TRABAJOS DE ESTADÍSTICA Y
DE INVESTIGACIÓN OPERATIVA
Vol. 35. Núm. 1, 1984, pp. 57 a 64

# UN MÉTODO PARA LA SIMULACIÓN DE FUNCIONES ALEATORIAS ESTACIONARIAS DE SEGUNDO ORDEN

**Félix Míguez**
*E.T.S.I. de Minas de Madrid*

**Summary**

A method is shown for the simulation in $\mathbb{R}^n$ of second order stationary random functions with given isotropic covariance. Particular solutions, ilustrated with examples, are provided in $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$ and $\mathbb{R}^3$.

Palabras clave: covarianza, función aleatoria, estacionaridad de segundo orden, simulación.

## 1. INTRODUCCIÓN

Un problema de gran interés teórico y práctico es el de la construcción de realizaciones, o simulación, de una función aleatoria estacionaria de segundo orden de covarianza dada, (véase p.e., JOURNEL y HUIJBREGTS, 1978, pp. 491-554; RIPLEY, 1981, pp. 16-18). Existen para ello diversas soluciones en $\mathbb{R}^1$ pero impracticables en espacios de mayores dimensiones. MATHERON (1973, p. 461; véase también RIPLEY, op. cit.) ha mostrado un método indirecto en $\mathbb{R}^n$ por medio de simulaciones unidimensionales. En este artículo formalizamos y generalizamos a cualquier número de dimensiones un método propuesto por ALFARO (1980) en $\mathbb{R}^2$.

(*) Recibido, Febrero, 1982

## 2. FORMULACIÓN DEL MÉTODO

Se distribuyen en $\mathbb{R}^n$ esferas de diámetro aleatorio $L$ con distribución de probabilidades $P(L \leqslant l) = F_n(l)$, y cuyos centros se localizan de acuerdo con un proceso de POISSON de intensidd $\lambda$. A cada esfera se le asocia independientemente una variable aleatoria $Y_i$, estando éstas idénticamente distribuidas como una variable aleatoria $Y$. Se define la función aleatoria $Z(x)$ como:

$$Z(x) = \sum_{i=1}^{N} Y_i \tag{2.1}$$

donde $N$ es la variable aleatoria, independiente de las $Y_i$, número de esferas que solapan el punto $x$.

Para $L = l$ fijo y 2 puntos $x$ y $x + h$ se tiene:

$$Z(x) = \sum_{i=1}^{N_a} Y_i + \sum_{j=1}^{N_b} Y_j$$

$$Z(x+h) = \sum_{i'=1}^{N_c} Y_{i'} + \sum_{j'=1}^{N_b} Y_{j'}$$

donde las variables aleatorias $N_a$ y $N_c$ son, respectivamente, el número de esferas de diámetro $l$ que solapan $x$ pero no $x + h$, y $x + h$ pero no $x$, y la variable aleatoria $N_b$ es el número de esferas de diámetro $l$ que solapan simultáneamente $x$ y $x + h$. Se puede escribir entonces:

$$\begin{aligned} \operatorname{Cov}(Z(x), Z(x+h)/L = l) &= \operatorname{Var}(\sum_{i=1}^{N_b} Y_i/L = l) \\ &= E(N_b/L = l)\operatorname{Var}(Y) + \operatorname{Var}(N_b/L = l)E^2(Y) \qquad (2.2) \\ &= \lambda B_n(h, l)E(Y^2) \end{aligned}$$

donde $B_n(h, l)$ es el volumen de la intersección de la esfera $n$-dimensional de diámetro $l$ con su trasladada la distancia $h$.

Para obtener la expresión de la covarianza incondicional se utiliza la relación general:

$$\begin{aligned} \operatorname{Cov}(Z(x), Z(x+h)) &= E(\operatorname{Cov}(Z(x), Z(x+h)/L = l)) \\ &+ \operatorname{Cov}(E(Z(x)/L = l)), \quad E(Z(x+h)/L = l)) \end{aligned}$$

donde, en nuestro caso:

$$\begin{aligned}E(Z(x)/L = l) &= E\left(\sum_{i=1}^{N} Y_i/L = l\right)\\ &= E(N/L = l)E(Y)\\ &= \lambda B_n(0, l)E(Y)\\ &= E(Z(x + h)/L = l)\end{aligned}$$

Se tiene finalmente:

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(Z(x), Z(x + h)) = {}& \lambda E(Y^2)E(B_n(h, L))\\ &+ \lambda^2 E^2(Y)\mathrm{Var}(B_n(0, L))\end{aligned} \tag{2.3}$$

y resulta que $Z(x)$ es una función aleatoria estacionaria de segundo orden.

Para un modelo de covarianza dado $\mathrm{Cov}(Z(x), Z(x + h)) = C(h)$, es teóricamente posible resolver la anterior ecuación integral para obtener la distribución de probabilidades del diámetro aleatorio. Para evitar el efecto indeseable de la constante, independiente de $h$, que aparece en el término de la derecha, es conveniente hacer $E(Y) = 0$, con lo que la ecuación 2.3 puede escribirse:

$$C(h) = \lambda E(Y^2)\int_h^\infty B_n(h, l)dF_n(l) \tag{2.4}$$

Nótese que la covarianza representada por la ecuación (2.3) es una función monótona. Así pues con el método propuesto no es posible obtener covarianzas como $C(h) = \cos h$ en $\mathbb{R}^1$ o como $C(h) = (\operatorname{sen} h)/h$ en $\mathbb{R}^3$.

## 3. SOLUCIONES EN $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$ Y $\mathbb{R}^3$

Con $n = 1, 2$ y $3$ se tiene respectivamente para la función $B_n(h, l)$:

$$B_1(h, l) = \begin{cases} 0 & h \geqslant l \\ l - h & h < l \end{cases} \tag{3.1}$$

$$B_2(h, l) = \begin{cases} 0 & h \geqslant l \\ \dfrac{l^2}{2}\cos^{-1}\left(\dfrac{h}{l}\right) - \dfrac{h}{2}(l^2 - h^2)^{1/2} & h < l \end{cases} \tag{3.2}$$

$$B_3(h, l) = \begin{cases} 0 & h \geqslant l \\ \dfrac{\pi l^3}{6}\left(1 - \dfrac{3h}{2l} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{h}{l}\right)^3\right) & h < l \end{cases} \qquad (3.3)$$

En una y tres dimensiones las soluciones son directas, tomando respectivamente la primera y segunda derivada con respecto a $h$ en la ecuación (2.4), con (3.1) y (3.3). Se obtiene:

$$F_1(h) = \begin{cases} 0 & h \leqslant 0 \\ 1 + \dfrac{C'(h)}{\lambda E(Y^2)} & h > 0 \end{cases} \qquad (3.4)$$

$$F_3(h) = \begin{cases} 0 & \mathrm{h} \leqslant 0 \\ 1 - \dfrac{2\,C''(h)}{\pi h \lambda E(Y^2)} & h > 0 \end{cases}$$

En 2 dimensiones se tiene, de las ecuaciones (2.4) y (3.2):

$$C''(h) = \lambda E(Y^2)\int_h^\infty \frac{h}{(l^2 - h^2)^{1/2}}\,dF_2(l)$$

Para resolver esta ecuación se hace (Alfaro, op. cit., p. 27):

$$\int_r^\infty C''(p)\frac{dp}{(p^2 - r^2)^{1/2}} =$$

$$= \lambda E(Y^2)\int_r^\infty dF_2(l)\int_r^l \frac{pdp}{(p^2 - r^2)^{1/2}(l^2 - p^2)^{1/2}}$$

cambiando la variable $(p^2 - r^2)/(l^2 - r^2) = s$:

$$\int_r^l \frac{pdp}{(p^2 - r^2)^{1/2}(l^2 - p^2)^{1/2}} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{ds}{s^{1/2}(1 - s)^{1/2}} = \frac{\pi}{2}$$

y resulta finalmente:

$$F_2(r) = \begin{cases} 0 & r \leqslant 0 \\ 1 - \dfrac{2}{\pi \lambda E(Y^2)}\displaystyle\int_r^\infty \frac{C''(p)dp}{(p^2 - r^2)^{1/2}} & r > 0 \end{cases}$$

## 4. ALGORITMO PARA LA SIMULACIÓN

En general, una vez que se ha obtenido la distribución de probabilidades del diámetro aleatorio, el procedimiento práctico puede ser:

*a* —seleccionar una malla de puntos regularmente espaciados con valores iniciales cero, sobre la cual se va a obtener la realización.

*b* —Localizar un punto $p_i$ aleatoriamente dentro de la región cubierta por la malla.

*c* —Generar una realización $l_i$ de un diámetro aleatorio $L$ con distribución $F_n(l)$.

*d* —Generar una realización $y_i$ de una variable aleatoria $Y$, uniforme por ejemplo, con $E(Y) = 0$, y aumentar $y_i$ en cada punto de la malla que se encuentre a distancia menor o igual que $l_i/2$ del punto $p_i$.

*e* —Si el número de puntos aleatorios proyectados es el que se requiere para una intensidad de $\lambda$ la simulación ha terminado. En otro caso ir a *b*.

Nótese que si el número de valores $y_i$ sumados en cada punto de la malla es suficiente, y la esperanza de dicho número es fácil de calcular, la ley de $Z(x)$ puede aceptarse gaussiana.

## 5. EJEMPLOS DE APLICACIÓN

Veremos a continuación tres ejemplos de obtención de la distribución del diámetro aleatorio.

### Covarianza esférica en $\mathbb{R}^3$

ZUBRZYCKI (1957; en RIPLEY, 1981, p. 55) obtiene la familia de covarianzas esféricas contando el número de puntos de un proceso de POISSON de intensidad $\lambda$ dentro de cada esfera de diámetro a centrada en el punto de muestreo. Entonces:

$$C(h) = \lambda B_n(h, a)$$

Esta construcción equivale a utilizar una variable aleatoria degenerada $Y_i = 1$ en la ecuación 2.1. Las covarianzas esféricas han sido también utilizadas en diversos contextos (MATERN, 1960, P. 60; JOURNEL y HUIJBREGTS, 1978, p. 164; MÍGUEZ, 1980, P. 14). En particular el modelo tridimensional se escribe:

$$C(h) = \begin{cases} \sigma^2\left(1 - \dfrac{3}{2}\dfrac{h}{a} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{h}{a}\right)^3\right) & h < a \\ 0 & h \geqslant a \end{cases} \tag{5.1.}$$

Por medio de la expresión (3.5.) se obtiene que la distribución del diámetro aleatorio necesario es:

$$F_3(h) = \begin{cases} 0 & h \leqslant 0 \\ 1 - \dfrac{\sigma^2}{B_3(0, a)\lambda E(Y^2)} & 0 < h < a \\ 1 & h \geqslant a \end{cases}$$

haciendo ahora $\frac{\sigma^2}{B_3(0, a)\lambda E(Y^2)} = 1$, lo que equivale, fijos $\lambda$, $a$ y $E(Y^2)$ a a cambiar la varianza, se tiene que el diámetro de las esferas ha de ser constante de valor $a$.

### Covarianza esférica en $\mathbb{R}^2$

Para el modelo de covarianza esférica bidimensional correspondiente se tiene un resultado análogo al anterior.

Obtendremos aquí en cambio la distribución necesaria para simular en $\mathbb{R}^2$ una covarianza esférica tridimensional (5.1.), (una función semidefinida positiva en un espacio de $n$-dimensiones conserva ese caracter en un espacio de menor dimensionalidad, aunque no necesariamente al contrario).

Por medio de la expresión (3.6.) se obtiene la distribución mixta:

$$F_2(h) = \begin{cases} 0 & h \leqslant 0 \\ 1 - \dfrac{\sigma^2}{B_3(0, a)\lambda E(Y^2)}(a^2 - h^2)^{1/2} & 0 < h < a \\ 1 & h \geqslant a \end{cases}$$

que puede expresarse mediante la combinación lineal convexa $\alpha F_{2,1}(h) + (1 - \alpha)F_{2,2}(h)$, con:

$$F_{2,1}(h) = \begin{cases} 0 & h < 0 \\ 1 & h \geqslant 0 \end{cases} \qquad F_{2,2}(h) = \begin{cases} 0 & h < 0 \\ 1 - \dfrac{(a^2 - h^2)^{1/2}}{a} & 0 \leqslant h \leqslant a \\ 1 & h \geqslant a \end{cases}$$

$$\alpha = 1 - \frac{\sigma^2 a}{B_3(0, a)\lambda E(Y^2)}$$

Haciendo $\frac{\sigma^2 a}{B_3(0, a)\lambda E(Y^2)} = 1$, como anteriormente, resulta la distribución absolutamente continua:

$$F_2(h) = \begin{cases} 0 & h < 0 \\ 1 - \dfrac{(a^2 - h^2)^{1/2}}{a} & 0 \leqslant h \leqslant a \\ 1 & h \geqslant a \end{cases}$$

Para la simulación, invirtiendo $w = F(l)$, donde $w$ es una realización de una variable aleatoria uniforme en $[0, 1]$, se tiene una realización del diámetro aleatorio $L$ mediante $l = a(w(2 - w))^{1/2}$:

Por medio del algoritmo diseñado en 4. y el resultado recién obtenido, hemos simulado sobre una malla cuadrada bidimensional de $38u \times 38u$ una función aleatoria de covarianza esférica tridimensional (5.1.) con $a = 7u$, proyectándose un total de 2000 círculos. En la figura 1.*a*. se ha representado la zona central de $24u \times 24u$ (eliminando la periferia inconvenientemente tratada), después de haber efectuado una traslación de origen y escala mediante los parámetros media y varianza muestrales. En la figura 1.*b*. se comparan la función de covarianza teórica con la estimada en las 2 direcciones principales mediante el estimador insesgado (con $E\{Z(x)\} = 0$). Nótese como para valores del argumento $ku$ entre un cuarto y un medio de las dimensiones de la zona simulada, la amplitud de las desviaciones (previstas por la teoría. Véase MATHERON, 1965, cap. XIII; JOURNEL y HUIJBREGTS, 1978, p. 192-194; PUGACHEV, 1965, p. 525) entre la función teórica y las estimadas crece prohibitivamente.

**Covarianza exponencial en $\mathbb{R}$**

Para la covarianza $C(h) = \sigma^2\exp(-h/a)$, resulta, aplicando la relación 3.4. y después de efectuar la oportuna corrección de la varianza, la distribución absolutamente continua:

$$F(h) = \begin{cases} 0 & h \leqslant 0 \\ 1 - \exp(-h/a) & h > 0 \end{cases}$$

y para la simulación se tiene una realización $l$ del diámetro aleatorio $L$, mediante $l = -a\ln(1 - w)$, donde $w$ es una realización de una variable aleatoria uniforme en $[0, 1]$.

En la figura 2.*a*. se muestra, después de efectuado el cambio de origen y escala, una zona de longitud $200u$ de una simulación, sobre una zona 5 veces más amplia, de una función aleatoria unidimensional de covarianza exponencial con $a = 3u$, habiéndose proyectado un total de 6000 segmentos aleatorios. En la figura 2.*b* se compara la función de covarianza teórica con la estimada. Nótese como ahora, para valores de $ku$ mucho menores que los citados, no se manifiestan desviaciones severas.

## BIBLIOGRAFÍA


ALFARO,(1968): The random coin method: solution of the problem of the simulation of a random function in the plane. *Jour. of the Inter. Assoc. for Math. Geol.*, vol. 12, n. 1, pp. 25-32.

JOURNEL § HUIJBREGTS (1978). *Mining Geostatistcs.* Academic Press. 600 p.

MATERN, B. (1960). *Spatial Variation.* Almaenna Foerlaget, Stockholm, 114 p.

MATHERON, G. (1965). Les Variables Régionalisées et leur Estimation. Masson, 305 p.

MATHERON, G. (1973). The intrinsic random functions and their applications. *Adv. Appl. Prob.*, 5. pp. 439-468.

MIGUEZ, F. (1980). Introducción a la Teoría de la Variable Regionalizada, Notas Ténicas N.° 4, Centro de Cálculo, ETSI de Minas de Madrid, 104 pp.

PUGACHEV, V. S. (1965). *Theory of Random Functions and its Application to Control Problems.* Pergamon Press, 833 p.

RIPLEY, B. D. (1981). Spatial Statistics. John Wiley § Sons, N. Y. 252 p.