TRABAJOS DE ESTADÍSTICA Y
DE INVESTIGACIÓN OPERATIVA
Vol. 35. Núm. 1, 1984, pp. 3 a 16

MEDIDAS DE CENTRALIZACIÓN MULTIDIMENSIONALES (LEY FUERTE DE LOS GRANDES NÚMEROS)

Juan Antonio Cuesta Albertos
Colegio Universitario de Burgos
Universidad de Valladolid

RESUMEN

En este trabajo definimos una medida de centralización multidimensional para vectores aleatorios como el valor del parámetro para el que se alcanza el mínimo de las integrales de ciertas funciones.

Estudiamos su relación con otras medidas de centralización multidimensionales conocidas.

Finalizamos demostrando la Ley Fuerte de los Grandes Números, tanto para la medida de centralización definida como para la de dispersión asociada.

PALABRAS CLAVE

Medidas de centralización multidimensionales, ley fuerte de los grandes números, k-medias,

AMS 1979 CLASIFICACION 60 F 15 y 62H30

1. INTRODUCCION

En este trabajo realizamos un estudio dirigido a la Ley Fuerte de los Grandes Números de unas medidas de centralización para vectores aleatorios con valores en $\mathbb{R}^s$, $s \geqslant 1$, formadas por n-uplas, $n \geqslant 1$, de elementos de $\mathbb{R}^s$.

(*) Recibido, Mayo, 1981

Con este fin, si μ es una probabilidad definida en los conjuntos de Borel de $\mathcal{R}^s$ que representamos por β^s, proponemos como criterio general para la elección de su medida de centralización tomar un punto de Z^n $(Z = \mathcal{R}^s)$ en que se alcance el mínimo de

$$\int \Phi(x, \theta)\, \mu(dx) \qquad (1)$$

donde Φ es una función real definida en $Z \times Z^n$ cumpliendo ciertas condiciones de regularidad.

Utilizamos como medida de dispersión asociada el valor del mínimo de (1).

Así conseguimos dar un tratamiento conjunto a medidas de centralización, aparentemente, tan dispares como las siguientes:

a) Media y mediana

b) La p-esperanza. $(\Phi(x, \theta) = |x - \theta|^p; x, \theta \in \mathcal{R}$ y $p > 0)$

c) Medidas n-dimensionales obtenidas a partir de $\Phi(x, \theta) = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} d(x, \theta^i)$; donde $(\theta^1, \theta^2, ..., \theta^n) \in \mathcal{R}^n$ y $d(\bullet, \bullet)$ es una distancia en $\mathcal{R}$.

d) Supongamos que para cada $(\theta^1, \theta^2, ..., \theta^n) \in \mathcal{R}^n$ existe una partición de $\mathcal{R}$ por elementos de β^1: $[A_i]_{i=1}^n$ y una familia de funciones reales $[\psi_i]_{i=1}^n$ definidas en $\mathcal{R} \times \mathcal{R}^n$. Sea:

$$\Phi(x, \theta) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i(x, \theta)\, I_{A_i}(x)$$

($I_A(\bullet)$ es la variable aleatoria indicador del conjunto A).

En condiciones bastante generales se pueden aplicar a este tipo de funciones los resultados que presentamos.

Este caso incluye, como más sobresalientes, aquellos en los que la partición esté formada por intervalos y las funciones ψ_i sean convexas (permite, por ejemplo, dividir $\mathcal{R}$ en dos intervalos $(-\infty, h)$ y $[h, \infty)$ y tomar como medida de centralización la mediana en uno de ellos y la media en el otro).

e) Las generalizaciones correspondientes de cada uno de ellos al caso s-dimensional, $s > 1$.

Las condiciones de regularidad vienen dadas en forma de cuatro axiomas que utilizamos para demostrar, fundamentalmente, la existencia del mínimo de (1) (Teorema 2.1) y la consistencia asintótica de estas medidas de centralización y dispersión (Teoremas 3.4 y Corolario 3.5 y Teorema 3.3 respectivamente).

En [2] se propone un criterio esencialmente diferente para la localización de medidas de centralización unidimensionales de variables aleatorias reales. La relación entre ambos sistemas se pone de manifiesto en los Teoremas 2.2 de [2] y 2.2 de este trabajo.

Uno de los inconvenientes que tiene este tipo de medidas de centralización es su falta de unicidad (por ejemplo en el caso de las medianas) Un sistema para paliarlo es elegir un procedimiento para extraer algún elemento del conjunto de todos los posibles. Aunque relativo a la función:

$$\Phi [x, (\theta^0, \theta^1)] = \min [|x - \theta^0|^2, |x - \theta^1|^2]; [x, (\theta^0, \theta^1)] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$$

un estudio de este aspecto aparece en [3].

Muy recientemente, han aparecido dos trabajos ([5] y [7]) en la línea que proponemos. La relación con el nuestro es analizada en la siguiente sección.

2. EXISTENCIA

I. Comenzamos enunciando las condiciones para μ y Φ sobre las que basamos nuestros resultados:

Sean μ una probabilidad definida en $(\mathbb{R}^s, \beta^s)$, $s \geqslant 1$, m un número natural y $\| - \|$ la norma usual en $\mathbb{R}^s$. Supongamos que para cada $n \leqslant m$, existe una función $\phi_n : Z \times Z^n \to \mathbb{R}$ $(Z = \mathbb{R}^s)$, cumpliendo:

(2.1) Si $\theta \in Z^n$; $\phi_n(\bullet, \theta)$ es positiva y μ-integrable.

(2.2) $\text{Inf}_{\theta \in Z^n} \int \phi_n(x, \theta)\, \mu(dx) < \inf_{\theta \in Z^{n-1}} \int \phi_{n-1}(x, \theta)\, \mu(dx)$

(2.3) Existen H y δ mayores que cero y $\theta_0 \in Z^n$ tales que si $\theta = (\theta^1, ..., \theta^n)$ cumple $\inf_{1 \leqslant i \leqslant n} \|x - \theta^i\| > H$, entonces:

$$\phi_n(x, \theta) > \int \phi_n(x, \theta_0)\, \mu(dx) + \delta$$

(2.4) Si $\theta_k = (\theta_k^1, \theta_k^2, ..., \theta_k^n)$; $k \in \mathbb{N}$ es una sucesión tal que existe $J \subset \{1, ..., n\}$ con $p = \text{Card}\,(J) > 0$, cumpliendo:

$$i \in J : \lim_{k \to \infty} \theta_k^i = \theta^i ; \theta^i \in Z$$

$$i \notin J : \lim_{k \to \infty} \| \theta_k^i \| = \infty$$

Entonces, para todo x perteneciente a Z:

$$\lim_{k \to \infty} \phi_n(x, \theta_k) = \phi_p\, [x, (\theta^i)_{i \in J}]$$

siendo, además, esta convergencia uniforme μ-casi seguro cuando x recorre cualquier compacto (es decir, dado un compacto cualquiera, existe un conjunto μ-equivalente a él sobre el que la convergencia es uniforme).

La condición (2.2) tiene sentido por cumplirse (2.1). Por otra parte, se pueden obtener resultados similares a los que presentamos sustituyendo (2.2) por:

(2.2)' Sean $\theta = (\theta^1, \theta^2, ..., \theta^n) \in Z^n$ y $\theta' = (\theta^1, ..., \theta^{i-1}, \theta^{i+1}, ..., \theta^n)$ perteneciente a Z^{n-1}. Entonces:

$$\Phi_n(x, \theta) \leqslant \phi_{n-1}(x, \theta')$$

Hemos optado por presentarla en la forma que figura porque los resultados son de formulación algo más sencilla.

La condicion (2.3) que es de compacidad, obliga a que ϕ_n tenga alguna relación con $\inf_{1 \leqslant i \leqslant n} \| x - \theta^i \|$ sin llegar a ser, necesariamente, función de ese valor.

(2.4) unida a (2.2) refuerza la compacidad.

Por otra parte, (2.4) implica, en particular, la continuidad de ϕ_n respecto de su segunda variable. (Definimos en Z^n la topología inducida por la norma $\|(\theta^1, \theta^2, ..., \theta^n)\| = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} \| \theta^i \|$).

En el caso $m = 1$, las condiciones quedan, evidentemente, reducidas a (2.1), (2.3) y (2.4) que, en este caso, se escribe:

(2.4) Si $[\theta_k]_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión que converge a θ_0, para todo x perteneciente a Z, se cumple que:

$$\lim_{k \to \infty} \phi_1(x, \theta_k) = \phi_1(x, \theta_0)$$

siendo, además, esta convergencia uniforme μ-casi seguro cuando x recorre cualquier compacto.

II. Las diferencias que encontramos con el trabajo de Pollard [5], son las siguientes:

a) Las funciones utilizadas en [5] son de variable real.

b) En su demostración de la Ley Fuerte de los Grandes Números necesita unicidad de solución para la distribución teórica.

c) Comienza su demostración haciendo uso de una desigualdad similar a (2.3) que aquí se da como axioma. Esto nos trae como ventaja el no necesitar de las hipótesis que en [5] se manejan:

i) Existe δ tal que $\phi(2r) \leqslant \delta\, \phi(r)$, para todo $r > 0$.

ii) Utiliza ϕ como función de $\|x - \theta\|$.

iii) ϕ creciente.

d) Utiliza como hipótesis la continuidad de ϕ (por ello no cubre casos como los mencionados en d) de la introducción) que en este trabajo es sustituida por la condición más débil, en cierto sentido, (2.4).

e) Las funciones manejadas en el artículo de referencia cumplen (2.1), (2.2)', (2.3) y (2.4).

III. Como se observará, los resultados que se incluyen (excepto el teorema 2.2) siguen siendo válidos para espacios métricos compactos. Por ello consideramos que nuestras conclusiones incluyen la primera parte de las obtenidas en [7].

No obstante, en [7], se realiza un interesante estudio acerca del mínimo de (1) restringido al conjunto soporte de la probabilidad relativo a la función:

$$\phi(x, \theta) = d^r(x, \theta); r > 0$$

donde (M, d) es un espacio métrico compacto y $x, \theta \in M$.

IV. Si $\theta \in Z^n$, $n \geqslant 1$, llamaremos:

$$\mu(\theta) = \int \phi_n(x, \theta)\ \mu(dx)$$

$$\lambda(\mu, n) = \inf_{\theta \in Z^n} \mu(\theta)$$

$$S(\mu, n) = \{\theta / \theta \in Z^n \ \text{ y } \ \mu(\theta) = \lambda(\mu, n)\}$$

V. Para demostrar que el mínimo de (1) existe, (2.1) puede ser sustituida por:

(2.1)* Si $\theta \in Z^n$; $\phi_n(\bullet, \theta)$ es positiva y β^s-medible. Además, existe $\theta \in Z^n$, tal que $\phi_n(\bullet, \theta)$ es μ-integrable.

Teorema 2.1.– Sean μ una probabilidad definida en $(\mathbb{R}^s, \beta^s)$, $s \geqslant 1$, m un número natural y $\phi_n : Z \times Z^n \to \mathbb{R}$, $n \leqslant m$; cumpliendo (2.1), (2.2), (2.3) y (2.4).

Entonces, $S(\mu, m) \neq \phi$.

DEMOSTRACION.– Sea $[\theta_k]_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de Z^m tal que:

$$\mu(\theta_k) \xrightarrow[k \to \infty]{} \lambda(\mu, m) \tag{2}$$

De (2.3), se deduce que si llamamos $\theta_k = (\theta_k^1, ..., \theta_k^m)$, no puede ser $\inf_{1 \leqslant i \leqslant m} \|\theta_k^i\| \xrightarrow[k \to \infty]{} \infty$.

Por lo tanto, existe $i \leqslant m$, tal que $\|\theta_k^i\| \not\xrightarrow[k \to \infty]{} \infty$ y, por ello, existe una subsucesión de $[\theta_k]$ que representaremos con la misma notación que a la inicial porque en lo sucesivo solo nos referiremos a ella, tal que existe $\theta^i \in Z$ cumpliendo $\theta_k^i \xrightarrow[k \to \infty]{} \theta^i$.

Tomemos la sucesión de elementos de Z que forman las primeras componentes de los elementos que constituyen la subsucesión obtenida. O bien $\|\theta_k^1\| \xrightarrow[k \to \infty]{} \infty$, en cuyo caso pasamos a estudiar la sucesión $[\theta_k^2]$, o bien podemos formar una nueva subsucesión convergente.

Reiterando el proceso obtenemos, finalmente, que existe una subsucesión de la original, que representaremos con la misma notación que a ésta, y un conjunto J contenido en $\{1, 2, ..., m\}$ con p = cardinal $(J) > 0$ tales que:

$$i \in J\colon\ \theta_k^i \xrightarrow[k \to \infty]{} \theta^i;\ \theta^i \in Z$$

$$i \notin J\colon\ \| \theta_k^i \| \xrightarrow[k \to \infty]{} \infty$$

Sea $\theta = [\theta^i]_{i \in J}$. De (2) y (2.4) aplicando el Teorema de Fatou:

$$\lambda(\mu, m) = \lim_{k \to \infty} \mu(\theta_k) \geqslant \int \lim_{k \to \infty} \phi_m(x, \theta_k)\, \mu(dx) = \mu(\theta) \geqslant \lambda(\mu, p)$$

Por lo tanto, en virtud de (2.2), ha de ser $p = m$ y $\theta \in S(\mu, m)$.

De acuerdo con lo indicado en la introducción, podemos considerar los elementos de $S(\mu, m)$ como medidas de centralización para μ que, a su vez, tienen asociada de forma natural como medida de dispersión el número $\lambda(\mu, m)$.

VI. Utilizaremos en el siguiente teorema la función definida en $\mathcal{R}$ por:

$$\mathrm{sig}(x) = 1\, I_{(0, \infty)}(x) + (-1)\, I_{(-\infty, 0)}(x)$$

Teorema 2.2.– Sean $\Phi\colon \mathcal{R} \times \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ y μ una probabilidad definida en $(\mathcal{R}, \beta)$ cumpliendo (2.1), (2.3) y (2.4). Sea γ una medida σ-finita definida en $(\mathcal{R}, \beta)$ y supongamos que existe $\psi\colon \mathcal{R} \times \mathcal{R} \to \mathcal{R}$, β^2-medible, tal que:

$$\Phi(x, \theta) = \int_{(x, \theta] \cup (\theta, x]} \psi(x, u)\, \mathrm{sig}(u - x)\, \gamma(du);\ \forall (x, \theta) \in \mathcal{R} \times \mathcal{R}$$

Es condición necesaria y suficiente para que θ pertenezca a $S(\mu, 1)$ que para todo real θ', se cumpla:

$$\int_{(\theta, \theta'] \cup (\theta', \theta]} \left[\int \psi(x, u)\, \mu\,(\mathrm{d}x)\right] \mathrm{sig}(\theta' - \theta)\, \gamma(du) \geqslant 0$$

DEMOSTRACION.– Sea $\theta \in \mathcal{R}$. Aplicando el teorema de Fubini:

$$\mu(\theta) = \int \left[\int_{(x, \theta] \cup (\theta, x]} \psi(x, u)\, \mathrm{sig}\,(u - x)\, \gamma\,(du)\right] \mu\,(dx) =$$

$$= \int_{(-\infty, \theta]} \left[\int_{(-\infty, u)} \psi(x, u)\, \mu(dx)\right] \gamma(du) -$$

$$- \int_{(\theta, \infty)} \left[\int_{[u, \infty)} \psi(x, u)\, \mu(dx)\right] \gamma(du)$$

Por lo tanto, si $\theta, \theta' \in \mathcal{R}$:

$$\mu(\theta') - \mu(\theta) = \int_{(\theta, \theta'] \cup (\theta', \theta]} \left[\int_{(-\infty, u)} \psi(x, u)\, \mu(dx)\right] \mathrm{sig}\,(\theta' - \theta)\, \gamma(du) +$$

$$+ \int_{(\theta, \theta'] \cup (\theta', \theta]} [\int_{[u, \infty)} \psi (x, u) \; \mu (dx)] \operatorname{sig} (\theta' - \theta) \gamma (du) =$$

$$= \int_{(\theta, \theta'] \cup (\theta', \theta]} [\int \psi (x, u) \mu (dx)] \operatorname{sig} (\theta' - \theta) \gamma (du)$$

de aquí, teniendo en cuenta la definición de $S(\mu, 1)$ se obtiene el teorema.

Es obvio que, a partir de este teorema, exigiendo condiciones de regularidad adecuadas, se obtienen las caracterizaciones usuales en los problemas de cálculo de mínimos.

3. LEY FUERTE DE LOS GRANDES NUMEROS

Enunciamos, sin demostración, el siguiente lema:

Lema 3.1.– Sea $[a_n]$ una sucesión de números reales y h un número real tales que toda subsucesión de $[a_n]$ admite una nueva subsucesión convergente a h. Entonces la sucesión original converge a h.

La notación utilizada en este apartado es la siguiente:

Sean X un vector aleatorio con valores en $\mathcal{R}^s$, $s \geqslant 1$; μ la probabilidad que induce en $(\mathcal{R}^s, \beta^s)$ y $[X_n]$ una sucesión de vectores aleatorios con valores en $(\mathcal{R}^s, \beta^s)$, independientes, definidas en el espacio probabilístico (Ω, α, P) todos ellos con la misma distribución que X.

Para cada natural k, μ_k es la probabilidad muestral definida en $(\mathcal{R}^s, \beta^s)$; es decir, si $A \in \beta^s$: $\mu_k (A) = \sum_{i \leqslant k} \frac{1}{k} I_A (X_i)$.

Dado $n \in \mathbb{N}$, ϕ_n representará una función definida en $Z \times Z^n$, con $Z = \mathcal{R}^s$. Puesto que si suponemos que para todo θ perteneciente a Z^n, $\phi_n (\bullet, \theta)$ es β^s-medible, ϕ_n es μ_k-casi seguro igual a una variable aleatoria simple, ha de ser $\lambda(\mu_k, n)$ finito, podemos enunciar el siguiente teorema:

Teorema 3.2.– (Ley Fuerte para la medida de dispersión)

Sea m un número natural y supongamos que μ y ϕ_n, $n \leqslant m$, cumplen (2.1), (2.2), (2.3) y (2.4). Entonces:

$$\lambda(\mu_k, m) \xrightarrow[k \to \infty]{\text{c.s.}} \lambda(\mu, m)$$

DEMOSTRACION.— Por ser ϕ_m continua en su segunda variable, es claro que para cada ω fijo perteneciente a Ω; $\mu_k(\theta)$ es una función continua de θ. Como Z^s es separable; evidentemente $\lambda(\mu_k, m)$ es variable aleatoria.

Sea $n \leqslant m$ y Π_n un subconjunto numerable y denso de Z^n. Para cada número racional q, llamaremos A_q a la bola cerrada de radio q y centro el origen en Z. Sea $\mathbb{H}$ el conjunto de las funciones de la forma $\phi_n(\bullet, \theta) \bullet I_{A_q}$ donde θ recorre el conjunto Π_n, q varía en los números racionales y $n = 1, 2, ..., m$. Evidentemente, $\mathbb{H}$ es un conjunto numerable.

De acuerdo con el teorema 2.1, existe $\theta_0 \in S(\mu, m)$.

Sea E el conjunto de α de probabilidad uno para el que se cumple el Teorema de Kolmogorof aplicado a las sucesiones de variables aleatorias siguientes: $[\phi_m(X_k, \theta_0)]_{k \in \mathbb{N}}$ y $\{[f(X_k)]_{k \in \mathbb{N}}\}_{f \in \mathbb{H}}$ y, además el de Glivenko aplicado a la sucesión de vectores aleatorios s-dimensionales $[X_k]_{k \in \mathbb{N}}$ (Ver por ejemplo, [6]).

Sea $\omega \in E$; puesto que $\lambda(\mu_k, m) \leqslant \mu_k(\theta_0)$:

$$\overline{\lim}_{k \to \infty} \lambda(\mu_k, m) \leqslant \lim_{k \to \infty} \mu_k(\theta_0) = \lambda(\mu, m) \qquad (3)$$

Sea $[\theta_k]_{k \in \mathbb{N}}$, $\theta_k = (\theta_k^1, \theta_k^2, ..., \theta_k^m)$, una sucesión de Z^m tal que:

$$\mu_k(\theta_k) < \lambda(\mu_k, m) + \frac{1}{k}; \; k \in \mathbb{N} \qquad (4)$$

Supongamos que

$$\lim_{k \to \infty} \|\theta_k^i\| = \infty, \quad i = 1, 2, ..., m \qquad (5)$$

Como $\omega \in E$, es claro que existe $M[\equiv M(\omega)]$ tal que si $k \geqslant M$:

$$\mu_k(\theta_0) < \mu(\theta_0) + \frac{\delta}{2}$$

siendo δ el obtenido de aplicar (2.3) a μ y ϕ_m.

De acuerdo con (2.3), si $\inf_{1 \leqslant i \leqslant m} \|x - \theta^i\| > H$:

$$\phi_m(x, \theta) > \mu(\theta_0) + \delta > \mu_k(\theta_0) + \frac{\delta}{2}$$

Sea h mayor que cero; evidentemente, existe $a \in \mathbb{R}^+$, tal que si llamamos $A = \{x/x \in \mathbb{R}^s$ y $\|x\| \leqslant a\}$; se cumple que A es un conjunto de continuidad para μ y, además, $\mu(A) > 1 - h$. De aquí y (5), se concluye que existe $N \in \mathbb{N}$, tal que si $k \geqslant N$: $\mu_k(A) > 1 - h$ y $\|\theta_k^i\| > H + a$; $i = 1, 2, ..., m$.

Por lo tanto, si $k \geqslant N$ y $x \in A$: $\|\theta_k^i - x\| > H$, y de aquí:

$$\mu_k(\theta_k) \geqslant \int_A \phi_m(x, \theta_k)\, \mu_k(dx) > (\mu_k(\theta_0) + \frac{\delta}{2})\,(1 - h) \geqslant$$

$$\geqslant (\lambda(\mu_k, m) + \frac{\delta}{2})\,(1 - h)$$

y $[\theta_k]_{k \in \mathbb{N}}$ no cumpliría (4). Podemos concluir pues que el conjunto $\{i/1 \leqslant i \leqslant m$ y $\|\theta_k^i\| \underset{k \to \infty}{\not\longrightarrow} \infty\}$ no es el vacío.

Por el mismo razonamiento que en el teorema 2.1 demostramos que existe $J \subset \{1, 2, ..., m\}$ con $p = \text{Card}\,(J) > 0$ y una subsucesión de la que tenemos, que representamos con la misma notación que a la original, tales que:

$$i \in J\colon \theta_k^i \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} \theta^i;\ \theta^i \in Z$$

$$i \notin J\colon \|\theta_k^i\| \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} \infty$$

Sea $\Theta = [\theta^i]_{i \in J}$. Por (2.1), $\phi_p(\bullet, \Theta)$ es μ-integrable, por ello, si $\xi > 0$:

$$\exists\ \delta > 0, \text{ tal que } \mu(A) < \delta\colon \int_A \phi_p(x, \Theta)\, \mu(dx) < \xi \qquad (6)$$

Sea q un número racional tal que $\mu(A_q^c) < \delta$.

Calculemos:

$$\mu(\Theta) - \mu_k(\theta_k) = \int \phi_p(x, \Theta)\, \mu(dx) - \int \phi_m(x, \theta_k)\, \mu_k(dx) \leqslant$$

$$\leqslant \int_{A_q^c} \phi_p(x, \Theta)\, \mu(dx) + \int_{A_q} \phi_p(x, \Theta)\, \mu(dx) - \int_{A_q} \phi_m(x, \theta_k)\, \mu_k(dx)$$

Puesto que A_q es un compacto, aplicando (2.4) y (6), se tiene que, desde un índice en adelante:

$$\mu(\Theta) - \mu_k(\theta_k) < \xi + \int_{A_q} \phi_p(x, \Theta)\, \mu(dx) - \int_{A_q} [\phi_p(x, \Theta) - \xi]\, \mu_k(dx)$$

Por ser Π_p denso en Z^p, existe una sucesión $[\theta_n]_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de Π_p que converge a Θ; y, puesto que A_q es compacto, aplicando (2.4) de nuevo, si elegimos n lo suficientemente grande, tenemos:

$$\mu(\Theta) - \mu_k(\theta_k) < 2\,\xi + \int_{A_q} [\phi_p(x, \theta_n) + \xi]\, \mu(dx) -$$
$$- \int_{A_q} [\phi_p(x, \theta_n) - \xi]\, \mu_k(dx)$$

De aquí, teniendo en cuenta la elección del conjunto E que hicimos al comienzo y que ξ es arbitrario:

$$\overline{\lim}_{k \to \infty} [\mu(\Theta) - \mu_k(\theta_k)] \leqslant 0$$

de aquí y (4):

$$\lambda(\mu, m) \leqslant \mu(\Theta) \leqslant \underline{\lim}_{k \to \infty} \mu_k(\theta_k) \leqslant \underline{\lim}_{k \to \infty} \lambda(\mu_k, m)$$

lo que unido a (3), demuestra que, para la subsucesión que hemos obtenido:

$$\lim_{k \to \infty} \lambda(\mu_k, m) = \lambda(\mu, m) \tag{7}$$

Finalmente, si elegimos una subsucesión cualquiera de $[\lambda(\mu_k, m)]_{k \in \mathbb{N}}$ y le aplicamos el razonamiento que acabamos de exponer, obtendremos una nueva subsucesión cumpliendo (7). Por ello, del lema 3.1 se obtiene el teorema.

Teorema 3.3.– Si μ y ϕ_n, $n \leqslant m$, cumplen (2.1), (2.2), (2.3) y (2.4). Entonces existe un conjunto E de α, con $P(E) = 1$, tal que para todo $\omega \in E$, desde un índice (que depende de ω) en adelante, μ_k y ϕ_n, $n \leqslant m$ cumplen (2.1), (2.2), (2.3) y (2.4).

DEMOSTRACION.– Evidentemente se cumplen (2.1) y (2.4) para ϕ_n y μ_k, $k \in \mathbb{N}$.

(2.2) se deduce del teorema 3.2 y de (2.2) aplicado a μ y ϕ_n, $n \leqslant m$.

Sean θ_0, δ y H los obtenidos de aplicar (2.3) a μ y ϕ_n y sea E_n el conjunto de α de probabilidad uno que cumple el teorema de Kolmogorof aplicado a la sucesión de variables aleatorias reales $[\phi_n(X_k, \theta_0)]_{k \in \mathbb{N}}$.

Si $\omega \in E_n$, desde un índice (que depende de ω) en adelante:

$$\mu_k(\theta_0) < \mu(\theta_0) + \frac{\delta}{2}$$

Por lo tanto, si $\inf_{1 \leqslant i \leqslant n} \|x - \theta^i\| > H$, ha de ser:

$$\phi_n(x, \theta) > \mu(\theta_0) + \delta > \mu_k(\theta_0) + \frac{\delta}{2}$$

Tomando $E = \bigcap_{n \leqslant m} E_n$, se obtiene el teorema.

De los teoremas 3.3 y 2.1 se deduce que existe en α un conjunto de probabilidad uno, tal que para todo elemento de ese conjunto existe un natural M tal que si $k > M$, $S(\mu_k, n) \neq \phi$. En el enunciado del siguiente teorema, E representa a este conjunto.

Como se puede comprobar, el enunciado del teorema 3.4 es de estructura un tanto complicada. Ello es debido a la falta de unicidad en la solución y nos obliga a incluir el corolario 3.5 en el que desaparecen las citadas complicaciones.

Teorema 3.4.– (Ley Fuerte para la medida de centralización).

Si μ y ϕ_n, $n \leqslant m$, cumplen (2.1), (2.2), (2.3) y (2.4) y $[\theta_k]_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones definidas en Ω tales que si $\omega \in E$, desde un índice (que depende de ω) en adelante, $\theta_k(\omega) \in S(\mu_k, m)$. Se cumple que existe F perteneciente a α de probabilidad uno tal que para todo $\omega \in F$:

a) $\overline{\lim}_{k \to \infty} \|\theta_k(\omega)\| < \infty$.

b) Si θ es el límite de una subsucesión de $[\theta_k(\omega)]_{k \in \mathbb{N}}$ entonces, $\theta \in S(\mu, m)$.

DEMOSTRACION.– Sean: E_1 el conjunto de α de probabilidad uno definido al comienzo de la demostración del teorema 3.2 y E_2 el obtenido de aplicar el teorema 3.3. Sea F el conjunto intersección de estos dos.

Sean $\omega \in F$ y $[\theta_k(\omega)]_{k \in \mathbb{N}}$ una subsucesión cualquiera de la original y que representamos con la misma notación que a ésta.

Puesto que, evidentemente, si k es mayor que un cierto número natural, se tiene que:

$$\mu_k [\theta_k(\omega)] < \lambda(\mu_k, m) + \frac{1}{k}$$

podemos repetir la demostración del teorema 3.2 y obtenemos J contenido en $\{1, 2, ..., m\}$ con $p = \text{Card}\,(J) > 0$ y una nueva subsucesión a la que representamos con la misma notación, tal que:

$$i \in J: \theta_k^i \xrightarrow[k \to \infty]{} \theta^i; \theta^i \in Z$$

$$i \notin J: \|\theta_k^i\| \xrightarrow[k \to \infty]{} \infty$$

Continuando con el razonamiento citado, obtenemos que $p = m$ con lo que se tiene a).

Si θ es límite de alguna subsucesión de la original para algún ω perteneciente a F, utilizando, de nuevo, el mismo razonamiento obtenemos b).

Corolario 3.5.– Bajo las hipótesis del teorema 3.4; si además $S(\mu, m) = \{\theta_0\}$ la sucesión original cumple que existe Fde α, de probabilidad uno tal que para todo ω perteneciente a F:

$$\theta_k(\omega) \xrightarrow[k \to \infty]{} \theta_0$$

DEMOSTRACION.– Sea F el conjunto de α de probabilidad uno definido en la demostración del teorema 3.4 y sea ω un elemento suyo.

Sea $[\theta_k(\omega)]_{k \in \mathbb{N}}$ una subsucesión cualquiera de la original.

Por el teorema 3.4, admite una nueva subsucesión convergente a un punto de $S(\mu, m)$. Como este conjunto tiene un único elemento, el resultado se obtiene del lema 3.1.

BIBLIOGRAFIA

(1) BREIMAN, L.– Probability - Addison Wesley, 1968.

(2) BRØNS, H.K.; BRUNCK, H.D.; FRANCK, W.E.; HANSON, D.L. Generalized means and associated families of distributions - Ann. Math. Statist. 40, 339-355; 1969.

(3) CUESTA, J.A.; MATRAN, C.– Sobre la Ley Fuerte de los Grandes Números para una medida de centralización bivaluada - XII Reunión Soc. Esp. Estad. Inv. Oper. e Informát. 1980.

(4) LOEVE, M.– Probability Theory - D. Van Nostrand Company, 1960.

(5) POLLARD, D.– Strong consistency of K-means clustering - Ann. of Statist. 9, 135-140, 1981.

(6) RANGA RAO, R.– Relations between weak and uniform convergence of measures with applications - Ann. Math. Stat., 33, 659-680; 1962.

(7) SVERDRUP-THYGESON, H.– Strong Law of Large Numbers for measures of central tendency and dispersion of random variables in compact metric spaces - Ann. Stat. 9, 141-145, 1981.