TRABAJOS DE ESTADISTICA Y
DE INVESTIGACION OPERATIVA
Vol. 343 Núm. 3, 1983, pp. 68 a 78

PROBLEMAS DE DECISION EN AMBIENTE DIFUSO (*)

José Luis Verdegay Galdeano
Departamento de Estadística Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad de Granada

Resumen

Bajo un planteamiento difuso del Problema General de Decisión Unipersonal, se propone un método que permite definir una función de utilidad para este problema. Dicha función, se muestra como una familia de funciones de utilidad, la cual se considera como la «utilidad difusa» que sirve para resolver el problema que se plantea en los distintos contextos.

1. INTRODUCCIÓN

Presentamos un método para la posible resolución de problemas bajo consideraciones difusas que, en concreto, aplicamos al caso de la definición de una función de utilidad en el Problema General de Decisión Unipersonal (PGD) con planteamiento difuso.

Antes de entrar en la formulación del problema damos algunos conceptos y resultados fundamentales para su resolución.

1.1 Definición. Dado un conjunto referencial cualquiera X, definimos subconjunto difuso (s. d.) de X, y lo notamos $\underset{\sim}{X}$, como cualquier conjunto de pares ordenados,

(*) La edición de este trabajo ha sido financiada por el Departamento de Estadística Matemática de la Universidad de Granada.

(*) Recibido, Septiembre, 1981

$$\underset{\sim}{X} = \{(x, \alpha),\ \forall x \in X,\ \alpha \in [0, 1]\}$$

donde $\alpha \in [0, 1]$ recibe el nombre de grado de pertenencia y viene dado por una función,

$$\mu : X \to [0, 1] \tag{1}$$

que se denomina función de pertenencia del s. d. $\underset{\sim}{X}$

Brevemente, podemos decir que un s. d. de X es cualquier función como la (1). Al conjunto de s. d. sobre X se le nota por $F(X)$.

1.2 Definición. Dado un referencial X, se define relación difusa sobre X, como cualquier s. d. Ψ del producto cartesiano $X \times X$ notándolo $\Psi \in F(X, X)$ o bien, cuando no haya dudas $\Psi \in F(X)$.

1.3 Definición. Dado un s. d. $\mu \in F(X)$ llamamos α-corte de nivel α de dicho s. d. al conjunto ordinario,

$$X_\alpha = \{x \in X : \mu(x) \geqslant \alpha\}\ \ \forall \alpha \in [0, 1]$$

con las siguientes propiedades triviales,

1.3.1) $X_0 = X$

1.3.2) $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in [0, 1] : \alpha_1 > \alpha_2 \to X_{\alpha_1} \subset X_{\alpha_2}$

El siguiente resultado, debido a Negoita y Ralescu (1975) es fundamental.

1.4 Teorema (de representación de s. d.). Si $\mu \in F(X)$ y consideramos la sucesión de α-cortes

$$\{X_\alpha, \alpha \in [0,1]\}$$

se verifica,

$$\mu = \sum_\alpha \alpha \cdot X_\alpha \tag{2}$$

en el sentido de que,

$$\forall x \in X \to \mu(x) = \operatorname*{Sup}_{0 \leq \alpha \leq 1} \alpha \cdot \mu_{X_\alpha}(x)$$

donde μ_{X_α} es la función indicador clásica del α-corte X_α.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La cuestión de considerar una función de utilidad para la resolución de los problemas de decisión que se plantean bajo consideraciones difusas, ha sido tratado particularmente por cada autor y para problemas concretos, denominando «Utilidad Difusa», en general, a cualquier función que sirva para resolver el problema, como por ejemplo sucede en Tanaka et al. (1976), Jain (1976), Sugeno (1977), etc., y dando siempre como solución un punto en el espacio de alternativas posibles.

De acuerdo con Ralescu (1977) podemos pensar, sin embargo, que si un problema planteado en terminos exactos tiene una solución bien definida, en el sentido de no ser imprecisa, cualquier problema planteado en terminos difusos debe tener, también una solución difusa y no una bien definida en el anterior sentido.

Según el Teorema 1.4, sabemos que cualquier s. d. puede expresarse mediante conjuntos ordinarios. De este modo podemos pensar en representar cualquier problema con planteamiento difuso en la forma (2). Esto significa poder resolver mediante el esquema clásico los problemas difusos sin más que α-cortar el conjunto problema. En cada α-corte podremos encontrar la solución que nos interese, si es que se conserva el mismo problema sobre estos conjuntos, con lo que obtendremos una familia de soluciones que nos podra definir la correspondiente «solución difusa» del problema considerado.

A fin de aplicar el método expuesto a la busqueda de una función de utilidad difusa, partimos de la idea básica del PGD, Rios (1976). Dicho problema, representable por una tripleta $(P, X, <)$ con el sentido conocido, puede originar tres problemas distintos bajo condicionamientos difusos,

2.1 La relación de preferencia existente entre las alternativas es una relación difusa $\mu \in F(P)$, dependiendo de la cual, obtendremos diferentes problemas. Corresponde este caso al modelo en el que el decisor no tiene perfectamente claras sus preferencias entre alternativas. Representaremos este problema por $(P, X, \lesssim)$.

2.2 El conjunto X constituido por las consecuencias de las acciones admisibles, es un s. d. de P. Este caso se justifica desde el momento en que el decisor no conoce, exactamente, los límites del conjunto de acciones que le esta permitido utilizar. Con el mismo criterio anterior, lo representaremos por $(P, \underset{\sim}{X}, <)$.

2.3 El último caso es aquel en que, tanto la relación de preferencia, como el conjunto de alternativas admisibles son difusos. Corresponde a la mixtura de los dos anteriores y lo representaremos por $(P, \underset{\sim}{X}, \lesssim)$.

Hay que destacar que el espacio P no debe tomarse en ningún caso como difuso, puesto que todas las acciones posibles de un decisor y sus consecuencias, suelen ser conjuntos perfectamente definidos.

A continuación, pasamos a resolver cada uno de los tres casos anteriores.

3. RELACIÓN DE PREFERENCIA DIFUSA EN EL PGD

Consideremos el problema $(P, X, \lesssim)$ donde $\lesssim$ es una relación de preferencia difusa entre alternativas dada por una función de pertenencia,

$$\mu_D: P \times P \to [0, 1]$$

Supongamos que μ_D es un orden débil difuso, es decir, que verifica,

a) $\forall x, y \in P: \mu_D(x, y) > 0 \to \mu_D(y, x) = 0$

b) $\forall x, y, z \in P \to \mu_D(x, z) \leqslant \operatorname{Inf}_y \operatorname{Sup}\{\mu_D(x, y), \mu_D(y, z)\}$

3.1 Teorema. Sea,

$$D = \sum_\alpha \alpha \cdot D_\alpha \qquad \alpha \in (0, 1]$$

la descomposición de un orden débil difuso. Entonces, cada D_α es un orden débil en X, $0 < \alpha \leqslant 1$. Reciprocamente, si los D_α, $0 < \alpha \leqslant 1$, constituyen una sucesión encajada de ordenes debiles distintos en X, tales que,

$$\alpha_1 > \alpha_2 \to D_{\alpha_1} \subset D_{\alpha_2} \ \ \forall \alpha_1, \alpha_2 \in (0, 1]$$

entonces, para cualquier elección de α's en $(0, 1]$, D es una relación de orden débil difuso.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que D es un orden débil difuso,

$$\forall\alpha \in (0, 1],\ \forall(x, y) \in D_\alpha : \mu_D(x, y) \geqslant \alpha \to \mu_D(y, x) = 0 \to (y, x) \notin D_\alpha$$

Análogamente, si

$$(x, z) \in D_\alpha \leftrightarrow \mu_D(x, z) \geqslant \alpha$$

tenemos que,

$$\forall y \in X \to \mu_D(x, y) \geqslant \alpha \quad \text{o} \quad \mu_D(y, z) \geqslant \alpha$$

es decir,

$$\forall y \in X \to (x, y) \in D_\alpha \quad \text{o} \quad (y, z) \in D_\alpha$$

Recíprocamente si, $\forall\alpha \in (0, 1]$ D_α es un orden débil,

$$(x, y) \in D_\beta \leftrightarrow \mu_D(x, y) \geqslant \beta \to (y, x) \notin D_\beta, \ \forall\beta \in (0, 1]$$

Así,

$$\forall\alpha, \beta \in (0,1] : \alpha < \beta \to (y, x) \notin D_\alpha \leftrightarrow \mu_D(y, x) = 0$$

Análogamente, si en cada D_α se verifica la propiedad de transitividad negativa del orden débil, es decir,

$$(x, z) \in D_\alpha \to (x, y) \in D_\alpha \quad \text{o} \quad (y, z) \in D_\alpha, \qquad \forall y \in X$$

evidentemente, D es un orden débil difuso.

Consideremos las relaciones clásicas de preferencia e indiferencia,

$$x \underset{\alpha}{>} y \leftrightarrow \mu_D(x, y) \geqslant \alpha, \qquad \forall x, y \in P, \quad \forall\alpha \in (0, 1]$$
$$x \underset{\alpha}{\sim} y \Leftrightarrow \mu_D(x, y) < \alpha \quad \text{y} \quad \mu_D(y, x) < \alpha, \qquad \forall x, y \in P, \quad \forall\alpha \in (0, 1]$$

que leemos «x es más preferido que y a grado α» y «x es indiferente a y a grado α». Podemos, ahora, dar el siguiente resultado para el caso de ambiente de certidumbre, dentro del problema que nos ocupa.

3.2 Teorema. Si $\mu_D \in F(P)$ es un orden débil difuso y el espacio cociente $P/\sim_\alpha$ es finito numerable, $\forall\alpha \in (0, 1]$, existe una familia de funciones valuadas reales en P: $\{u_\alpha, \alpha \in (0, 1]\}$ tales que,

$$x \underset{\alpha}{>} y \leftrightarrow u_\alpha(x) > u_\alpha(y), \qquad \forall x, y \in P, \quad \alpha \in (0, 1]$$

DEMOSTRACIÓN. Consideremos un α-corte cualquiera de la relación dada, $\alpha \in (0, 1]$, y el conjunto cociente $P/\sim_\alpha$ constituido por clases de equivalencia,

$$P/\sim_\alpha = \{a_i, i \in I\}$$

En este conjunto definimos la siguiente relación,

$$a_i >_\alpha {}^\circ a_j \Leftrightarrow x >_\alpha \text{ y para algún } x \in a_i \text{ y algún } y \in a_j$$

que es un orden estricto (orden débil que además verifica que si $a_i \neq a_j$ entonces $a_i >_\alpha {}^\circ a_j$ o $a_j >_\alpha {}^\circ a_i$, $\forall a_i, a_j \in P/\sim_\alpha$).

Siguiendo la demostración dada por Fishburn (1970) para el caso no difuso, definimos una función valuada real u_α en $P/\sim_\alpha$ del siguiente modo.

Supongamos las clases de equivalencia ordenadas en cualquier forma, atendiendo a un conjunto de indices I. Supongamos una enumeración de los números racionales $\{q_i, i \in I\}$. Tomamos,

a) $u_\alpha(a_1) = 0$, siendo a_1 la primera clase de equivalencia que encontramos en la ordenación mencionada.
b) Si $\forall i < m$, $a_m >_\alpha {}^\circ a_i \rightarrow u_\alpha(a_m) = m$
c) Si $\forall i < m$, $a_i >_\alpha {}^\circ a_m \rightarrow u_\alpha(a_m) = -m$
d) Si para algún $i, j < m$, $a_j >_\alpha {}^\circ a_m >_\alpha {}^\circ a_i$ y $a_j \not>_\alpha {}^\circ a_h \not>_\alpha {}^\circ a_i$ para cualquier entero positivo $h < m$ $(h \neq i, j)$ tomamos $u_\alpha(a_m)$ igual al primer número q_k en la enumeración para el que,

$$u_\alpha(a_j) > q_k > u_\alpha(a_i).$$

Finalmente, para evaluar la utilidad de cada alternativa, a grado $\alpha \in (0, 1]$, tomamos,

$$\forall x \in a_i, \qquad u_\alpha(x) = u_\alpha(a_i), \qquad \forall a_i \in P/\sim_\alpha$$

Repitiendo el proceso para cada $\alpha \in (0, 1]$ obtenemos una familia de funciones de utilidad que nos sirve para resolver el PGD en ambiente de certidumbre y con relación de preferencia difusa.

Más precisamente,

3.3 Definición. Llamamos «utilidad difusa» u^d, para el problema en cuestión, a una función,

$$u^d : P \times (0, 1] \to \mathbb{R}$$

definida por,

$$u^d(x, \alpha) = u_\alpha(x) \qquad \forall x \in P, \quad \forall \alpha \in (0, 1]$$

El mismo problema estudiado hasta aquí, puede ser tratado en ambiente de riesgo. La diferencia esencial con respecto al anterior caso, es la estructura de P (ahora espacio de mixtura) que, sin embargo, no modifica el problema, puesto que el decisor mantiene hipótesis difusas sobre el orden establecido entre las correspondientes loterias.

3.4 Teorema. Supongamos que P es un espacio de mixtura, entonces $\forall x, y, z \in P$, se verifica

a) $\mu_D \in F(P)$ es un orden debil difuso

b) $\mu_D(x, y) \geqslant \alpha$, $0 < \lambda < 1 \to \mu_D[\lambda y + (1 - \lambda)z, \lambda x + (1 - \lambda)z] \geqslant \alpha$

c) $\mu_D(x, y) \geqslant \alpha$, $\mu_D(z, y) \geqslant \alpha \to \mu_D[y, \lambda x + (1 - \lambda)z] \geqslant \alpha$ para algún $\lambda \in (0, 1)$ y $\mu_D[y, \beta x + (1 - \beta)z] \geqslant \alpha$, para algún $\beta \in (0, 1)$ y $\forall \alpha \in (0, 1]$, si, y solo si, existe una familia de funciones valuadas reales en $P\{u\alpha, 0 < \alpha \leqslant 1\}$ tal que,

d) $\mu_D(z, x) \geqslant \alpha \Leftrightarrow u_\alpha(z) > u_\alpha(x)$, $\forall x$, $z \in P, \forall \alpha \in (0, 1]$

e) Los α-cortes de μ_D, D_α, constituyen una sucesión encajada de órdenes débiles distintos en P tales que,

$$\alpha_1 > \alpha_2 \to D_{\alpha_1} \subset D_{\alpha_2}, \qquad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in (0, 1]$$

f) $u_\alpha[\lambda z + (1 - \lambda)x] = \lambda u_\alpha(z) + (1 - \lambda)u_\alpha(x)$, $\forall(\lambda, z, x) \in [0, 1] \times p^2$, y $\forall \alpha \in (0, 1]$.

Además, si u_α en P satisface *d*) y *f*) con u_α reemplazada por v_α, v_α satisface *d*) y *f*) si, y solo si, existen números m y n tales que,

$$v_\alpha(x) = m \cdot u_\alpha(x) + n, \qquad \forall x \in P, \quad m > 0$$

DEMOSTRACIÓN. Apoyandonos en el Teorema 3.1 y realizando la demostración para cada α-corte, esta coincide con la clásica, Fishburn 1970), permitiendonos obtener la familia de utilidades buscada. A si a cada elemento $x \in P$ le podemos asociar para cada $\alpha \in (0, 1]$, una utilidad difusa,

$$u_\alpha(x) = u^d(x, \alpha), \qquad \forall x \in P, \quad \forall \alpha \in (0, 1]$$

estando u^d definida como en 3.3.

El método de obtención de utilidades presentado hasta aquí, también es válido en el caso de incertidumbre, como lo asegura el siguiente resultado, del cual omitimos la demostración ya que, como antes, en cada α-corte, esta coincide con la clásica. Por otro lado, el Teorema 3.1 nos garantiza el paso de una relación de preferencia difusa a una familia de relaciones clásicas y recíprocamente.

3.5 Teorema. Sea $\mathcal{S}$ el conjunto (finito) de estados de la naturaleza y supongamos que se verifica $\forall x, y, z \in P$,

a) $\mu_D \in F(P)$ es un orden débil difuso.

b) $\mu_D(x, y) \geqslant \alpha, \quad 0 < \lambda < 1 \rightarrow \mu_D[\lambda x + (1 - \lambda)z, \lambda y + (1 - \lambda)z] \geqslant \alpha$, $\forall \alpha \in (0, 1]$.

c) $\mu_D(x, y) \geqslant \alpha$, $\mu_D(z, x) \geqslant \alpha \rightarrow \mu_D[x, \lambda y + (1 - \lambda)z] \geqslant \alpha$, para algún $\lambda \in (0, 1)$ y $\mu_D[\beta y + (1 - \beta)z, x] \geqslant \alpha$, para algún $\beta \in (0, 1)$ y $\forall \alpha \in (0, 1]$.

Entonces, con $\mathcal{S} = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$, existe una familia de funciones valuadas reales $u_\alpha^1, u_\alpha^2, \ldots, u_\alpha^n$, en los respectivos conjuntos de consecuencias de los estados, tal que:

$$\forall x, y \in P, \mu_D(x, y) \geqslant \alpha \leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} E[u_\alpha^i, x(s_i)] > \sum_{i=1}^{n} E[u_\alpha^i, y(s_i)], \quad \forall \alpha \in (0, 1]$$

siendo esta u_α^i, $i = 1, 2, \ldots, n$, $\forall \alpha \in (0, 1]$, únicas salvo transformaciones lineales positivas y siendo constantes si, y solo si, el correspondiente s_i es nulo.

De nuevo, la definición de la correspondiente utilidad difusa esta de acuerdo con 3.3

De este modo, con todo lo dicho, cualquier problema de la forma $(P, X, \lesssim)$ bajo las hipótesis adecuadas, puede resolverse mediante la construcción de una utilidad difusa $u^d(x, \alpha)$. Además, si notamos $x^*(\alpha)$ a la solución de,

$$\max_{x \in X} : u^d(x, \alpha) = u_\alpha(x)$$

y eliminamos, mediante el operador superior, los grados de pertenencia redundantes, entonces el s. d. $\{x^*(\alpha), \alpha\} \in F(P)$ será considerado como la solución difusa del problema, sin entrar en consideraciones acerca de la posible existencia del anterior máximo.

Pasamos, a continuación, a ocuparnos de los problemas 2.2 y 2.3 ya enunciados.

4. ESPACIO DE ACCIONES ADMISIBLES DIFUSO EN EL PGD

Como dijimos, la admisibilidad de una alternativa, no es un hecho siempre claro para el decisor, de ahí que tenga sentido hablar de espacio de acciones admisibles difuso.

Consideremos un problema $(P, \underset{\sim}{X}, <)$ con $\underset{\sim}{X} \in F(P)$. Aplicando el método habitual, dicho problema podemos identificarlo con la familia

$$\{(P, X_\alpha, <), \quad \alpha \in (0, 1]\}$$

representando X_α los α-cortes de $\underset{\sim}{X}$, y constituyendo cada uno de estos problemas uno clásico de decisión.

Así, dependiendo del contexto en el que estemos, si admitimos la hipótesis adecuadas sobre P y sobre $<$, siempre será posible construir una función de utilidad,

$$u: P \rightarrow \mathbb{R}$$

válida para el problema en cuestión.

En estas condiciones, podemos obtener la solución de,

$$\max_{s.\,a.}: \begin{array}{l} u(x) \\ x \in X, \quad \alpha \in (0, 1] \end{array}$$

que notaremos $x^*(\alpha)$. Eliminando los grados de pertenencia repetidos, el s. d. $\{x^*(\alpha), \alpha\} \in F(P)$, lo consideraremos como la solución difusa al problema original sin entrar, como antes, en el problema practico de la posible existencia de $x^*(\alpha)$.

5. RELACIÓN DE PREFERENCIA Y ESPACIO DE ACCIONES ADMISIBLES DIFUSOS EN EL PGD

Consideremos por último los problemas del tipo $(P, \underset{\sim}{X}, \lesssim)$ que, de nuevo, identificamos con la familia,

$$\{(P, X_\alpha, <_\alpha), \alpha \in (0, 1]\}$$

con el significado conocido.

Aplicando los resultados anteriores y el método desarrollado y bajo las hipótesis convenientes, es posible obtener una utilidad para cada $\alpha \in (0, 1]$,

$$u_\alpha : P \rightarrow \mathbb{R}$$

que conserve el orden $<_\alpha$.

Para obtener la solución difusa, procediendo como antes, definimos $x^*(\alpha)$ como la solución de,

$$\begin{aligned} \max_{s.\,a.} &: u_\alpha(x) \\ &: x \in X_\alpha, \quad \alpha \in (0, 1] \end{aligned}$$

que conduce, por eliminación de los grados redundantes, al s. d. $\{x^*(\alpha), \alpha\} \in F(P)$.

Para terminar hay que resaltar el hecho de que el modo de construir la función de utilidad en cada α-corte, sobre un espacio cociente, hace que, debido a poder tomar las clases de equivalencia en cualquier orden, incluso en orden distintos para α-cortes diferentes, las utilidades que se les van asignando no guardan ninguna relación, para una misma clase de equivalencia, de un α-corte a otro. Por tanto, aunque los problemas vayan encajados, desgraciadamente no podemos decir lo mismo de sus soluciones. Incluso, si mantuvieramos inalterable el modo de ordenar las clases de equivalencia, no tendría por que darse esa inclusión de soluciones de la que hablamos.

Digamos, por último, que los modelos a los que se llega en los apartados 4 y 5 son, evidentemente, problemas de Programación Matemática que tienen una justificación clara, puesto que un problema de Programación,

$$\max_{x \in X} : z = f(x)$$

no es más que un PGDcon $P = \mathbb{R}^n$, siendo X el conjunto de restricciones al problema y la relación de preferencia, la inducida por $f(x)$,

$$x \geqslant y \leftrightarrow f(x) \geqslant f(y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^2$$

Por tanto, este tipo de problemas es susceptible de ser estudiado de la misma forma anterior.

BIBLIOGRAFÍA

BELLMAN, R. E. y ZADEH, L. A. (1970): «Decisión Making in a Fuzzy Environment». NASA CR-1594

FISHBURN, P. C. (1970): «Utility Theory for Decision Making». John Wiley and Sons Inc.

GUPTA, M. M., SARIDIS, G. N y GAINES, B. R. (1977): «Fuzzy Automata and Decision Processes. North-Holland (Elsevier).

JAIN, R. (1976): «Decision Making in the Presence of Fuzzy Variables». IEEE Trans. on Systems and Cyber., pp. 698-703.

KICKERT, J. M. (1978): «Fuzzy Theories on Decision Making», Martinus Nihoff Ed. (Social Sciences Division).

NEGOITA, C. V. y RALESCU, D. (1975): «Applications of Fuzzy Sets to Systems Analysis». Birkhauser-Verlag.

ORLOVSKY, S. A. (1978): «Decision Making with a Fuzzy Preference relation». Fuzzy Sets and Systems, 1, 3.

RALESCU, D. (1977): «Inexact Solutions for Large Scale Control problems». Proc. of the 1-st Int. Cong. on Math. at the Service of Man, Barcelona.

RIOS, S. (1976): «Análisis de Decisiones». Ediciones ICE-Madrid.

SUGENO, M. (1977): «Fuzzy Measures and Fuzzy Integrals. A Survey». First World Conference on Mathematics at the Service of the Man, Barcelona.

TANAKA, H., OKUDA, T. y ASAI, K. (1976): «A Formulation of Fuzzy Decision Problems and its applications to a Investment Problem». Kybernetes, vol. 5, pp. 25-30.

ZADEH, L. A. (1965): «Fuzzy Sets». Information and Control, 8, pp. 338-353.

ZADEH, L. A. (1965): «Fuzzy Sets and Systems» en Fox, J. (Ed.). Systems Theory. Microwave Research Institute Symposia, Series XV. Polytechnic Press, New York.

ZADEH, L. A. (1971): «Similarity Relations and Fuzzy Orderings». Information Sciences, 3, pp. 177-200.

ZADEH, L. A., FU, K. S., TANAKA, K. y SHIMURA, M. (1975): «Fuzzy Sets and Their Aplications to Cognitive and Decision Processes. Academic Press.