \ X_1 \preccurlyeq Y_1 \\ &= E\{G_1(u - X_2)\} - E\{G_1(u - Y_2)\} \geqslant 0, \quad \forall u, \\ &\quad \text{ya que } X_2 \preccurlyeq Y_2 \text{ y } G_1(u - y) \text{ es una fun-} \\ &\quad \text{ción monótona no creciente de } y. \end{aligned}$$

Por tanto, $H_1(u) \geqslant H_2(u)$, $\forall u$, es decir $X_1 + X_2 \preccurlyeq Y_1 + Y_2$.

Lema 2. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n variables aleatorias independientes con funciones de distribución $F_1(x), F_2(x), \ldots, F_n(x)$ respectivamente y sean $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ otras n variables aleatorias independientes con funciones de distribución respectivas $G_1(x), G_2(x), \ldots, G_n(x)$. Entonces si $X_i \preccurlyeq Y_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, se verifica que

$$\max_i X_i \preccurlyeq \max_i Y_i$$

Demostración. Es directa, ya que

$$\forall u, \quad P\{\max_i X_i \leqslant u\} = \prod_{i=1}^{n} F_i(u) \leqslant \prod_{i=1}^{n} G_i(u) = P\{\max_i Y_i \leqslant u\}$$

pues $F_i(u) \leqslant G_i(u)$, $\forall u$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Teorema 1. Sean (x_i, y_i) $i = 1, 2, \ldots, n$ las coordenadas de n destinos, donde x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, es una variable aleatoria con función de distribución F_i perteneneciente a la familia $\mathfrak{F}$, con mediana x', e y_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, es otra variable aleatorria con función de distribución

G_i perteneciente también a la familia $\mathfrak{F}$ y con mediana y'. Supongamos además que estas $2n$ variables aleatorias son independientes entre sí, entonces

$$Z(x', y') \leq Z(x, y), \qquad \forall (x, y) \in R^2$$

DEMOSTRACIÓN. Como las funciones de distribución pertenecen a la familia $\mathfrak{F}$, existe un punto $(x_i', y_i') \in R^2$ tal que

$$|x_i' - x_i| \leq |x - x_i|, \qquad \forall x \in R$$
$$|y_i' - y_i| \leq |y - y_i|, \qquad \forall y \in R \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

y como

$$|x_i' - x_i| \leq |x - x_i|, \quad \forall x \Rightarrow E\{|x' - x_i|\} \leq E\{|x - x_i|\}, \quad \forall x$$

resulta que x_i' es la mediana de x_i. Así por el lema 1 tenemos

$$|x' - x_i| + |y' - y_i| \leq |x - x_i| + |y - y_i|, \qquad \forall (x, y) \in R^2$$

relación que se mantiene si multiplicamos ambos miembros por $w_i > 0$, y por el lema 2, obtenemos

$$\max\{(|x' - x_i| + |y' - y_i|)w_i\} \leq \max\{(|x - x_i| + |y - y_i|)w_i\} \qquad \forall (x, y) \in R^2$$

Sin embargo, como puede observarse, el problema se complica considerablemente, cuando las funciones de distribución correspondientes, tienen medianas distintas. Pero este resultado, nos permite comparar estas decisiones con las correspondientes a una política de esperar y ver a través del concepto de valor esperado de información perfecta (EVPI) introducido por WESOLOWSKY para un problema unidimensional de WEBER.

3. EL VALOR ESPERADO DE INFORMACIÓN PERFECTA

El valor esperado de información perfecta, es una medida del coste de la incertidumbre, ya que no conocemos la mejor localización del centro de servicio, deseamos encontrar la cantidad máxima que estaremos dispuestos a pagar, por la información acerca de la situación de los puntos de demanda. Así, una medida de este máximo, es el valor esperado de información perfecta, que se define como la diferencia entre el coste esperado de la mejor localización posible, sin el conocimiento a priori de las posiciones de los puntos de demanda y el coste esperado de la mejor localización si tuvieramos conocimiento exacto, cada vez, de las posiciones de los puntos de demanda es decir

$$\text{EVPI} = \text{ECBL} - \text{ECPI}$$

donde

$$\text{ECBL} = \min_{(x,y)\in {}^2} E(Z(x,y)) = E(\max_i \{|x' - x_i| + |y - y_i|\})$$

$$\text{ECPI} = E(\min_{(x,y)\in R^2} Z(x,y)) = E(\max(\max_i(x_i + y_i) - \\ - \min_i(x_i - y_i))/2; (\max_i(x_i - y_i) - \min_i(x_i - y_i))/2)),$$

habiendo tomado todos los pesos iguales a uno. Esta última expresión se simplifica si las funciones de distribución corresponden a variables aleatorias simétricas, viniendo dada en este caso como

$$\text{ECPI} = E(\max_i \{(x_i - x') + (y_i - y')\}).$$

A continuación determinamos el EVPI para el caso de una población normal de media μ y varianza σ^2, y después para el caso de una distribución exponencial doble (o de Laplace) de media α y varianza $2\beta^2$, suponiendo que los puntos de demanda se situan a lo largo de una carretera, con el fin de simplificar los cálculos.

Supongamos x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, son variables aleatorias $N(\mu, \sigma)$, entonces

$$\begin{aligned} \text{ECPI} &= (E(\max_i x_i - \min_i x_i))/2 = \\ &= \sigma(E(\max_i(x_i - \mu)/\sigma - \min_i(x_i - \mu)/\sigma))/2 = \\ &= \sigma E(\max_i T_i) \quad \text{donde} \quad T_i \sim N(0, 1) \end{aligned}$$

$$\text{ECBL} = E(\max_i |x_i - \mu|) = \sigma E(\max_i |T_i|)$$

y por tratarse de una distribución simétrica $E(\max_{1\leq i\leq n}|T_i|)$ se puede aproximar por $E_{1\leq i\leq 2n}(\max T_i)$ (ver Gumbel) y así

$$\text{EVPI} \approx \{E(\max_{1 \le i \le 2n} T_i) - E(\max_{1 \le i \le n} T_i)\}\sigma$$

Si observamos los valores de $E(\max_i T_i)$ tabulados por HARTER (1961), encontramos que el EVPI disminuye conforme n aumenta y que para n suficientemente grande el EVPI $\approx 0.22\sigma$. Por otra parte, y como era de esperar, el EVPI es proporcional a la desviación típica de la población.

Si la posición de los puntos de demanda viene dada por una distribución exponencial doble de mediana α, como la función de densidad viene dada por

$$f(x) = (1/2\beta)\exp(-|x - \alpha|\beta) \qquad -\infty < x < \infty \quad 0 < \beta$$

obtenemos

$$\text{ECBL} = E\{\max_i |x_i - \alpha|\} = \int_0^{\infty}(1 - (1 - \exp(-u/\beta))^n)du =$$

$$= \sum_{r=1}^{n}(-1)^r\binom{n}{r}\beta/r = \beta\sum_{k=1}^{n}(1/k)$$

$$\text{ECPI} = E\{\max(x_i - \alpha)\} = \int_0^{\infty}(1 - (1 - (1/2)\exp(-u/\beta))^n)du -$$

$$-(1/2)^n\int_{-\infty}^{0}\exp(nu/\beta)du = \beta\sum_{k=1}^{n} 1/k -$$

$$-\beta[\sum_{k=1}^{n}(1/k2^k) + 1/n2^n]$$

resultando EVPI $= \beta[\sum_{k=1}^{n}(1/k2^k) + 1/n2^n]$, con lo cual el EVPI se incrementa conforme aumenta el número de puntos de demanda, al contrario de lo que ocurría en el caso de la normal. También el EVPI es proporcional a la desviación típica. En cualquiera de los casos, se pone de manifiesto, la mejora sustancial (reducción de la distancia máxima) que se pude obtener cuando sea factible una política de esperar y ver.

BIBLIOGRAFÍA

CARBONE, R. y MEHREZ, A., «The single facility minimax distance problem under stochastic location of demand» Management Sci. Vol. 26, n°.1 (1980).

ELZINGA, J. y HEARN, D., «Geometrical solutions for some minimax location problems» Transportation Sci., Vol. 4 (1972) pp. 172-181.

FRANCIS, R. y WHITE, J., «Facility Layout and location» Prentice Hall (1974).

GUMBEL, C., «Statistics of extremes». Univ. Press, New York (1958).

HARTER, W., «Expected value of normal order statistics» Biometrika, Vol. 48 (1961) pp. 151-165.

WESOLOWSKY, G. O., «Probabilistic weights in the facility location problem», Management Sci. Vol. 24, N.° 2 (1977), pp. 224-229.