TRABAJOS DE ESTADISTICA Y
DE INVESTIGACION OPERATIVA
Vol. 34. Núm. 2, 1983, pp. 80 a 96

UN CONCEPTO DE SOLUCION PARA JUEGOS GENERALES CON PAGO MULTIOBJETIVO*

José Manuel Prada Sánchez
Departamento de Estadística Matemática
Facultad de Matemáticas
Universidad de Santiago

INTRODUCCION

La objeción fundamental al enfoque de la Teoría Económica actual, indicado por Morgenstern (1972) es que trata de maximizar funciones como beneficio, utilidad etc., suponiendo que estos extremos existen y son asequibles, lo cual sólo sucederá cuando la entidad considerada controla todas las variables de las que depende el máximo. En general ésto no va a ocurrir, pudiendo existir variables con fines contrapuestos a un determinado agente económico (individuo, empresa, etc.). Además, los correspondientes pagos o utilidades son con gran frecuencia multiobjetivo. Por ambos motivos, el marco adecuado para el tratamiento de estos problemas es la Teoría de Juegos Multiobjetivo.

La exploración en este campo ha sido escasa y tardía: las aportaciones de Blackwell (1956), Contini (1966), Aubin (1973), Zeleny (1976), Cook (1976) etc. son teóricas o bien coinciden en general en la conversión del problema en otro monoobjetivo, haciendo uso de criterios particulares que conducirán a soluciones no universalmente aceptadas.

En este trabajo consideramos juegos n-personales en forma normal, finitos con pago multiobjetivo (ℓ_i atributos para cada jugador, $i = 1, ..., n$), y exponemos un planteamiento encaminado a definir un concepto de solución sobre el espacio de pagos de cada uno de los jugadores, que indique lo que "pueden alcanzar" y "cómo alcanzarlo".

El lector interesado en la bibliografía al respecto queda remitido a (3).

(*) El presente trabajo es un resumen de la tesis doctoral del autor.

(*) Recibido Abril, 1981

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Dentro del contexto indicado, vamos a suponer que cada jugador se enfrenta a la coalición constituida por los $n-1$ restantes de acuerdo con el siguiente esquema bipersonal:

$$
\begin{array}{c|c}
 & (\pi_1^1, \ldots, \pi_{i-1}^1, \pi_{i+1}^1, \ldots, \pi_n^1), \ldots, (\pi_1^s, \ldots, \pi_{i-1}^s, \pi_{i+1}^s, \ldots, \pi_n^s) \\
\hline
\pi_i^1 & \\
\vdots & \ldots \quad (u_i^1(x, y), \ldots, u_i^{\ell_i}(x, y)) \quad \ldots \\
\pi_i^r &
\end{array}
$$

Para cada par de estrategias mixtas $x \in S_r$, $y \in S_s$ (variando en los simplex de dimensión r y s) y para todo $k = 1, \ldots, \ell_i$, $u_i^k(x, y) = x^t A_i^k y$, donde A_i^k es la matriz de pagos correspondiente al atributo k-ésimo para J_i.

Con objeto de determinar un nivel de pagos mínimo (en casos de especial interés) para cada jugador, con independencia de la actuación de los demás, supondremos que para cada una de sus estrategias, la coalición oponente puede minimizar de modo simultáneo todas las componentes del correspondiente vector de pagos. Al maximizar este vector, cada jugador en su espacio de estrategias, se tiene una generalización, aunque no la natural, del valor puro inferior en juegos monoobjetivo.

En muchas situaciones reales, cualquier conjunto de $n-1$ jugadores intentará minimizar el pago correspondiente al restante jugador, por lo que tal conjunto no actuará sobre su propia matriz de pagos sino sobre la correspondiente al jugador fijado, y en consecuencia este juego bipersonal se puede considerar por cada jugador como de suma nula, aunque el inicial no lo sea. Si el juego de partida es de suma nula, evidentemente ésto siempre es cierto. Por lo tanto, en la matriz de pagos asociada a cada atributo habrá un conjunto de columnas (no relevantes) que se toman con probabilidad nula en las correspondientes estrategias óptimas, por lo que las eliminaremos.

1. NIVEL DE EFICIENCIA

Para un jugador cualquiera, J, que fijamos a partir de ahora (omitiremos el subíndice i, $i = 1, ..., n$, en todas las consideraciones relativas a él), sea la función vectorial definida para todo x de S_r como:

$$f(x) = (\min_{y \in S_s} x^t A^1 y, ..., \min_{y \in S_s} x^t A^\ell y) =$$
$$= (\min_{j \in \{1,...,s\}} x^t P_j^1, ..., \min_{j \in \{1,...,s\}} x^t P_j^\ell)$$

siendo P_j^k la columna j - ésima de la matriz A^k, $k = 1, ..., \ell$.

Como en el simplex S_r hay $r - 1$ variables independientes, en adelante consideramos su proyección $P(S_r)$ respecto de su última variable. Por consiguiente, dado $x \in P(S_r)$, $x = (x_1, ..., x_{r-1})$, expresamos con $x^t P_j^k$ el producto

$$(x_1, ..., x_{r-1}, 1 - \sum_{i=1}^{r-1} x_i) P_j^k$$

1.1. DEFINICION.– Para el jugador considerado, llamamos *conjunto de estrategias eficientes* a $X_E = \{x^* \in P(S_r) | f(x^*) \leqslant f(x) \Rightarrow f(x^*) = f(x) \ \forall x \in P(S_r)\}$, donde el orden considerado en $\mathbb{R}^\ell$ es el usual (componente a componente).

1.2. DEFINICION.– Se llama *nivel de eficiencia* del jugador fijado a $N_E = f(X_E)$. En el caso $\ell = 2$ adopta la forma indicada en la figura 5.

La determinación del nivel de eficiencia se reduce por lo tanto a resolver el problema:

$$\max_{x \in P(S_r)} f(x) \qquad \text{(I)}$$

donde cada componente de f es una poligonal cóncava por ser el mínimo de un número finito de funciones lineales.

En el desarrollo que sigue, veremos que para calcular ese máximo podemos restringirnos a una parte finita de $P(S_r)$.

1.3. DEFINICION.– Para un atributo cualquiera k, denominamos *zona de linealidad k-ésima correspondiente a la columna j**, al conjunto $A_{j*}^k = \{x \in P(S_r) \mid \min_j x^t P_j^k = x^t P_{j*}^k\}$, y representa la parte de $P(S_r)$ en la que es lineal (linealidad j^*) la componente k-ésima de la función f.

Claramente, la unión de las zonas citadas relativas a las s columnas de A^k coincide con el conjunto $P(S_r)$, siendo disjuntas dos a dos, a lo sumo salvo puntos de sus fronteras. Su intersección puede ser vacía o no, como se observa en la figura 1, en el caso $r = 3$.

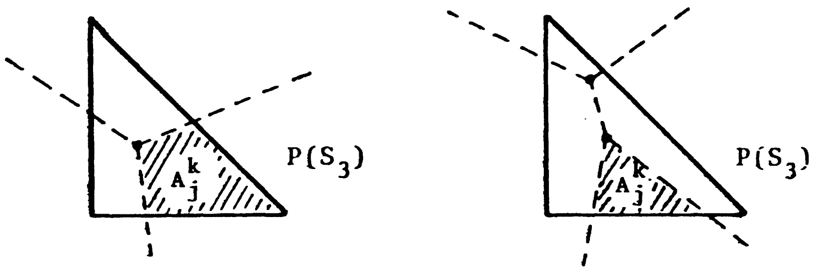


Fig. 1

1.4. DEFINICION.– Una columna de A^k es *relevante* si existe una estrategia óptima de la coalición que le asigna probabilidad estrictamente positiva.

1.5. PROPOSICION.– Si todas las columnas de A^k son relevantes se verifica que $\cap_{j=1}^s A_j^k \neq \phi$.

Demostración: Si P_j^k es una columna relevante de A^k, entonces $x^t P_j^k = v_k$ (valor del juego de suma nula de matriz A^k), $\forall\, x \in 0\ (J, A^k)$ (conjunto de estrategias óptimas de J), resultado conocido de Teoría de Juegos. Por lo tanto, si todas las columnas son relevantes, $O(J, A^k)$ está contenido en $\cap_{j=1}^s A_j^k$; como por el teorema minimax para juegos finitos $O(J, A^k) \neq \phi$, se tiene la demostración. □

Como la hipótesis de trabajo nos lo permite, eliminamos todas las columnas no relevantes, para lo que basta considerar las estrategias óptimas extremas de la coalición y eliminar las columnas que correspondan a componentes nulas en todas ellas.

Vamos ahora a considerar los distintos subconjuntos de las zonas de linealidad antes definidas, en los que todas las componentes de f son lineales.

1.6. DEFINICION.– Llamaremos *zona de linealidad correspondiente a* $\{j_1, ..., j_\ell\}$, donde $j_k \in \{1, ..., s\}$ para todo valor $k \in \{1, ..., \ell\}$ al conjunto

$$A_{j_1,...,j_\ell} = \cap_{k=1}^{\ell} A_{j_k}^k$$

que es convexo y cerrado por la forma en que está definido. Al igual que antes, estos conjuntos recubren $P(S_r)$ y son disjuntos salvo a lo sumo puntos de sus fronteras.

Sea $\{j_1, ..., j_\ell\}$ tal que $A_{j_1,...,j_\ell} \neq \phi$, y $f_{j_1,...,j_\ell} = (x^t P_{j_1}^1, ..., x^t P_{j_\ell}^\ell)$.

Si restringimos el problema (I), al conjunto $A_{j_1,...,j_\ell}$, entonces

$$\max_{A_{j_1,...,j_\ell}} f(x) = \max_{A_{j_1,...,j_\ell}} f_{j_1,...,j_\ell}(x) \qquad \text{(II)}$$

es un problema de programación lineal multiobjetivo con restricciones lineales, que se puede resolver por cualquiera de los métodos desarrollados en la literatura de las últimas décadas.

Sin embargo, si se realizan estas optimizaciones habría que hacerlas en cada zona de linealidad $\{j_1, ..., j_\ell\}$ en particular, y después, la optimización total (problema (I)) supondría estas optimizaciones parciales en todas las zonas citadas. El algoritmo que planteamos más tarde necesita sólo optimizaciones en unas zonas de linealidad determinadas, desarrollándose cada problema parcial de modo más simple, y sin parametrizar el problema.

Se puede probar, (ver (3)), que:

1.7. PROPOSICION.– Cualquier punto extremo de

$$\max_{P(S_r)} f(x)$$

es imagen mediante f de uno o más puntos extremos de un conjunto de linealidad relativo a algún $\{j_1, ..., j_\ell\}$.

2. CALCULO DEL NIVEL DE EFICIENCIA: CASO BIOBJETIVO

Para resolver el problema (I) en el caso biobjetivo consideremos primero los problemas monoobjetivo auxiliares:

$$\max_{P(S_r)} f^k(x) \; (k = 1, 2) \tag{III}$$

cuyas soluciones son los conjuntos de estrategias óptimas $O(J, A^k)$. Sea $v_k = f^k(x) \; \forall \, x \in O(J, A^k)$ $(k = 1, 2)$ el valor de los correspondientes juegos. Supongamos que $\cap_{k=1}^2 O(J, A^k) = \phi$, pues en caso contrario (I) estaría trivialmente resuelto con $X_E = \cap_{k=1}^2 O(J, A^k)$ y $N_E = v = (v_1, v_2)$.

Eliminando ahora las columnas no relevantes, si s_k es el número de las restantes sabemos que $\cap_{j=1}^{sk} A_j^k \neq \phi$ $(k = 1, 2)$; por comodidad empleamos la misma notación para las nuevas matrices y suponemos como antes que $\cap_{k=1}^2 O(J, A^k) = \phi$.

Sean x^1 y x^2 dos puntos extremos de los conjuntos de soluciones de

$$\max_{O(J, A^2)} f^1(x) \qquad \max_{O(J, A^1)} f^2(x) \tag{IV}$$

respectivamente; si $v_1^* = f^1(x^2)$, $v_2^* = f^2(x^1)$ entonces los puntos "límite" del nivel de eficiencia son los pares (v_1, v_2^*) y (v_1^*, v_2) (ver figura 5).

Una propiedad interesante, derivada de la relevancia de columnas, es el carácter lineal de f en ambas componentes sobre el segmento que une x^1 con x^2.

2.1. PROPOSICION.– Si todas las columnas de A^1 y A^2 son relevantes, entonces existen $j_1 \in \{1, ..., s_1\}$ y $j_2 \in \{1, ..., s_2\}$ tales que

$$\{x^\circ \in P(S_r) \mid x^\circ = \lambda x^1 + (1 - \lambda) x^2, \;\; \lambda \in [0, 1]\} \subset A_{j_1, j_2}$$

Demostración: Por 1.5, $O(J, A^k) \subset \cap_{j=1}^{sk} A_j^k$ $(k = 1, 2)$, y en consecuencia $x^1 \in \cap_{j=1}^{s1} A_j^1$; $x^2 \in \cap_{j=1}^{s2} A_j^2$. Como además $P(S_r) = \cap_{j=1}^{sk} A_j^k$ $(k = 1, 2)$ han de existir $j_1 \in \{1, ..., s_1\}$ y $j_2 \in \{1, ..., s_2\}$ tales que $x^2 \in A_{j_1}^1$ y $x^1 \in A_{j_2}^2$. En resumen, las estrategias x^1 y x^2 están en A_{j_1, j_2}. La convexidad de A_{j_1, j_2} prueba el resto. □

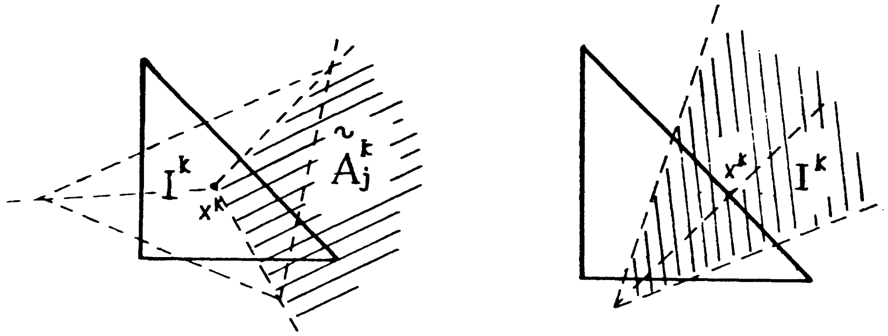
Introducimos ahora unos conjuntos auxiliares, que nos permitirán expresar el problema (I) en términos adecuados al tratamiento posterior.

2.2. DEFINICION.– Llamaremos *k-ésima zona de linealidad ampliada correspondiente a la columna j^** al conjunto $\tilde{A}^k_{j^*} = \{x \in \mathbb{R}^{r-1} \mid \min_j x^t P^k_j = x^t P^k_{j^*}\}$, donde j varía en el conjunto $\{1, ..., s_k\}$. Observemos que con respecto a las zonas de linealidad k-ésima definidas anteriormente, hemos prescindido de la restricción de pertenecer a $P(S_r)$. Ver figura 2 a) ($r = 3$).

2.3. DEFINICION.– Se denominan *secciones superiores* correspondientes a los atributos 1 y 2 respectivamente, a los conjuntos

$$I^1 = \{x \in \mathbb{R}^{r-1} \mid f^1(x) \geqslant f^1(x^2)\} \qquad I^2 = \{x \in \mathbb{R}^{r-1} \mid f^2(x) \geqslant f^2(x^1)\}$$

que son convexos, cerrados y con intersección no vacía (x^1 y x^2 están en ambos. Ver figura 2 a) ($r = 3$))



a) *Fig. 2* b)

Se prueba sin dificultad a partir de las definiciones que

2.4. PROPOSICION.– $x^1 \in \mathrm{Int}(I^1) \cap \mathrm{Front}\,(I^2)$;
$x^2 \in \mathrm{Int}(I^2) \cap \mathrm{Front}\,(I^1)$.

La acotación de los conjuntos I^k, propiedad deseable como más tarde se ve, no tiene por qué darse en general. Ver figura 2 b) ($r = 3$).

Observemos que de la definición de I^1 e I^2 se desprende que

$$\max_{P(S_r)} f(x) = \max_{P(S_r) \cap \{I^1 \cap I^2\}} f(x) \qquad \text{(I)}$$

Si se elimina la restricción de que $x \in P(S_r)$, entonces para el problema

$$\max_{I^1 \cap I^2} f(x) \qquad \text{(V)}$$

se tiene siempre que $\max\limits_{P(S_r)} f(x) \leqslant \max\limits_{I^1 \cap I^2} f(x)$, pudiendo ser estricta esta desigualdad.

Sin embargo es claro que las soluciones x de (V) que satisfacen la restricción de estrategia son eficientes para (I). En consecuencia, si se resuelve (V) y sus soluciones x están en $P(S_r)$, queda resuelto el problema (I).

Para el cálculo del nivel de eficiencia distinguiremos primero el caso en que el jugador considerado tiene sólo dos estrategias puras.

2.5. PROPOSICION.– Si $r = 2$, el nivel de eficiencia es la envoltura convexa de $f(x^1)$ y $f(x^2)$.

Demostración: Es consecuencia de (2.4) y (2.1). Puede verse en (3). □

Si el jugador fijado tiene más de dos estrategias puras, $r > 2$, el conjunto eficiente es un camino poligonal en $\mathbb{R}^{r-1}$, entre x^1 y x^2, cuyos vértices son puntos extremos de $A_{j_1, j_2} \cap \{I^1 \cap I^2\} \cap P(S_r)$ para alguna columna j_1 de A^1 y j_2 de A^2 tal que $A_{j_1, j_2} \neq \phi$. Los vértices del nivel de eficiencia son imágenes de vértices de tal camino en $\mathbb{R}^{r-1}$. Si el camino solución para (V) sale de $P(S_r)$ deja de ser solución para (I), es decir, conjunto eficiente. Como x^1 y x^2 están en $P(S_r)$, en un momento dado, dicho camino vuelve a ser conjunto eficiente, habiéndose desplazado hasta entonces por la frontera de $P(S_r)$. Ver figura 5.

Dado un punto $x^\circ \in P(S_r)$, llamamos $\{I^1 \cap I^2\}_o$ al conjunto $\{I^1 \cap I^2\}$ cuando x° está en Int $P(S_r)$. Si x° está en alguna(s) frontera(s) de $P(S_r)$ entonces $\{I^1 \cap I^2\}_o$ representa la intersección de $\{I^1 \cap I^2\}$ con el semiespacio(s) cerrado(s) que contiene(n) a $P(S_r)$ de los que forma(n) dicha(s) frontera(s).

2.6. DEFINICION.– Dado un punto x° del conjunto eficiente, se llama *dirección óptima en x° hacia x^2* al vector unitario $d_1(x^{\circ})$ de modo que $\exists\ \epsilon'(x^{\circ}) > 0$ tal que $\forall\ \epsilon$ con $0 < \epsilon \leqslant \epsilon'(x^{\circ})$, $\exists\ \lambda(\epsilon) \in \mathbb{R}$ verificando que

$$\max_{I^{1*}(x^{\circ},\,\epsilon)} f^2(x) = f^2\ (x^{\circ} + \lambda(\epsilon)\cdot d_1(x^{\circ}))$$

siendo $I^1{}^*(x^{\circ}, \epsilon) = \{x \in P(S_r) \cap \{I^1 \cap I^2\}\,|\,f^1(x) = f^1(x^{\circ}) - \epsilon\}$. Análogamente se define la dirección óptima en x° hacia x^1.

Una caracterización de interés práctico de este concepto es:

2.7. PROPOSICION.– $d_1(x^{\circ})$ es una dirección óptima en x° hacia x^2 si y solo si $\exists\ \epsilon(x^{\circ}) > 0$ tal que $\forall\ \epsilon$ con $0 < \epsilon \leqslant \epsilon(x^{\circ})$, $\exists\ \lambda(\epsilon) \in \mathbb{R}$ verificando que

$$\max_{I^1(x^{\circ},\,\epsilon)} f^2(x) = f^2(x^{\circ} + \lambda(\epsilon)\cdot d_1\,(x^{\circ}))$$

siendo ahora $I^1(x^{\circ}, \epsilon) = \{x \in \{I^1 \cap I^2\}_{\mathrm{o}}\,|\,f^1(x) = f^1(x^{\circ}) - \epsilon\}$.

Demostración: Se puede ver en (3). □

En algunos casos particulares, $I^1 \cap I^2$ es de tal forma (fig. 3a)) que alguna de las estrategias x^1, x^2 (o ambas) no corresponden a soluciones de (V) (por lo que están en la frontera de $P(S_r)$). Si sólo se impone la restricción $x \in I^1 \cap I^2$, pueden no existir direcciones óptimas al no haber cotas para alguna o todas las componentes de f. Por tal motivo, en la definición de $I^1(x^{\circ}, \epsilon)$ se considera la restricción $x \in \{I^1 \cap I^2\}_{\mathrm{o}}$.

Construiremos el nivel de eficiencia de un modo sistemático a partir de x^1 (análogamente de x^2) siguiendo en cada vértice la dirección óptima en él hacia x^2, para así calcular los restantes hasta llegar a x^2.

Si llamamos $f_j^k(x) = x^t\,P_j^k\ \ j \in \{1, ..., s_k\}\ \ (k = 1, 2)\ \ \forall\, x \in \mathbb{R}^{r-1}$ y definimos

$$B_x^k = \{j \in \{1, ..., s_k\}\,|\,f^k(x) = f_j^k(x)\}\ (k = 1, 2)$$

2.8. TEOREMA (Cálculo de la primera dirección óptima).– Si $B_{x^1}^2 = \{j_1\}$, entonces se tiene que:

$$x^* = x^1 + \lambda\cdot d_1(x^1)\,(\lambda > 0) \Leftrightarrow \max_{\{I^1\}_1} f_{j_1}^2(x) = f_{j_1}^2(x^*) \qquad \text{(a)}$$

donde $\{I^1\}_1$ es el conjunto $\{I^1\}_0$ en el punto $x^\circ = x^1$.

Demostración: Se prueba haciendo uso del carácter homotético con respecto a x^1 de los conjuntos I^1 y $\{x \in I^1 \mid f^1(x) \geqslant f^1(x^1) - \epsilon, \epsilon > 0\}$. (Ver (3)). $\square$

Observemos que si en $B^2_{x^1}$ hay más de un elemento, entonces $\forall j \in B^2_{x^1}$ es válido el resultado anterior para el problema

$$\max_{\{I^1\}_1 \cap \{x \mid f_j^2(x) \leqslant f_{j'}^2(x),\, j \neq j',\, j' \in B^2_{x^1}\}} f_j^2(x)$$

Si este máximo se alcanza en x_j^*, entonces si

$$\max_{j \in B^2_{x^1}} f_j^2(x_j^*) = f_{j_1}^2(x_{j_1}^*)$$

basta tomar $x^* = x_{j_1}^*$. Si d es tal que $x^* = x^1 + \lambda \cdot d$, claramente $d = d_1(x^1)$ tomando como $\epsilon(x^1)$ cualquier ϵ tal que $x^1 + \lambda(\epsilon) \cdot d \in \tilde{A}^2_{j_1}$. Ver figura 3 b).

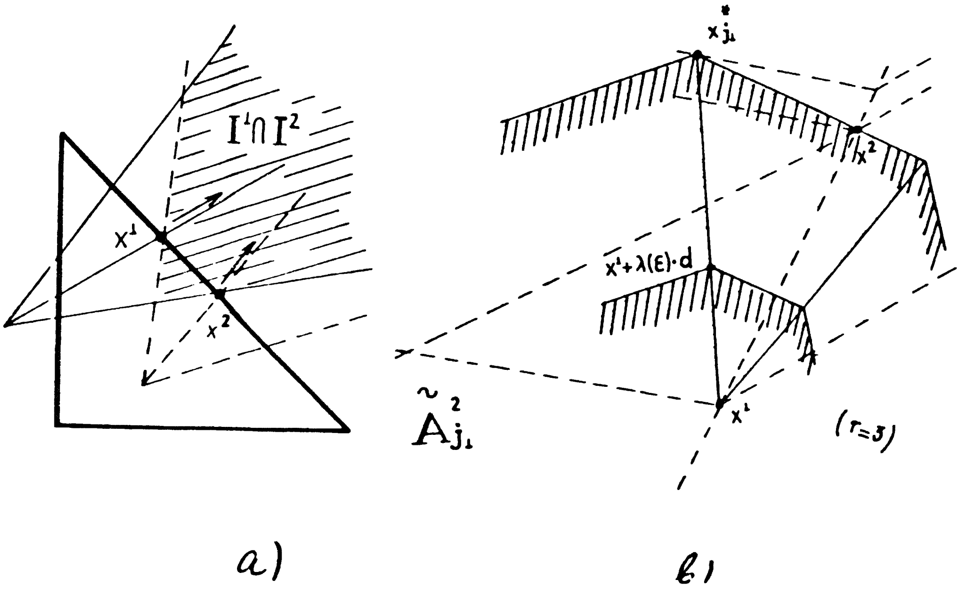


Fig. 3

Se puede comprobar fácilmente que los $\hat{j} \in B^2_{x^1}$ correspondientes a columnas relevantes de A^2 que son redundantes en I^2 (si existen) no alteran en absoluto el resultado inmediato anterior.

Resumimos a continuación algunas condiciones suficientes para que el conjunto eficiente esté constituido por el segmento que une x^1 con x^2.

Consideremos $P_j^k = \begin{bmatrix} a_{1j}^k \\ a_{2j}^k \\ \vdots \\ a_{rj}^k \end{bmatrix}$; sea $P_{0j}^k = \begin{bmatrix} a_{1j}^k & - a_{rj}^k \\ a_{2j}^k & - a_{rj}^k \\ \vdots & \\ a_{(r-1)j}^k & - a_{rj}^k \end{bmatrix}$, donde $(k = 1, 2)$ y $j \in \{1, ..., s_k\}$.

2.9. PROPOSICION.— Tales condiciones son:

i) $x^* = x^2$, donde x^* es el introducido en 2.8.

ii) $\exists\, j_1 \in B_{x^2}^1$ y $\exists\, j_2 \in B_{x^1}^2$ tal que $P_{oj_2}^2 \propto P_{oj_1}^1$, donde el símbolo $\propto$ indica proporcionalidad.

iii) La dimensión de S es $r-2$, siendo S el conjunto de soluciones del problema $\max\limits_{O(J, A^1)} f^2(x)$.

Demostración: Puede verse en (3). □

Debido al carácter lineal de los objetivos sobre cada conjunto convexo A_{j_1, j_2}, la imagen por f de cualquier segmento contenido en A_{j_1, j_2} es lineal, y por lo tanto el *primer vértice del conjunto eficiente*, e_1, se alcanza para un $\lambda > 0$ tal que $x^1 + \lambda \cdot d(x^1)$ corta a alguna frontera de A_{j_1, j_2} (que no sea la que soporta a x^1), a menos que antes se encuentre alguna frontera de $P(S_r)$, en cuyo caso el primer vértice se encuentra en ella. Por lo tanto, conocida $d_1(x^1)$, cuya obtención ya vimos que se reduce a un problema de programación lineal, para calcular el primer vértice de X_E basta resolver el siguiente problema de ese mismo tipo:

$$\max f_{j_1}^2(x) \qquad \text{(b)}$$

$$\text{sujeto a:} \quad f_{j_1}^2(x) \leqslant f_j^2(x) \quad \forall j \in \{1, ..., s_2\}$$

$$x \in r(x^1, x^*)$$

$$x \in P(S_r)$$

donde $r(x^1, x^*)$ representa la recta que pasa por x^1 y x^*.

Observemos que si $d_1(x^1)$ no es única, es decir, $\{x_1^*, ..., x_z^*\}$ $z > 1$ son soluciones de (a), de entre los "primeros" vértices e_{1i} $(i = 1, ..., z)$, que estarán alineados, será significativo aquél, e_1, tal que $f_{j_1}^2(e_1) = \max_{i \in \{1, ..., z\}} f_{j_1}^2(e_{1i})$.

En general, conocido un vértice e_{q-1}, $(q = 2, 3, ...)$, para obtener la dirección óptima en e_{q-1} hacia x^2 vamos a considerar un valor ϵ "suficientemente pequeño" (aclararemos ésto más tarde) y resolver el programa lineal

$$\max f_j^2(x) \tag{c}$$

$$\text{sujeto a: } x \in I^1(e_{q-1}, \epsilon)$$

$$f_j^2(x) \leqslant f_{j'}^2(x) \quad j' \neq j, \; j' \in B_{e_{q-1}}^2$$

para todo valor $j \in B_{e_{q-1}}^2$. Ver figura 4.

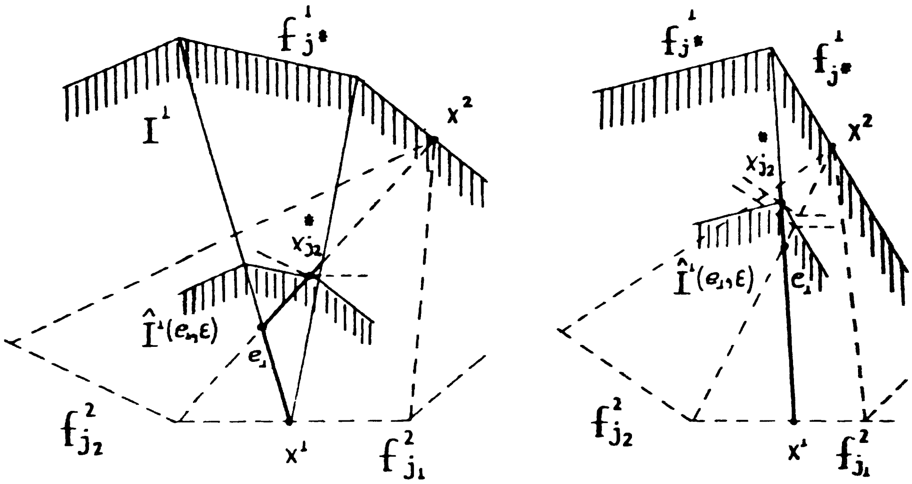


Fig. 4

Como antes, si la solución de este programa es $f_j^2(x_j^*)$, y j_q tal que

$$\max_{j \in B_{e_{q-1}}^2} f_j^2(x_j^*) = f_{j_q}^2(x_{j_q}^*)$$

entonces $x^*_{j_q}$ está sobre una dirección óptima en e_{q-1} hacia x^2.

Para calcular ahora el vértice correspondiente a esa dirección óptima, e_q, resolvemos el programa lineal

$$\max f^2_{j_q}(x) \qquad \text{(d)}$$

$$\text{sujeto a:} \quad f^2_{j_q}(x) \leqslant f^2_j(x) \quad \forall j \in \{1, ..., s_2\}, \ j \neq j_q, \ j_q \in B^2_{x^*_{j_q}} \cap B^2_{e_{q-1}}$$

$$f^1_{j^*}(x) \leqslant f^1_j(x) \quad \forall j \in \{1, ..., s_1\}, \ j \neq j^*, \ j^* \in B^1_{x^*_{j_q}} \cap B^1_{e_{q-1}}$$

$$x \in r(e_{q-1}, x^*_{j_q})$$

$$x \in P(S_r)$$

teniendo en cuenta como antes la observación relativa a la posible no unicidad de la dirección óptima en e_{q-1} hacia x^2.

2.10. OBSERVACION.– (Restricciones para el valor de ϵ). Para poder garantizar que $x^*_{j_q}$ (solución obtenida a partir de (c)) está sobre una dirección óptima en e_{q-1} hacia x^2, buscaremos el valor de ϵ de modo que: e_{q-1} y $x^*_{j_q}$ estén en una misma zona de linealidad doble; $x^*_{j_q}$ corresponda a una estrategia y además $x^*_{j_q} \neq e_q$. Para ello consideramos un proceso iterativo que consta de los siguientes elementos:

1) Un número real arbitrario $\epsilon > 0$; puede ser $\epsilon = f^1(x^1) - f^1(e_1)$.
2) Una sucesión decreciente, $\{\epsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$, de números reales positivos convergentes a cero; podemos tomar $\epsilon_n = \epsilon/2^n$, $n \in \{1, 2, ...\}$.
3) Una solución del problema (c), $x^*_{j_q}(\epsilon_n)$, obtenida con el valor $\epsilon = \epsilon_n$.
4) Los conjuntos $A^1_{q-1}(\epsilon_n) = B^1_{e_{q-1}} \cap B^1_{x^*_{j_q}(\epsilon_n)}$ y $A^2_{q-1}(\epsilon_n) = B^2_{e_{q-1}} \cap B^2_{x^*_{j_q}(\epsilon_n)}$.

La descripción razonada del proceso citado puede verse en (3).

El algoritmo que acabamos de exponer se puede esquematizar de la manera siguiente:

Etapa 1. Se determinan los puntos "límite" del conjunto eficiente,

x^i $(i = 1, 2)$ haciendo uso del problema (IV), y se fija un sentido, por ejemplo de x^1 a x^2, para describir el mismo.

Etapa 2. Se calculan las zonas de linealidad 2 (o 1 si empezamos en x^2) que comparte el punto x^1, $B^2_{x^1}$, y luego se resuelve el problema (a) $\forall\, j \in B^2_{x^1}$, seleccionando la solución $x^*_{j_1}$, correspondiente a la primera dirección óptima, de acuerdo con la observación hecha en 2.8. Si $x^*_{j_1} = x^2$ el algoritmo finaliza; en otro caso se pasa a

Etapa 3. Se resuelve el problema (b) para el valor seleccionado $j_1 \in B^2_{x^1}$, con lo que se obtiene el primer vértice de X_E, e_1.

Etapa 4. Se calculan las zonas de linealidad k-ésima que comparte el punto e_1, $B^k_{e_1}$ $(k = 1, 2)$.

Etapa 5. Para el primer elemento, ϵ_1, de la sucesión $\{\epsilon_n\}^{\infty}_{n=1}$, resolvemos el problema (c) $\forall\, j \in B^2_{e_1}$, seleccionando como antes la solución $x^*_{j_2}(\epsilon_1)$.

Etapa 6. Se calculan las zonas de linealidad k-ésima que comparte $x^*_{j_2}(\epsilon_1)$, $B^k_{x^*_{j_2}(\epsilon_1)}$ $(k = 1, 2)$, y se comprueba si $B^k_{e_1} \cap B^k_{x^*_{j_2}(\epsilon_1)} \neq$ $\neq \phi$ $(k = 1, 2)$. En caso negativo se va a la etapa 5 y se toma el siguiente elemento de la sucesión. En otro caso se pasa a

Etapa 7. Si $x^*_{j_2}(\epsilon_1) \notin P(S_r)$ se vuelve a la etapa 5 con el siguiente elemento de la sucesión. Si $x^*_{j_2}(\epsilon_1)$ corresponde a una estrategia, resolvemos el problema (d) para el valor seleccionado $j_2 \in B^2_{e_1}$, con lo que se obtiene el punto e_2.

Etapa 8. Si $e_2 = x^*_{j_2}(\epsilon_1)$, volveríamos a la etapa 5 con el siguiente elemento de la sucesión. En caso contrario se pasa a

Etapa 9. Si $e_2 = x^2$ finaliza el algoritmo. En otro caso iríamos a la etapa 4 con el punto e_2. Seguiríamos así sucesivamente hasta encontrar un vértice e_q tal que $e_q = x^2$.

Como ejemplo ilustrativo, aplicaremos el algoritmo a un caso concreto. Consideremos un juego bipersonal con función de pago biobjetivo. Supongamos que la matriz de pagos para uno de los jugadores es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} (0,1) & (2,0) & (3,0) \\ (3,0) & (0,2) & (2,0) \\ (2,0) & (3,0) & (0,3) \end{bmatrix}$$

Se comprueba fácilmente que A^1 y A^2 tienen valor y estrategias maximín únicas: $\nu_1 = 5/3$, $\nu_2 = 6/11$; $x^1 = (1/3,\ 1/3,\ 1/3)^t$, $x^2 = (6/11,\ 3/11,\ 2/11)^t$, y además no se cumple ninguna de las condiciones 2.9. Los resultados aparecen resumidos en el siguiente cuadro:

Etapa	RESULTADOS
1	$(\nu_1, \nu_2^*) = (5/3,\ 1/3)^t$; $(\nu_1^*, \nu_2) = (13/11, 6/11)^t$
2	$B_{x^1}^2 = \{1\}$; $x^* = (47/77, 31/77)^t \neq x^2$
3	$e_1 = (9/19, 7/19)^t$; $f(e_1) = (27/19, 9/19)^t$
4	$B_{e_1}^2 = \{1, 3\}$; $B_{e_1}^1 = \{1, 2\}$
5	$\epsilon_1 = 14/144$; $x^*(\epsilon_1) = (291/570,\ 182/570)^t$
6	$B_{x^*(\epsilon_1)}^2 = \{1, 3\}$; $B_{x^*(\epsilon_1)}^1 = \{1\}$ $B_{e_1}^2 \cap B_{x^*(\epsilon_1)}^2 = \{1, 3\} \neq \phi$; $B_{e_1}^1 \cap B_{x^*(\epsilon_1)}^1 = \{1\} \neq \phi$
7	$x^*(\epsilon_1) = (291/570,\ 182/570)^t \in P(S_3)$; $e_2 = (6/11, 3/11)$
8	$e_2 = (6/11, 3/11)^t \neq x^*(\epsilon_1) = (291/570,\ 182/570)^t$
9	$e_2 = (6/11, 3/11)^t = x^2$

El nivel de eficiencia, conjunto eficiente y demás elementos introducidos hasta ahora están representados en la figura 5 para este caso particular.

3. UN CONCEPTO DE SOLUCION DEL JUEGO

Cuando todos los jugadores utilizan estrategias de modo que se recorre su nivel de eficiencia, es decir, estrategias eficientes, los corres-

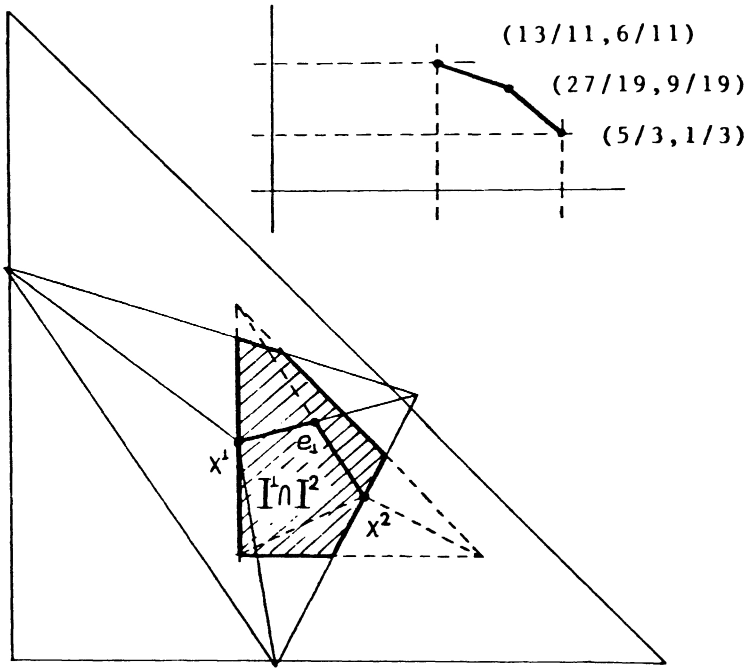


Fig. 5

pondientes pagos asociados (considerando las matrices de pago iniciales, no las reducidas) recorren un cierto recinto dentro de todos los pagos alcanzables por cada uno de los jugadores, que llamaremos *conjunto de pagos eficiente* P^i. Se puede comprobar fácilmente que dado $i \in \{1, ..., n\}$, si todas las columnas de las matrices de pago son relevantes, entonces tal conjunto supera el nivel de eficiencia de J_i.

Las fronteras de Pareto de los conjuntos P^i (mejores pagos en el sentido de maximalidad) no serán en general alcanzables por todos los jugadores simultáneamente. Damos a continuación un concepto de solución satisfactoria del juego, definiendo una relación de dominancia débil sobre las n - tuplas ie estrategias eficientes.

3.1. DEFINICION.– Para cualquier x_e^i, y_e^i de X_E^i (conjunto de estrategias eficientes para J_i, $i = 1, ..., n$) se define la relación "$\gtrsim$" como:

$$(x_e^1, ..., x_e^n) \gtrsim (y_e^1, ..., y_e^n)$$

cuando se verifican a la vez:

a) $\exists\, i \in \{1, ..., n\}$ tal que $u^i(x_e^1, ..., x_e^n) \geqslant u^i(y_e^1, ..., y_e^n)$

b) $\forall\, j \neq i$ no ocurre que $u^j(x_e^1, ..., x_e^n) \leqslant u^j(y_e^1, ..., y_e^n)$

Es de trivial comprobación que, $\forall\, i = 1, ..., n$

$$(x_e^1, ..., x_e^n) \sim (y_e^1, ..., y_e^n) \Leftrightarrow u^i(x_e^1, ..., x_e^n) = u^i(y_e^1, ..., y_e^n)$$

3.2. DEFINICION.– Dado el conjunto de todas las n-tuplas de estrategias eficientes, escogemos una cualquiera de ellas; si es dominada estrictamente por cualquier otra con la relación anterior, la eliminamos. Se procede ahora igual con el conjunto de las estrategias restantes todas las veces que sea necesario, hasta que resulte un conjunto E del cual no se pueda eliminar ningún elemento por el procedimiento anterior. A tal conjunto E le denominamos una *E-solución* del juego.

Tal y como está definida, la existencia de una E-solución está siempre asegurada; no así su unicidad puesto que por no ser transitiva la relación de dominancia definida, no se llega al mismo conjunto E procediendo según 3.2 en un orden o en otro.

Un estudio detallado del cálculo práctico de una E-solución puede verse en (1).

BIBLIOGRAFIA

(1) Cristóbal, J.A. y Prada, J.M.: *"Estructuras de dominación sobre juegos generales biobjetivo"*, XII Reunión Nacional de Estadística, Investigación Operativa e Informática, Jaca, 1980.

(2) Owen, G.: *"Game Theory"*, W.B. Saunders Company, 1968.

(3) Prada, J.M.: *"Un concepto de solución para juegos generales con pago multiobjetivo"*, Tesis Doctoral, Santiago, 1980.