TRABAJOS DE ESTADISTICA Y
DE INVESTIGACION OPERATIVA
Vol. 34, Núm. 3, 1983, pp. 61 a 67

EL CRITERIO DEL VALOR ESPERADO EN UN MODELO DE LOCALIZACION INDUSTRIAL

Blas Pelegrín Pelegrín
Departamento de Estadística y de Investigación Operativa.
Universidad de Sevilla

Resumen

En este trabajo consideramos el problema de localización de un centro de servicio o actividad industrial, cuando la localización de los puntos de demanda P_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, viene dada por variables aleatorias (X_i, Y_i) independientes, con distribuciones de probabilidad continuas. Utilizando el criterio del valor esperado, obtenemos la localización óptima del centro de servicio y calculamos el valor esperado de la información perfecta.

ABSTRACT

This paper deals with a facility location problem in which the locations of demand points, are considered to be independent random variables with continuous probability distributions. When the expected value criterion is used, we obtain the optimal location and we derive the expected value of perfect information.

(*) Recibido, Julio, 1981

INTRODUCCIÓN

Un problema que se presenta frecuentemente en el sector industrial, consiste en determinar la localización de algún centro de servicio o actividad industrial, de forma que el coste total de transporte entre el centro y los puntos de demanda sea mínimo. Generalmente, el coste de localización se puede considerar proporcional a la distancia recorrida entre el centro de servicio y los puntos de demanda, con un factor de proporcionalidad que depende de cada punto.

Nosotros consideramos el siguiente modelo de localización:

$$(1) \quad \underset{(x,y)\in R^2}{\text{Minimizar}}\ \varphi(x,y) = \sum_{i=1}^{n} w_i(|x - x_i|^\theta + |y - y_i|^\theta), \qquad \theta = 1, 2.$$

donde los puntos $P_i = (x_i, y_i)$ representan la localización de los puntos de demanda, $X = (x, y)$ la localización del centro de servicio y w_i el coste unitario de transporte entre el centro de servicio y el punto de demanda P_i, $w_i > 0$. El caso en que $\theta = 1$ [ver (3)], corresponde a la distancia rectangular, y se utiliza principalmente cuando la localización se realiza en un área urbana o en una planta industrial. El caso $\theta = 2$ [ver (1)] corresponde al cuadrado de la distancia euclídea, y se utiliza cuando la localización es en grandes áreas geográficas.

El objeto de nuestro trabajo consiste en estudiar el problema, en el caso de que la localización de los puntos de demanda no sea fija, sino que venga dada aleatóriamente con distribuciones de probabilidad conocidas. Como criterio de optimización utilizamos el criterio del valor esperado, con el que obtenemos una condición general para la localización óptima si $\theta = 1$, y la localización exacta para $\theta = 2$. También calculamos el valor esperado de la información perfecta, concepto introducido en el campo de la Localización por Wesolowsky (6), que nos permite evaluar la validez del citado criterio.

CRITERIO DEL VALOR ESPERADO

Supongamos que los puntos de demanda P_i vienen dados por variables aleatorias (X_i, Y_i), entonces el coste esperado vendrá dado por:

(2) $$E(\varphi(x,y)) = \sum_{i=1}^{n} w_i[E(|x - X_i|^\theta) + E(|y - Y_i|^\theta)]$$

El problema consiste ahora en elegir $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ que minimice el coste esperado. Este problema es separable en las variables x e y en dos subproblemas de igual estructura, de la forma:

(3) $$\underset{x \in R}{\text{Minimizar}}\ \Psi(x) = \sum_{i=1}^{n} w_i E(|x - X_i|^\theta)$$

Para el problema (3) supondremos que las variables aleatorias X_i son continuas, con funciones de densidad y de distribución $f_i(x_i)$ y $F_i(x_i)$ respectivamente, y con medias y varianzas finitas α_i y σ_i^2 respectivamente. En lo que sigue estudiamos el problema (3) para los dos valores de θ:

$\underline{\theta = 1}$

La función objetivo tiene la siguiente expresión:

(4) $$\Psi(x) = \sum_{i=1}^{n} w_i\Big[\Big(\int_{-\infty}^{x} f_i(x_i)dx_i - \int_{x}^{+\infty} f_i(x_i)dx_i\Big)x - \int_{-\infty}^{x} x_i f_i(x_i)dx_i + \int_{x}^{+\infty} x_i f_i(x_i)dx_i\Big]$$

Esta función es convexa y diferenciable, por lo que alcanza el mínimo en un punto estacionario. Derivando e igualando a cero, obtenemos la siguiente ecuación:

(5) $$\sum_{i=1}^{n} w_i P(X_i \leqslant x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} w_i$$

La ecuación (5) ofrece la solución x^* del problema (3) y el coste esperado mínimo viene dado por:

(6) $$\Psi(x^*) = \sum_{i=1}^{n} w_i \alpha_i - 2\sum_{i=1}^{n} w_i \int_{-\infty}^{x^*} x_i f_i(x_i)\, dx_i$$

En particular, si las variables X_i tienen distribuciones simétricas con igual media α, resulta que α es una solución óptima de (3).

$\underline{\theta = 2}$

En este caso la función objetivo viene dada por:

$$\Psi(x) = \sum_{i=1}^{n} w_i(\sigma_i^2 + (x - \alpha_i)^2) \tag{7}$$

La solución del problema (3) viene dada por:

$$x = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i \alpha_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} \tag{8}$$

El coste esperado mínimo viene dado por:

$$\Psi(x^*) = \sum_{i=1}^{n} w_i(\alpha_i^2 + \sigma_i^2) - \frac{(\sum_{i=1}^{n} w_i \alpha_i)^2}{\sum_{i=1}^{n} w_i} \tag{9}$$

VALOR ESPERADO DEL COSTE CON INFORMACIÓN PERFECTA

Si la posición de los puntos de demanda P_i fuera conocida de antemano, la mejor localización del centro de servicio vendría dada por la solución de (1), con un coste que dependería de la posición de dichos puntos. Al valor esperado de dicho coste se le denomina valor esperado del coste con información perfecta (VECIP).

El problema (1) es separable en las variables x e y en dos subproblemas de la siguiente forma:

$$\underset{x \in R}{\text{Minimizar}}\ \varphi(x) = \sum_{i=1}^{v} w_i |x - x_i|^{\theta} \tag{10}$$

A continuación obtenemos el VECIP para el problema (10), para lo cual supondremos que las variables aleatorias X_i se distribuyen independientemente.

$\underline{\theta = 1}$

Supongamos que la posición de los puntos de demanda es conocida y viene dada por $X_1 = x_1$, $X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n$, siendo estos valores distintos (el caso de que algunos valores sean iguales queda excluido, por tener probabilidad nula). La solución de (10) viene dada por un

$$(11)\qquad \sum_{i\in I} w_i < \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} w_i$$

$$\sum_{i\in I} w_i + w_k \geqslant \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} w_i$$

Al coste mínimo en (10) lo notaremos por $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y en este caso viene dado por:

$$(12)\quad \varphi(x_1, \ldots, x_n) = (\sum_{i\in I} w_i - \sum_{i\in N-I-k} w_i)x_k - \sum_{i\in I} w_i x_i + \sum_{i\in N-I-k} w_i x_i$$

donde $N = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Dado k, sea $G_k = \{I \subset N/I$ verifica (11)$\}$ y sea $A(I,k) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n / \{i/x_i < x_k\} = I\}$, entonces resulta de (12) que:

$$\text{VECIP} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{I\in G_k} \Big[\Big(\sum_{i\in I} w_i - \sum_{i\in N-I-k} w_i\Big)\int_{-\infty}^{+\infty} x_k \Psi(x_k, I, N-I-k)\, dx_k$$

$$(13)\quad - \sum_{i\in I} w_i \int_{-\infty}^{+\infty} x_i \Big(\int_{x_i}^{+\infty} \Psi(x_k, I-i, N-I-k)\, dx_k\Big) f_i(x_i)\, dx_i +$$

$$+ \sum_{i\in N-I-k} w_i \int_{-\infty}^{+\infty} x_i \Big(\int_{-\infty}^{x_i} \Psi(x_k, I, N-I-k-i) dx_k\Big) f_i(x_i) dx_i\Big]$$

donde $\Psi(x_k, I, J) = f_k(x_k) \prod_{i\in I} F_i(x_k) \prod_{i\in J} (1 - F_i(x_k))$.

$\underline{\theta = 2}$

Cualquiera que sea la posición de los puntos de demanda $X_1 = x_1$, $X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n$, la solución de (10) viene dada por:

$$(14)\qquad x_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$$

El coste mínimo viene dado por:

$$(15)\qquad \varphi(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} w_i x_i)^2}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$$

De lo anterior resulta que:

$$(16)\qquad \text{VECIP} = \sum_{i=1}^{n} w_i(\alpha_i^2 + \sigma_i^2) - \frac{(\sum_{i=1}^{n} w_i \alpha_i)^2}{\sum_{i=1}^{n} w_i} - \frac{(\sum_{i=1}^{n} w_i \sigma_i)^2}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$$

punto x_k tal que para el conjunto de índices $I = \{i/x_i < x_k\}$ se verifica lo siguiente:

VALOR ESPERADO DE LA INFORMACIÓN PERFECTA

El criterio del valor esperado será tanto mejor, en cuanto el valor esperado del coste de la mejor localización (VECML) obtenida con dicho criterio, se aproxime más al valor esperado del coste con información perfecta. Así pues, una medida de la bondad del criterio del valor esperado, viene dada por el valor esperado de la información perfecta (VEIP), definido de la siguiente manera:

(17) $$\text{VEIP} = \text{VECML} - \text{VECIP}$$

En el modelo que estamos tratando, la expresión del VEIP resulta muy complicada para $\theta = 1$, viniendo dada para la componente x por la diferencia entre (6) y (13). Sin embargo para $\theta = 2$ dicha expresión viene dada por:

(18) $$\text{VEIP} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(w_i\sigma_i)^2}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$$

de donde se desprende que solo depende de la dispersión con que se distribuya cada punto de demanda, y no de los lugares donde se encuentren centralizados.

CONCLUSIONES

Del estudio realizado anteriormente se desprende que en los dos casos considerados, $\theta = 1$ y $\theta = 2$, resulta factible obtener localizaciones óptimas utilizando el criterio del valor esperado. Sin embargo no ocurre lo mismo con el cálculo del VEIP, pues para $\theta = 1$ resulta bastante laborioso.

Para $\theta = 2$ observamos que la expresión del VEIP es muy sencilla y es válida cualesquiera que sean las distribuciones de los puntos de demanda. Estas distribuciones deberán ser continuas e independientes, si bien para cada punto $P_i = (X_i, Y_i)$ las distribuciones de X_i e Y_i pueden estar correladas, suposiciones que pueden ser bastante realistas.

BIBLIOGRAFÍA

1. COOPER, L. (1968): «An extension of the generalized Weber Problem» J. of Reg. Sci. vol. 8, pp. 181-197
2. DREZNER, Z. and WESOLOWSKY, G. O. (1980): "Expected value of perfect information in facility location". Opns. Res, vol. 28, pp. 395-402.
3. FRANCIS, R. L. and WHITE, J. A. (1974): "Facility Layout and Location: An analitical approach». Pretince Hall.
4. JOHNSON, N. L. and LEONE, F. C. (1977): «Statistic and experimental design in engineering and the phisical sciences". Vol. 1. Wiley.
5. WEBER, A. (1929): "Theory of the location of industries". Russell and Russell.
6. WESOLOWSKY, G. O. (1977): "Probabilistic weights in the one dimensional facility location problem". Managem. Sci. Vol. 24, pp. 224-229.